PERMAINAN DINAMIS LINEAR KUADRATIK BERKENDALA LUNAK BERJUMLAH NOL LINGKAR TERBUKA SISTEM DESKRIPTOR DENGAN KENDALI TETAP UNTUK PEMAIN PERTAMA

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si.

Jurusan Matematika UIN Sunan Kalijaga

Jl. Marsda Adisucipto No. 1 Yogyakarta, mwakhid_m@yahoo.com

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka dari suatu permainan dinamis linear kuadratik berkendala lunak berjumlah nol dengan struktur informasi lingkar terbuka untuk sistem deskriptor dengan mengasumsikan pemain pertama menggunakan kendali yang tetap untuk mengontrol sistem. Langkah pertama untuk mencari solusi keseimbangan titik pelana tersebut adalah dengan mentransformasi permainan dinamis sistem deskriptor menjadi permainan dinamis sistem biasa (sistem nonsingular) yang tereduksi dengan menggunakan bentuk kanonik Weierstrass. Setelah tertransformasi menjadi permainan dinamis sistem biasa, berikutnya akan diturunkan syarat perlu dan cukup keberadaan keseimbangan titik pelana lingkar terbuka dengan memanfaatkan hasil-hasil yang telah diperoleh pada sistem nonsingular. Setelah keseimbangan titik pelana dikonstruksikan untuk kasus yang umum, selanjutnya akan dikonstruksikan keseimbangan titik pelana pada kasus pertama menggunakan kendali yang tetap. Hasil analisis menunjukkan bahwa keberadaan keseimbangan titik pelana lingkar terbuka pada kasus ini tetap dapat diturunkan dari kasus yang umum.

Kata Kunci : *permainan dinamis linear kuadratik berkendala lunak berjumlah nol; struktur informasi lingkar terbuka; sistem deskriptor; kendali tetap untuk pemain pertama.*

A. Pendahuluan

Permainan dinamis adalah sebuah model matematika yang merepresentasikan suatu konflik diantara berbagai pihak yang mengendalikan suatu sistem dinamik dan masing-masing pihak berusaha meminimalkan fungsi ongkos mereka dengan memberikan sebuah kendali pada sistem dinamik tersebut. Pihak yang dimaksud dalam hal ini dapat berupa dapat berupa orang, organisasi maupun pemerintah. Beberapa subyek kajian yang menerapkan konsep permainan dinamis diantaranya adalah persaingan antar perusahaan, ilmu marketing, desain strategi perang, beberapa topik dalam manajemen sains (Haurie et al 2000).

Dalam makalah ini dibahas syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka dari suatu permainan dinamis linear kuadratik berkendala lunak berjumlah nol dengan struktur informasi lingkar terbuka untuk sistem deskriptor dengan mengasumsikan pemain pertama menggunakan strategi yang tetap untuk mengontrol sistem. Masalah ini merupakan kelanjutan dari Musthofa et al

(2013) yang mencari syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka pada kasus kedua pemain sama-sama menggunakan strategi yang berubah-ubah. Sebelumnya, Engwerda dan Salmah (2009) telah mengawali studi tentang penyelesaian permainan dinamis sistem dekriptor menggunakan transformasi permainan. Hal yang sama juga telah dilakukan oleh Engwerda dan Salmah (2012) untuk sistem informasi lingkar tertutup. Tetapnya kondisi strategi pada pemain pertama bukanlah suatu hal yang mengada-ada, akan tetapi hal ini banyak dijumpai dalam kasus dunia industri (Basar dan Bernhard 1995) maupun persaingan pemasaran antar perusahaan (Dockner et al 2000).

Sistem deskriptor adalah generalisasi dari sistem biasa (sistem nonsingular). Sistem ini memuat persamaan diferensial dan sekaligus persamaan aljabar. Banyak permasalahan yang disajikan dalam sistem ini, diantaranya adalah proses-proses kimia (Kumar dan Dauotidis 1996), sistem sirkuit listrik (Newcomb 1981, Newcomb dan Dziurla 1989), sistem ekonomi (Luenberger 1977), interkoneksi antar sistem berskala besar (Luenberger dan Arbel 1977, Singh dan Liu 1973), sistem pada teknik mesin (Hemami dan Wyman 1979), sistem pembangkit daya (Scott 1979) dan sistem robot (Mills dan Goldenberg 1989).

