

SKRIPSI

**PENERAPAN MODIFIKASI FUNGSI BESSEL PADA
PERPINDAHAN PANAS DI PIRINGAN MELINGKAR**



ANNISA EKI MULYATI

09610039

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2014

PENERAPAN MODIFIKASI FUNGSI BESSEL PADA PERPINDAHAN PANAS DI PIRINGAN MELINGKAR

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

ANNISA EKI MULYATI

09610039

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2014

**SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp :-

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Annisa Eki Mulyati

NIM : 09610039

Judul Skripsi : Penerapan Modifikasi Fungsi Bessel Pada Perpindahan Panas
Di Piringan Melingkar

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 17 Januari 2014

Pembimbing

Sugiyanto, S.T., M.Si

NIP. 19800505 200801 1 028



PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/423/2014

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul

: Penerapan Modifikasi Fungsi Bessel Pada Perpindahan Panas
Di Piringan Melingkar

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Nama : Annisa Eki Mulyati

NIM : 09610039

Telah dimunaqasyahkan pada : 30 Januari 2014

Nilai Munaqasyah : B+

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Sugiyanto, M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Pengaji I

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Pengaji II

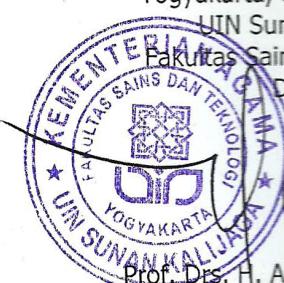
Mahmudi, S.Si., M.Si

Yogyakarta, 07 Februari 2014

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

Dekan



Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A., Ph.D

NIP. 19580919 198603 1 002

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Annisa Eki Mulyati

NIM : 09610039

Prodi / Smt : Matematika / IX

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 1 Oktober 2013

Yang menyatakan



Annisa Eki Mulyati

NIM: 09610039



Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

- Ibunda Marni dan Ayahanda Sunarno, S.E. M.Si. yang telah mendidik, membesarkan, mendoakan dan mencurahkan jiwa raga selama ini. Kalian adalah sumber semangatku,
- Adikku Tyas yang selalu mendoakan dan memberi semangat
- Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

MOTTO

- "*Hasil adalah hadiah, yang terpenting adalah proses/usaha. Namun, jika kau belum berhasil percayalah jalan yang lain akan lebih mudah, karena kau telah mempelajari prosesnya*"

(*Senja Merah*)

- "*Belajarlah ketika yang lain sedang tidur; Bekerjalah ketika selagi yang lain sedang bermalas-malasan; Bersiap-siaplah ketika yang lain sedang bermain; Bermimpilah ketika yang lain sedang berharap*"

(William Arthur Ward)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penelitian dalam skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi umat Islam.

Alhamdulillah, akhirnya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Penerapan Modifikasi Fungsi Bessel Pada Perpindahan Panas Di Piringan Melingkar". Penyusunan skripsi ini mendapat bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih disampaikan sebesar-besarnya kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak Sugiyanto, M.Si. selaku dosen pembimbing yang meluangkan waktu dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Segenap staf dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
5. Ibunda Marni, Ayahanda Sunarno, S.E. M.Si. Adek Tyas dan seluruh keluarga yang telah memberikan doa, bantuan, dukungannya selama penulis menimba ilmu, dan penyusunan skripsi ini dapat selesai.
6. Kang Arif yang selalu membantu secara nasehat dan bertukar pikiran selama perkuliahan dan dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman seperjuangan mbak Fitri yang selalu mendukung dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

8. Teman-teman Matematika angkatan 2009, 2008, 2010 yang telah memberi warna, bantuan dan dukungan selama ini.
9. Mas Ari Dwi Harnanto dan Bayu Ardi Pratama, S.Si. yang bersedia membagi ilmu dan memberikan tutorial program Latex.
10. Teman-teman di kost SriKandi terima kasih atas semangat dan dukungannya selama ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per-satu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Namun demikian, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, 21 Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN	xi
ABSTRAK	xii
I PENDAHULUAN	1
1.1. LATAR BELAKANG	1
1.2. BATASAN MASALAH	2
1.3. RUMUSAN MASALAH	2
1.4. TUJUAN PENELITIAN	2
1.5. MANFAAT PENELITIAN	3
1.6. METODE PENELITIAN	3
1.7. TINJAUAN PUSTAKA	4
1.8. SISTEMATIKA PENULISAN	4
II LANDASAN TEORI	6
2.1. PERSAMAAN DIFERENSIAL	6

