

**ASPEK TOPOLOGIS DAN STRUKTUR KAUSAL
RUANGWAKTU DALAM TEORI RELATIVITAS
EINSTEIN**

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Fisika



Diajukan Oleh
HARI TAQWAN SANTOSO
11620017

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA
2016**



PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/220/2206/2016

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Aspek Topologis dan Struktur Kausal Ruangwaktu dalam Teori Relativitas Einstein

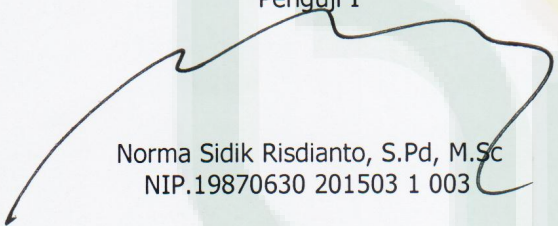
Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Hari Taqwan Santoso
NIM : 11620017
Telah dimunaqasyahkan pada : 2 Juni 2016
Nilai Munaqasyah : A
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

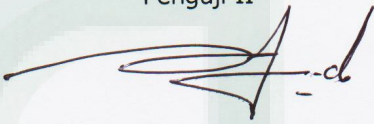
Ketua Sidang


Dr. rer.nat. M. Farchani Rosyid
NIP. 19611217989031003

Penguji I


Norma Sidik Risdianto, S.Pd, M.Sc
NIP.19870630 201503 1 003

Penguji II


Cecilia Yanuarief, M.Si
NIP. 19840127 201503 1 001

Yogyakarta, 9 Juni 2016

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan




Dr. Hj. Maizer Said Nahdi, M.Si
NIP. 19550427 198403 2 001

HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI / TUGAS AKHIR

Hal : ...

Lamp : ...

Kepada :

Yth. Ketua Program Studi Fisika

Fakultas Saintek UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di tempat

Assalaamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : HARI TAQWAN SANTOSO

NIM : FISIKA / X

Judul Skripsi : ASPEK TOPOLOGIS DAN STRUKTUR KAUSAL

RUANGWAKTU DALAM TEORI RELATIVITAS

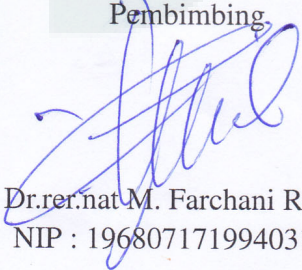
EINSTEIN

sudah dapat diujikan dalam sidang munaqosyah. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalaamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 19 Mei 2016

Pembimbing,


Dr. rer. nat M. Farchani Rosyid
NIP : 196807171994031005

PERYATAAN BEBAS PLAGIARISME

Saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul "Aspek Topologis dan Struktur Kausal Ruangwaktu dalam Teori Relativitas Einstein" yang saya susun sebagai syarat memperoleh gelar sarjana ini merupakan hasil karya tulis saya sendiri. Adapun bagian - bagian tertentu dalam skripsi ini, yang saya kutip dari hasil karya orang lain, telah dituliskan sumbernya secara jelas sesuai dengan norma, kaidah serta etika penulisan ilmiah. Saya bersedia menerima sanksi pencabutan gelar akademik yang saya peroleh dan sanksi - sanksi lain sesuai dengan aturan yang berlaku apabila dikemudian hari ditemukan adanya plagiarasi.

Yogyakarta, 19 Mei 2016



Hari Taqwan Santoso

11620017

MOTTO

Sinamun ing samudana sesadon ingadu manis...

Lila lamun kelangan nora gegetun...

Bungah ingaran cubluk, sukeng tyas yen den ina.

(Serat Wedhatama)

مَا نَفَعَ الْقَلْبَ شَيْءٌ مِثْلُ عَزَلَةٍ يَدْخُلُ بِهَا مِيزَانُ فِكْرَةٍ
مِنْ عَلَامَاتِ النِّجَاحِ فِي النِّهَايَاتِ الرَّجُوعِ إِلَى اللَّهِ فِي الْبَدَايَاتِ

(Ibnu 'Atha-illah Al-Iskandariyah)

تَرْجُو النِّجَةَ وَلَمْ تَسْلُكْ مَسَالِكَهَا
إِنَّ السَّفِينَةَ لَمْ تَجْرَ عَلَى الْيَبْسِ

(Anonim)

Sejatinya cinta, baik dari langit maupun bumi

Semuanya menunjuk pada Allah semata...

Wahai kawanku, bagaimana engkau bisa menjadi bijak?

Sementara yang relatif terus engkau puja.

(Jalaluddin Ar-Rumi)

KATA PENGANTAR

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على نبينا محمد و على اله واصحابه أجمعين
و بعد.
اللهم اني أسألك علما نافعا، ورزقا حلالا طيبا، وعملا متقبلا.
آمين...

Puji syukur kepada Allah SWT, karena berkat rahmat-Nya tugas akhir dengan judul "Aspek Topologis dan Struktur Kausal Ruangwaktu dalam Teori Relativitas Einstein" ini dapat penulis selesaikan.

Penulis secara khusus mempersembahkan tugas akhir ini kepada kedua orang tua penulis, terlebih khusus lagi bapak sebagai satu - satunya pihak yang membiayai kuliah penulis. Salah satu bentuk bakti penulis pada beliau tertuang dalam wujud tugas akhir ini. Selebihnya, tugas akhir ini menjadi salah satu bukti bagi upaya keras penulis untuk memperbaiki pemahaman mengenai cara kerja alam semesta. Penulis sangat berharap pemahaman yang semakin baik dapat menambah keimanan hingga mampu membuat penulis mengucapkan

رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلًا شُبْحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ

dari lubuk hati yang paling dalam, sebagaimana telah diperintahkan secara tersirat dalam *Q.S. Ali Imran, 3 : 191*.