Makalah ini disajikan dengan runtutan alur sebagai berikut. Setelah pendahuluan, bagian kedua dari makalah ini menyajikan landasan teori yang berisi hasil-hasil dasar yang akan digunakan dalam pembahasan artikel ini. Bagian ini diakhiri dengan mendefinisikan keseimbangan titik pelana lingkar terbuka sebagai obyek utama dalam kajian ini. Selanjutnya bagian ketiga menampilkan transformasi permainan dari sistem deskriptor ke sistem nonsingular serta hasil yang telah diperoleh dalam kasus kedua pemain sama-sama menggunakan strategi yang berubah-ubah. Bagian keempat merupakan bagian inti dalam artikel ini. Bagian ini menyajikan kondisi khusus permainan dinamis ketika pemain pertama menggunakan strategi yang tetap untuk mengontrol sistem. Berikutnya, bagian terakhir adalah kesimpulan dan saran.

B. Landasan Teori

Diberikan permainan dinamis sistem deskriptor berkendala lunak berjumlah nol lingkar terbuka yang didefinisikan dengan sistem dinamik

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

dengan $E, A \in \mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}$, $\operatorname{rank}(E) = n$, $B_i \in \mathbb{R}^{(n+r)\times m_i}$. Vektor $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ menyatakan kendali yang digunakan oleh pemain ke-*i* untuk mengendalikan permainan, sedangkan vektor x_0 adalah state awal pada permainan. Setiap pemain berkeinginan untuk meminimalkan fungsi ongkos kuadratik J_γ yang berbentuk

$$J_\gamma(u_1,u_2) = \int_0^{t_f} \left\{ x^T(t)\bar{Q}x(t) + u_1^T(t)\bar{R}_1u_1(t) - \gamma u_2^T(t)\bar{R}_2u_2(t) \right\} dt + x^T(t_f)\bar{Q}_{t_f}x(t_f) \tag{2}$$

Pembahasan pada sesi ini akan diawali dengan memaparkan hasil-hasil dasar yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya. Pertama, akan dipaparkan konsep-konsep terkait dengan sistem persamaan deskriptor

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

dan keterkaitannya dengan pensil matriks

$$\lambda E - A. \tag{4}$$

Sistem (3) dan (4) dikatakan regular jika polinomial karakteristik $\det(\lambda E - A)$ tidak identik dengan nol. Selanjutnya, disajikan teorema bentuk kanonik Weierstrass yang bermanfaat untuk transformasi game (Gantmacher 1959).

Teorema 1.

Jika persamaan (4) *regular, maka terdapaat matriks-matriks nonsingular X dan Y sedemikian sehingga*

$$Y^T EX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \ dan \ Y^T AX = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix},$$

dengan J adalah matriks dalam bentuk Jordan dengan elemen-elemennya adalah nilai-nilai eigen berhingga, $I_k \in \mathrm{R}^{k\times k}$ *adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpotent yang juga berbentuk matriks Jordan. Matriks J dan N adalah tunggal terhadap permutasi blok-blok Jordan.*

Jika pensil matriks (4) regular, maka solusi dari persamaan deskriptor (3) berbentuk (Engwerda dan Salmah 2009, Gantmacher 1959)

$$x(t) = X_1 x_1(t) + X_2 x_2(t)$$

dengan $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} Y_1^T & Y_2^T \end{bmatrix}$, $X_1, Y_1^T \in \mathrm{R}^{(n+r)\times n}$, $X_2, Y_2^T \in \mathrm{R}^{(n+r)\times n}$, dan

$$x_1(t) = e^{Jt} x_1(0) + \int_0^t e^{J(s-t)} Y_1 f(s)\ ds$$

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X^{-1} x_0$$

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{k-1} N^i Y_2 \frac{d^i}{dt^i} f(t),$$

dengan kondisi syarat awal yang konsisten:

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} X^{-1} x_0 = -\sum_{i=0}^{k-1} N^i Y_2 \frac{d^i}{dt^i} f(0).$$

Bilangan *k* adalah derajat nilpotensi matriks *N*, yaitu bilangan bulat *k* sedemikian sehingga $N^k = 0$ dan $N^{k-1} \neq 0$. Indeks dari matriks pensil (4) dan sistem deskriptor (3) didefinisikan dengan bilangan *k* sebagai derajat kenilpotenan matriks *N*. Jika matriks *E* nonsingular, didefinisikan indeksnya adalah nol.