2.2. MODIFIKASI FUNGSI BESSEL	8
2.2.1. PD Bessel dan Modifikasi PD Bessel Parameter Real	8
2.2.2. Modifikasi Fungsi Bessel Parameter i	9
2.3. METODE SEPARASI VARIABEL	14
2.4. KOEFISIEN FOURIER	20
2.5. PEMBENTUKAN PERSAMAAN PANAS DUA DIMENSI	20
III PEMBAHASAN	25
3.1. TRANSFORMASI KOORDINAT KUTUB	25
3.2. PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS PIRINGAN MELING-KAR	29
IV PENUTUP	38
4.1. KESIMPULAN	38
4.2. SARAN	38

DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN

- $J_n(\lambda x)$: Fungsi Bessel jenis pertama order n bilangan bulat positif
- $Y_n(\lambda x)$: Fungsi Bessel jenis kedua order n
- $I_n(\lambda x)$: Modifikasi fungsi Bessel jenis pertama order n
- $K_n(\lambda x)$: Modifikasi fungsi Bessel jenis kedua order n
- \sum_R : Menyatakan jumlah untuk bilangan real
- \sum_i : Menyatakan jumlah untuk bilangan imajiner
- $ber_n x$: Fungsi Bessel jenis pertama bagian real parameter imajiner
- $bei_n x$: Fungsi Bessel jenis pertama bagian imajiner parameter imajiner
- $ker_n x$: Modifikasi fungsi Bessel jenis kedua bagian real parameter imajiner
- $kei_n x$: Modifikasi fungsi Bessel jenis kedua bagian imajiner parameter imajiner
- $\Gamma(x)$: Fungsi Gamma (dibaca:tho)
- $M_n(x)$: Modulus atau panjang resultant
- $\vartheta_n(x)$: Amplitudo atau argumen

ABSTRAK

Modifikasi persamaan diferensial Bessel mempunyai solusi yang dinamakan modifikasi fungsi Bessel. Modifikasi fungsi Bessel diterapkan untuk mengetahui perpindahan panas pada piringan melingkar. Piringan melingkar tersebut diisolasi bagian atas dan bawahnya, maka perpindahan panas pada piringan melingkar dapat dinyatakan dalam persamaan panas dua dimensi.

Pembahasan diawali dari transformasi koordinat kartesius yang terdapat pada persamaan panas dua dimensi ke dalam koordinat kutub. Selanjutnya, persamaan panas koordinat kutub diselesaikan menggunakan separasi variabel. Pada proses separasi variabel, dihasilkan persamaan diferensial orde dua dan modifikasi fungsi Bessel order n .

Solusi persamaan panas di atas mengandung modifikasi fungsi Bessel order n . Solusi ini merepresentasikan nilai panas pada posisi jari-jari, sudut kelengkungan dalam waktu tertentu di piringan melingkar.

Kata Kunci : persamaan panas dua dimensi, modifikasi fungsi bessel

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Teori Matematika dalam keilmuan mengalami perkembangan yang pesat. Teori Matematika tidak hanya digunakan pada bidang keilmuan Matematika saja, tetapi juga sebagai dasar dari berbagai ilmu khususnya ilmu eksakta. Seperti penerapan Matematika dalam bidang Kimia, Fisika, Teknik dan lain sebagainya. Salah satu teori matematika yang dibahas pada skripsi ini yaitu Persamaan Diferensial (PD).

Persamaan diferensial mengalami penyempurnaan seperti persamaan diferensial Bessel. Menurut (**O' Connor, 1997**) persamaan diferensial Bessel dikemukaan oleh Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846). Seorang matematikawan Jerman yang juga astronom, mempublikasikan pada makalahnya yang diterbitkan tahun 1826. Bentuk umum PD Bessel yaitu $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ yang berorder n . Solusi dari PD Bessel disebut dengan Fungsi Bessel.

Persamaan diferensial yang dapat diterapkan di bidang Fisika yaitu mengenai perpindahan panas (*heat transfer*). Perpindahan panas terjadi karena perbedaan suhu yang lebih tinggi ke sistem lain atau lingkungan yang mempunyai suhu yang lebih rendah. Perpindahan panas menggunakan media penghantar dapat berupa padat, cair maupun gas.