Lebih lanjut, dalam artikel ini diasumsikan derajat kenilpotenan matriks *N* lebih dari satu. Misalkan $\begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}$ adalah matriks orthogonal sedemikian sehingga prapeta dari *V* sama dengan prapeta dari E^T dan prapeta *W* sama dengan ruang nol dari matriks *E*.

Maka, $E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V & W \end{bmatrix}^T = E_1 V^T$, dengan E_1 matriks dengan rank kolom penuh. Dikarenakan diasumsikan bahwa sistem yang ditinjau mempunyai indeks paling banyak satu, maka dibuatlah asumsi-asumsi sebagai berikut. (Engwerda dan Salmah 2009).

Asumsi 1.
Dalam artikel ini sistem dinamik (1) *diasumsikan memenuhi hal-hal berikut:*
1. *matriks E singular*
2. $\det(\lambda E - A) \neq 0$
3. $rank\left(\begin{bmatrix} E & AW \end{bmatrix}\right) = n + r$ *(sistem mempunyai indeks satu, lihat* (Kautsky et al 1989)*).*

Selanjutnya, didefinisikan obyek utama yangdalam pembahasan artikel ini, yaitu keseimbangan titik pelana lingkar terbuka. (Engwerda dan Salmah 2009, Engwerda 2005).

Definisi 1.
Diberikan persamaan dinamik sistem deskriptor (1) *yang regular dan mempunyai indeks satu. Misalkan* x_0 *adalah nilai awal yang konsisten dan himpunan U menotasikan himpunan semua fungsi kontinu sepotong-sepotong dan terbatas. Maka, pasangan* $\left(u_1^*, u_2^*\right) \in U$ *disebut keseimbangan titik pelana lingkar terbuka jika untuk setiap pasangan* $\left(u_1, u_2^*\right), \left(u_1^*, u_2\right) \in U$*, berlaku*

$$J_\gamma\left(u_1^*, u_2\right) \leq J_\gamma\left(u_1^*, u_2^*\right) \leq J_\gamma\left(u_1, u_2^*\right).$$

C. Eksistensi Solusi

Pada bagian ini akan diselesaikan masalah mencari keseimbangan titik pelana lingkar terbuka untuk permainan dinamis sistem deskriptor (1) dan (2). Berbeda dengan metode yang dilakukan oleh (Xu dan Mizukami 1993, 1994a, 1994b), dalam artikel ini langkah untuk mencari keseimbangan titik pelana lingkar terbuka dilakukan dengan cara mentransformasikan permainan dinamis sistem deskriptor (1) dan (2) menjadi permainan dinamis sistem non-singular. Hal ini dilakukan sebagai berikut.

Diberikan permainan dinamis sistem deskriptor (1) dan (2) dengan asumsi t_f berhingga. Untuk menghindari tumpang tindihnya matriks-matriks yang terlibat, diasumsikan (Engwerda dan Salmah 2009) dan (Mehrmann et al 1991)

$$X^T \bar{Q}_{it_f} X = \begin{bmatrix} Q_{it_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; i = 1,2, \text{ dengan } Q_{it_f} \in \mathrm{R}^{n \times n}.$$

Memanfaatkan bektuk kanonik Weierstrass pada Teorema 1, didapat dua buah matriks nonsingular X dan Y sedemikian sehingga

$$Y^T EX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \text{ dan } Y^T AX = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dengan mendefinisikan variabel state yang baru $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := X^{-1}x(t)$ dengan $x_1(t) \in \mathbb{R}^n$ dan $x_2(t) \in \mathbb{R}^r$ maka permainan dinamis (1) dan (2) mempunyai keseimbangan titik pelana lingkar terbuka $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ jika dan hanya jika $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar terbuka untuk permainan dinamis yang didefinisikan pada

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Y^T B_1 u(t) + Y^T B_2 w(t), \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x_0$$

dengan fungsi ongkos untuk pemain pertama adalah

$$J_\gamma(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left[\begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix} X^T \bar{Q} X \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u_1^T(t) \bar{R}_1 u_1(t) - \gamma u_2^T(t) \bar{R}_2 u_2(t) \right] dt$$
$$+ x_1^T(t_f) Q_{t_f} x_1(t_f). \tag{6}$$

Berdasarkan persamaan (5) dihasilkan

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} Y^T \left(B_1 u(t) + B_2 w(t) \right) \\ &= -Y_2 \left(B_1 u(t) + B_2 w(t) \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Substitusikan persamaan (7) ke fungsi ongkos kuadratik (6) menghasilkan $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar terbuka untuk permainan dinamis (1) dan (2) jika dan hanya jika $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar terbuka untuk permainan dinamis

$$\dot{x}_1(t) = Jx_1(t) + Y_1 B_1 u_1(t) + Y_1 B_2 u_2(t), \quad x_1(0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X^{-1} x_0 \tag{8}$$

dengan fungsi ongkos untuk pemain pertama adalah

$$J_\gamma(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left\{ v^T(t) \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -B_1^T Y_2^T \\ 0 & -B_2^T Y_2^T \end{bmatrix} X^T \bar{Q} X \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -Y_2 B_1 & -Y_2 B_2 \end{bmatrix} v(t) \right.$$
$$\left. + u_1^T(t) \bar{R}_1 u_1(t) - \gamma u_2^T(t) \bar{R}_2 u_2(t) \right\} dt + x_1^T(t_f) Q_{t_f} x_1(t_f) \tag{9}$$
$$= \int_0^{t_f} \left\{ z^T(t) M_\gamma z(t) \right\} dt + x_1^T(t_f) Q_{t_f} x_1(t_f)$$

dengan $z^T(t)=\begin{bmatrix} x_1^T(t) & u_1^T(t) & u_2^T(t)\end{bmatrix}$ dan

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} Q & V & W \\ V^T & R_{\bar{1}\bar{1}} & N \\ W^T & N^T & R_{22\gamma} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Berikut adalah definisi matriks-matriks yang terlibat dalam persamaan (10)

$Q := X_1^T \bar{Q} X_I$, $\quad V := -X_1^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_1$, $\quad W := -X_1^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_2$,

$N := B_1^T Y_2^T X_2^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_2$, $\quad R_{11} := B_1^T Y_2^T X_2^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_1 + \bar{R}_1$, $\quad R_{\bar{2}\bar{2}\gamma} := B_2^T Y_2^T X_2^T \bar{Q} X_2 Y_2 B_2 - \gamma \bar{R}_2$.

Dengan demikian telah ditunjukkan ekuivalensi antara permainan dinamis sistem deskriptor (1) dan (2) dengan permainan dinamis sistem nonsingular (8) dan (9). Berdasarkan transformasi tersebut, Musthofa et al (2013) telah menurunkan syarat perlu dan cukup eksistensi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka bagi permainan dinamis (8) dan (9).

Teorema 2.

Diberikan permainan dinamis yang didefinisikan dengan sistem dinamik (8)*, dengan fungsi ongkos untuk pemain adalah* (9) *dan untuk pemain kedua adalah* $-J_\gamma(u_1,u_2)$*, dengan* $\bar{Q}$, Q_{t_f} dan $\bar{R}_i$, $i=1,2$ *adalah matriks-matriks simetri. Lebih lanjut, diasumsikan matriks-matriks* $\bar{R}_i, R_{\bar{i}\bar{i}}$ $i=1,2$ *definit positif. Maka, pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

i. *Untuk* $\gamma > \gamma^*$*, persamaan diferensial Riccati*

$$\dot{K}_2(t) = -J^T K_2(t) - K_2(t) J + \left(K_2(t) Y_1 B_2 + V_2\right) R_{22\gamma}^{-1} \left(B_2^T Y_1^T K_2(t) + V_2^T\right) + Q\ ; \quad K_2(T) = -Q_{t_f} \quad (11)$$

$$\dot{P}(t) = -\tilde{J}^T P(t) - P(t)\tilde{J} + P(t) B \hat{G}_\gamma^{-1} B^T P(t) - \hat{Q},\ P(t_f) = Q_{t_f} \quad (12)$$

tidak memiliki nilai konjugat pada interval $[0, t_f]$.