Piringan melingkar merupakan benda berbentuk lingkaran yang mempunyai jari-jari, kelengkungan sudut dan ketebalan. Fungsi dari piringan melingkar pada perpindahan panas adalah merambatkan panas dari bagian luar piringan menuju ke bagian pusat piringan. Salah satu contoh benda piringan melingkar berupa cakram kendaraan. Menurut (**Dewanto, 2011**) saat cakram kendaraan sedang berpu-

tar, maka seiring dengan waktu suhunya akan meningkat. Apabila hal ini terjadi secara terus-menerus cakram tersebut akan mengalami kerusakan yang disebabkan panas yang berlebihan. Kerusakan pada cakram dapat berpengaruh pada kinerja mesin, maka untuk mengatasinya dengan menyeimbangkan panas masuk dengan panas yang keluar pada cakram. Oleh karena itu, mengetahui tentang perpindahan panas pada cakram menjadi suatu hal yang penting.

Berdasarkan pernyataan tersebut, penulis tertarik untuk mengetahui suhu pada piringan melingkar (cakram). Hal ini yang menjadi latar belakang untuk membahas penerapan fungsi Bessel pada perpindahan panas. Perpindahan panas ini yang kemudian akan diterapkan pada piringan melingkar.

1.2. BATASAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang agar pembahasan tidak melebar, maka skripsi ini hanya akan membahas tentang penerapan modifikasi fungsi Bessel pada piringan melingkar. Piringan melingkar pada skripsi ini diasumsikan sebagai lempengan tipis, terisolasi sempurna yang termasuk dalam benda dua dimensi.

1.3. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah, maka dapat dibentuk rumusan masalah yaitu :

1. Bagaimana penerapan modifikasi fungsi Bessel persamaan panas di piringan melingkar ?
2. Bagaimana solusi persamaan panas di piringan melingkar ?

1.4. TUJUAN PENELITIAN

Berdasarkan batasan masalah dan rumusan masalah, maka tujuan dari skripsi ini yaitu :

1. Mengetahui penerapan modifikasi fungsi Bessel persamaan panas di piringan melingkar
2. Mengetahui solusi persamaan panas di piringan melingkar.

1.5. MANFAAT PENELITIAN

Berdasarkan latar belakang dan tujuan penelitian maka manfaat dari skripsi ini yaitu :

1. Mengetahui suhu yang terjadi saat piringan melingkar menerima panas dari sistem atau lingkungan.
2. Memberikan gambaran dan penjelasan mengenai modifikasi fungsi Bessel di piringan melingkar.
3. Dapat digunakan sebagai referensi tentang penerapan PD Bessel bagi perpus-takaan Jurusan Matematika.

1.6. METODE PENELITIAN

Penulisan skripsi menggunakan metode literatur. Sumber data yang digunakan dalam skripsi ini adalah sumber-sumber tertulis yang berupa buku, jurnal maupun penelitian lain yang dapat mendukung skripsi ini.

Tahapan penulisan skripsi ini dimulai dari sebuah pemisalan pada benda yang bekerja pada sebuah sistem. Selanjutnya, pengumpulan teori-teori untuk mendukung isi pembahasan. Seperti teori mengenai perpindahan panas yang akan digunakan untuk membentuk persamaan panas dua dimensi dan teori mengenai fungsi Bessel yang di modifikasi.

Selanjutnya, dari persamaan panas dua dimensi akan dijelaskan pembentukan persamaan panas pada piringan melingkar. Tahapan terakhir, dilakukan dengan memisahkan variabel pada persamaan panas di piringan melingkar untuk mencari nilai pada masing-masing variabel, kemudian menggabungkan kembali hasil pada

setiap variabel tersebut sehingga didapatkan solusi persamaan panas pada piringan melingkar.

1.7. TINJAUAN PUSTAKA

Tinjauan pustaka yang digunakan oleh penulis berupa jurnal, buku, skripsi dan penelitian yang relevan dengan tema yang diambil penulis. Seperti Jurnal Jennifer Niedziela dari University Tennessee tahun 2008 yang berjudul "Bessel Functions and Their Applications". Pada jurnal tersebut membahas persamaan diferensial Bessel, fungsi Bessel jenis pertama dan jenis kedua, serta modifikasi Bessel untuk parameter bilangan real yang diterapkan pada persamaan Schroedinger's.

Jurnal Dedik Ardian Mahasiswa ITS dengan judul "Analisa Persamaan Panas Dan Nilai Sterilisasi Pada Proses Sterilisasi Makanan Kaleng". Pada jurnal tersebut membahas pembentukan persamaan panas tiga dimensi dan proses sterilisasi pada pertumbuhan mikroorganisme makanan kaleng.