ii. *Untuk* $\gamma > \gamma^*$*, permainan dinamis* (8,9) *mempunyai solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka tunggal yang diberikan oleh persamaan*

$$\begin{bmatrix} u_1^*(t) \\ u_2^*(t) \end{bmatrix} = -\overline{IG}_\gamma^{-1}\left(\bar{Z} + \tilde{B}^T \bar{P}(t)\right) x_1(t). \quad (13)$$

dengan $x_1(t)$ *memenuhi persamaan transisi* (8).

iii. *Jika* $\gamma \le \gamma^*$*, maka nilai teratas permainan dinamis* (8,9) *tak terbatas untuk suatu* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*. Lebih lanjut, terdapat suatu* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *yang menyebabkan nilai teratas permainan tak terbatas pada* $\gamma = \gamma^*$.

D. Kondisi Tetap untuk Pemain Pertama

Bagian ini akan membahas kondisi khusus dari permainan dinamis (1,2) (yang ekuivalen dengan permainan dinamis (8,9)), yaitu ketika strategi pemain pertama tidak tergantung pada waktu (konstan/berbentuk *time invariant*). Secara matematis, hal ini dapat dinyatakan sebagai

$$u_1 = \mu(x_0), \text{ dengan } \mu : R^n \to R^{m_1}.$$

Notasikan Ξ_{TI} sebagai himpunan semua μ yang memenuhi definisi pemetaan di atas. Pemain kedua tetap menggunakan strategi $u_2 \in \mathrm{R}^{m_2}$. Akan ditunjukkan bahwa solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka bagi permainan dinamis dengan konstruksi seperti ini tetap dapat diturunkan dari solusi yang dihasilkan dari Teorema 2 di atas.

Pertama, dikarenakan u_1 konstan, maka derivatifnya terhadap waktu t adalah nol. Sehingga persamaan dinamik (8) dapat dimodifikasi hingga menghasilkan persamaan dinamik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Jx_1(t) + Y_1B_1\zeta(t) + Y_1B_2u_2(t), \quad & x_1(0) &= x_0 \\ \dot{\zeta}(t) &= 0, & \zeta(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{14}$$

Persamaan dinamik (14) di atas mendefinisikan permainan dinamis dengan pemain pertama hanya menjalankan strateginya pada waktu awal (yang diketahui bernilai x_0), sedangkan pemain kedua menjalankan strateginya pada keseluruhan interval waktu $\left[0, t_f\right]$. Hal ini berarti strategi yang dikakukan oleh kedua pemain pada dasarnya tidak saling berkaitan satu sama lain. Dengan demikian maka solusi dari permainan (14,9) dicari dengan pertama kali memaksimalkan fungsi ongkos terhadap variabel $u_2(t)$ pada interval waktu $\left[0, t_f\right]$ dengan kendala persamaan dinamik (14), dan kemudian meminimumkan fungsi ongkos dari hasil yang sudah dicapai (pada tahap memaksimumkan tadi) terhadap variabel $u_1 \in R^{m_1}$.

Solusi dari masalah memaksimumkan fungsi ongkos terhadap variabel $u_2(t)$ pada interval waktu $\left[0, t_f\right]$ dengan kendala persamaan dinamik (14) dapat dicari dan akan termuat dalam Teorema 2 di atas jika permainan dinamis (8,9) diganti dengan permainan dinamis yang didefinisikan pada persamaan dinamik

$$\dot{x}_1(t) = \hat{J}x_1(t) + \hat{D}u_2(t), \tag{15}$$

dengan fungsi ongkos bagi pemain pertama adalah

$$J_\gamma(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left\{ z^T(t)\hat{M}_{\gamma TI} z(t) \right\} dt + x_1^T(t_f)\hat{Q}_{t_f} x_1(t_f) \tag{16}$$

dengan
$$\hat{M}_{\gamma TI} = \begin{bmatrix} \hat{Q} & V & W \\ V^T & R_{\bar{1}\bar{1}} & N \\ W^T & N^T & R_{22\gamma} \end{bmatrix},$$

$\hat{J} := \begin{bmatrix} J & Y_1B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{Q} := \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $\hat{Q}_{t_f} := \begin{bmatrix} Q_{t_f} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\hat{D} := \begin{bmatrix} Y_1B_2 & 0 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, didefinisikan variabel dalam bentuk matriks

$$\tilde{K} := \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & S \end{bmatrix},$$

Maka dapat dibentuk persamaan diferensial Riccati yang bersesuaian dengan permainan dinamis (15,15) yaitu

$$\dot{K} = -J^T K - KJ - \gamma^{-2} KDD^T K; \quad K(t_t) = Q_{t_f} \tag{16}$$

yang mengkarakterisasi eksistensi solusi maksimum fungsi ongkos terhadap variabel $u_2(t)$ pada interval waktu $\left[0, t_f\right]$ dengan kendala persamaan dinamik (15). Sehingga berdasarkan Teorema 2, masalah maksimum tersebut mempunyai nilai yang terbatas jika $\gamma > \gamma^*$ dan hanya jika $\gamma \geq \gamma^*$. Berdasarkan persamaan (13), solusi maksimum tersebut diberikan oleh persamaan

$$u_2(t) = \gamma^{-2} \hat{D}(t) K(t) \left(\begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \right) = \gamma^{-2} \hat{D}(t) \left[K(t) x(t) + L(t) u_1 \right],$$

dengan nilai maksimum diberikan oleh persamaan

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix}^T K(0) \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} = x_0^T K(0) x_0 + 2x_0^T L(0) u_1 + u_1^T S(0) u_1. \tag{17}$$

Nilai maksimum (17) adalah fungsi yang konveks tegas terhadap u_1 karena $S(0) > 0$. Hal ini berakibat terdapatnya solusi minimum yang tunggal

$$u_1 = -S^{-1}(0) L^T(0) x_0,$$

dengan nilai minimal diberikan oleh

$$x_0^T \left[K(0) - L(0) S^{-1}(0) L^T(0) \right] x_0 =: x_0^T \hat{Y} x_0. \tag{18}$$

nilai minimal pada persamaan (18) dijamin merupakan bilangan non negatif dikarenakan $\tilde{K}(0) \geq 0$. Lebih lanjut, nilai $\hat{Y}$ pada persamaan (18) memenuhi $\hat{Y} \geq P$, dengan P adalah solusi dari persamaan diferensial Riccati (12). Hal ini dikarenakan, dibandingkan dengan permainan dinamis (8,9), pada permainan dinamis (15,16) ini pemain pertama tidak lebih diuntungkan daripada pemain kedua. Hasil-hasil di atas dapat disajikan dalam teorema berikut yang merupakan teorema utama dalam artikel ini.

Teorema 3.

Diberikan permaina dinamis sebagaimana didefinisikan dalam Teorema 2, tetapi dengan kondisi pemain pertama hanya mempunyai strategi yang konstan. Maka, hal-hal berikut ini bernilai ekuivalen.

i. *Untuk* $\gamma > \gamma^*$, *permainan dinamis* (15,16) *mempunyai solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka yang tunggal yang diberikan oleh persamaan*

$$u_1^*(t) = \tilde{\mu}(x_0) - -S^{-1}(0)L^T(0)x_0,$$

$$u_2^*(t) = \tilde{v}(t;x_0) = \gamma^{-2}\hat{D}^T(t)\left[K(t)\tilde{x}(t) + L(t)S^{-1}(0)L^T(0)x_0\right]$$

dengan $\tilde{x}_{[0,t_f]}$ *adalah state trayektori yang dibangun oleh persamaan diferensial*

$$\dot{\tilde{x}} = \left(J - \gamma^{-2}DD^TK(t)\right)\tilde{x} - \left(Y_1B_1B_1^TY_1^T + \gamma^{-2}DD^TL(t)\right)S^{-1}(0)L^T(0)x_0$$

dengan syarat awal $\tilde{x}(0) = x_0$.

ii. *Untuk* $\gamma > \gamma^*$ *nilai permainan dinamis* (15,16) *diberikan oleh persamaan* (18).

iii. *Untuk* $\gamma \le \gamma^*$, *nilai teratas permainan dinamis* (15,16) *tak terbatas untuk suatu* $x_0 \in \mathrm{R}^n$. *Lebih lanjut, terdapat suatu* $x_0 \in \mathrm{R}^n$ *yang menyebabkan nilai teratas permainan tak terbatas pada* $\gamma = \gamma^*$.