Perbedaan penelitian sebelumnya dengan penelitian ini yakni, pada penelitian pertama membahas modifikasi Bessel untuk parameter bilangan real, sedangkan pada penelitian ini membahas modifikasi fungsi Bessel parameter imajiner yang diterapkan pada persamaan panas. Selain itu, pada penelitian kedua membahas persamaan panas pada koordinat kutub tiga dimensi yang diterapkan pada proses sterilisasi makanan kaleng, sedangkan pada penelitian ini membahas persamaan panas dua dimensi yang akan diselesaikan dengan fungsi Bessel untuk menentukan suhu pada piringan melingkar.

1.8. SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan dalam skripsi ini terdiri dari empat bab yaitu:

Bab I: Pendahuluan

Bab pendahuluan ini membahas tentang latar belakang, batasan masalah, rumusan

masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, tinjauan pustaka dan sistematika penulisan.

Bab II: Landasan Teori

Berisi mengenai teori penunjang yang digunakan dalam pembahasan seperti: persamaan diferensial, modifikasi fungsi Bessel, separasi variabel, koefisien Fourier, dan pembentukan persamaan panas dua dimensi.

Bab III: Pembahasan

Berisi mengenai pembahasan mengenai penerapan modifikasi fungsi Bessel pada persamaan panas di piringan melingkar.

Bab IV: Penutup

Berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB IV

PENUTUP

4.1. KESIMPULAN

1. Penerapan modifikasi fungsi Bessel di piringan melingkar, diperoleh pada persamaan panas yang terdiri dari fungsi $R(r)$, $\Theta(\theta)$, $T(t)$. Modifikasi fungsi Bessel yang digunakan pada piringan melingkar berupa fungsi $R(r)$ bentuk persamaan yaitu

$$r^2 R'' + rR' - (id^2\omega r^2 + n^2)R = 0.$$

2. Solusi persamaan panas di piringan melingkar yaitu

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(d\sqrt{\omega}r)}{M_n(d\sqrt{\omega}b)} \cos [\omega t + \vartheta_n(d\sqrt{\omega}r) - \vartheta_n(d\sqrt{\omega}b)] \\ &\quad \int_0^{2\pi} f(z) \cos n(\theta - z) dz \end{aligned}$$

4.2. SARAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka saran-saran yang dapat disampaikan adalah :

1. Penelitian berikutnya dapat menerapkan fungsi Bessel jenis pertama dan jenis kedua. Serta, juga dapat diterapkan pada modifikasi fungsi Bessel dengan parameter real untuk jenis pertama dan jenis kedua.
2. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan membahas penerapan fungsi Bessel pada beberapa bentuk jenis benda, seperti silinder, persegi, dan bentuk bangun ruang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Ardian, Dedik. 2007. *Analisa Persamaan Panas Dan Nilai Sterilisasi Pada Proses Sterilisasi Makanan Kaleng*. Surabaya : Institut Teknologi Surabaya.
- Bhaskar, Rao P.B. 2008. *Engineering Mathematics Second Edition*. Hyderabad : BS Publications.
- Bird, John. 2006. *Higher Engineering Mathematics Fifth Edition*. USA : Publised by Elsevier.
- Dewanto, Joni dan Andreas Wijaya. 2011. *Sistem Pendingin Paksa Anti Panas (Over Heating) pada Rem Cakram (Disk Brake) Kendaraan*. Surabaya : FTI UK Petra.
- Holman, J.P. 1997. *Perpindahan Kalor*. Jakarta : Erlangga.
- O'Connor J.J. and R.E.F. 1997. *Friedrich Wilhelm Bessel*. Scotland : University of St Andrews.
- Niedziela, Jennifer. 2008. *Bessel Functions and Their Applications*. Knoxville : University of Tennessee.
- O'Neil, Peter V. 2007. *Advanced Engineering Mathematics*. Canada : Nelson.
- Prayudi. 2006. *Matematika Teknik*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Purcell, J. Erwin and Verbeng Dale. 2003. *Kalkulus Edisi-8*. Jakarta : Erlangga.
- Spiegel, Murray R. 1984. *Seri Buku Schaum Teori Dan Soal-Soal Kalkulus Lanjutan*. Jakarta : Erlangga.
- Wylie, C. Ray and Louis C. Barret. 1995. *Advanced Engineering Mathematics*. USA : McGraw-Hill, Inc.