E. Kesimpulan dan Saran

Dalam makalah ini telah disajikan teorema yang menyatakan syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar terbuka dari suatu permainan dinamis linear kuadratik berkendala lunak berjumlah nol dengan struktur informasi lingkar terbuka untuk sistem deskriptor dengan kondisi pemain pertama menggunakan strategi yang tetap untuk mengontrol sistem. Telah ditunjukkan pula bentuk strategi optimal untuk masing-masing pemain, juga trayektori optimal yang dibangunnya.

Meskipun demikian, perumusan syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana di atas masih terbatas untuk sistem deskriptor yang berindeks satu dan dengan interval waktu yang berhingga. Sehingga mengkonstruksikan syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana untuk permainan dinamis sistem deskriptor dengan indeks tinggi dan untuk waktu yang takberhingga masih merupakan masalah terbuka yang dapat diteliti lebih lanjut.

Daftar Pustaka

Basar, T. dan Bernhard, P. 1995. *Optimal Control and Related Minimax Design Problems*, Boston: Birkhauser.

Dockner, E. J., Jorgensen, S., Long, N. V., dan Sorger, G. 2000. *Differential Game in Economic and Management Science*, Cambridge: Cambridge University Press.

Engwerda, J.C., (2005) *Linear Quadratic Dynamic Optimization and Differential Games*. West Sussex: John Wiley & Sons.

Engwerda, J.C. dan Salmah. 2009. The Open-Loop Linear Quadratic Differential Game for Index One Descriptor Systems, *Automatica*, **45**, 585-592.

Engwerda, J.C. dan Salmah, 2012. Feedback Nash Equilibria for Linear Quadratic Descriptor Differential Games, *Automatica*, **48**, 625-631.

Gantmacher, F. 1959. *Theory of Matrices*. vol II. New York: Chelsea Publishing Company.

Haurie, A., Krawczyk, J. dan Zaccour, G. 2012. *Games and Dynamic Games*, Vol. 1, Singapore: World Scientific Publishing Company.

Hemami, H. dan Wyman, B. F., 1979. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **24**, 526-535.

Kautsky, J., Nicholas, N. K., dan Chu, E.K-W. 1989 . Robust pole assignment in singular control systems, Linear Algebra and its Applications, **121**, 9-37.

Kumar, A. dan Daoutidis, P, 1996. State-Space Realizations of Linear Differential Algebraic-Equation Systems with Control-Dependent State Space, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, 269-274.

Luenberger, D. G., 1977. Dynamic Equation in Descriptor Form, *IEEE Transaction on Automatic Control*, **22**, 312-321.

Luenberger, D. G. dan Arbel. 1977. *Singular Dynamic Leontief Systems*, 991-995.

Mehrmann, V. L. , Thoma, M., dan Wyner, A. 1991. *The Autonomous Linear Quadratic Control Problems*, Berlin: Springer-Verlag.

Mills, J. K. dan Goldenber, A. A., 1989. Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks, *IEEE Transactions on Robot Automatic*, **5**, 30-46.

Musthofa, M. W., Salmah, Engwerda, J. C., dan Suparwanto, A. 2013. Robust Optimal Control Design Using A Differential Game Approach for Open-Loop Linear Quadratic Descriptor Systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, DOI 10.1007/s10957-015-0750-8, 1-19.

Newcomb, R. W., 1981. The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits", *IEEE Transactions on Circuits Systems*, **28**, 62-71.

Newcomb, R. W. dan Dziurla, B. 1989. Some Circuits and Systems Applications of Semistate Theory, *Circuits Systems Signal Processes*, **8**, 235-260.

Scott, B., 1979. Power system Dynamic Response Calculations, *IEEE Proceeding*, **67**, 219-247.

Singh, S. dan Liu, R. W., 1973. Existence of State Equation Representation of Linear Large-Scale Dynamical Systems, *IEEE Transaction Circuits Systems*, **20**, 239-246.

Xu, H. dan Mizukami, K. 1993. Two-person two-criteria decision making problem for descriptor systems, *JOTA* **39**, 163 – 173.

Xu, H. dan Mizukami, K. 1994a. Linear-quadratic zero-sum differential games for generalized state space systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**.

Xu, H. dan Mizukami, K. 1994b. On the isaacs equation of differential games for descriptor systems, *JOTA* **83**.