Penulis tentunya juga tidak dapat menuntaskan tugas akhir ini seorang diri. Oleh sebab itu, penulis tak lupa untuk mengucapkan beribu terima kasih kepada :

1. Dr.rer.nat M. Farchani Rosyid selaku pembimbing penulis. Semenjak penulis masih duduk di bangku kuliah tahun pertama hingga hari ini, beliau menjadi satu - satunya "guru" fisika dan matematika bagi penulis.
2. Bapak Cecilia Yanuarief, M. Si. dan bapak Norma Sidik Risdianto, S. Pd., M. Sc. selaku penguji tugas akhir ini. Penulis yakin bahwa beliau berdua

telah meluangkan waktu lama, pikiran fokus dan tenaga yang tidak sedikit dengan penuh kesabaran serta ketelatenan untuk membetulkan tugas akhir ini sehingga layak untuk dijadikan prasyarat kelulusan.

3. Teman - teman anggota Kelompok Penelitian Kosmologi, Astrofisika dan Matematika (KAM), khususnya "bos" Yusuf, Henokh, mas Muklis dan Arandi yang memberi banyak informasi berharga kepada penulis terkait perangkat lunak LaTeX.
4. Bapak dan Ibu dosen Prodi Fisika UIN Sunan Kalijaga.
5. Teman - teman Prodi Fisika UIN Sunan Kalijaga (Huda, Khodijah, Agung Dwi, dan lainnya) serta
6. Semua pihak belum disebutkan tetapi terlibat dalam proses penulisan tugas akhir ini.

Akhir kata, besar harapan penulis agar tulisan ini memberikan banyak manfaat bagi semua pihak dalam bentuk apapun baik di dunia maupun di akhirat kelak. Penulis juga menyadari bahwa tidak ada gading yang tak retak, karena itu atas segala kekurangan dalam tulisan ini penulis memohon maaf.

Yogyakarta, 22 Mei 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	v
HALAMAN PERSETUJUAN PEMBIMBING	v
HALAMAN BEBAS PLAGIARISME	v
HALAMAN MOTTO	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	xi
INTISARI	xii
ABSTRACT	xiii
BAB I	
PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	3
1.6 Tinjauan Pustaka	4
1.7 Metode Penelitian	5
BAB II	
RUANG TOPOLOGIS	
2.1 Hakekat Topologi	8
2.2 Lingkungan	9
2.3 Ruang Hausdorff	11
2.4 Basis Topologi	11

2.5	Pemetaan Malar	12
2.6	Metrik dan Topologi Metrik	13
2.7	Ketersambungan dan Kekompakan	14
2.8	Sekatan Kesatuan (<i>Partition of Unity</i>)	20

BAB III

GEOMETRI DIFERENSIAL

3.1	Keragaman Diferensiabel	22
3.2	Pemetaan Antar Keragaman	24
3.3	Ruang Singgung dan Ruang Pendamping	25
3.4	Tensor	28
3.5	Medan Tensor	32
3.6	Turunan Lie	38
3.7	Forma Diferensial	40
3.8	Teorema Frobenius	43
3.9	Orientabilitas	46
3.10	Integrasi pada Keragaman	47
3.11	Koneksi	50
3.12	Geodesik	52
3.13	Kelengkungan	56

BAB IV

KERAGAMAN SEMI-RIEMANNAN

4.1	Metrik	59
4.2	Koneksi Levi-Civita	62
4.3	Kelengkungan dengan Metrik	65
4.4	Integrasi pada Keragaman Semi-riemannan	67

BAB V

TEORI RELATIVITAS UMUM

5.1	Struktur Ruangwaktu dalam Teori Relativitas Khusus	68
5.2	Dasar - Dasar Teori Relativitas Umum	70
5.3	Persamaan Medan Einstein dan Maknanya	72
5.4	Ruangwaktu sebagai Keragaman Lorentzan	74

BAB VI

STRUKTUR KAUSAL RUANG-WAKTU

6.1	Orientabilitas Waktu	76
6.2	Kausalitas dan Kronologi	77
6.3	Kurva - Kurva Kausal	81
6.4	Tapal Batas Akronal	83
6.5	Syarat - Syarat Kausalitas	86
6.6	Kemalaran Kausal	95
6.7	Kesederhanaan Kausal	99
6.8	Daerah Kegayutan (Pengembangan Cauchy)	100
6.9	Sifat Hiperbolis Global	110
6.10	Pengantar Singularitas dan Masalah Cauchy dalam Teori Relativitas Umum	113
6.10.1	Singularitas	113
6.10.2	Masalah Cauchy dalam Relativitas Umum	115

BAB VII

PENUTUP

7.1	Simpulan	117
7.2	Saran	120

LAMPIRAN I

A.1 Perumusan Secara Intuitif	126
A.2 Perumusan Lagrangian PME	132

LAMPIRAN II

B.1 Pembelahan vektor dan koneksi	138
B.2 Pembelahan Tensor Kelengkungan	141

PENJURUS	146
---------------------------	-----

CURRICULUM VITAE	146
-----------------------------------	-----

INTISARI

ASPEK TOPOLOGIS DAN STRUKTUR KAUSAL RUANGWAKTU DALAM TEORI RELATIVITAS EINSTEIN

HARI TAQWAN SANTOSO

11620017

Telah dilakukan pemodelan kembali ruangwaktu secara geometris berdasarkan watak kausalitas relativistik. Model ruangwaktu yang digunakan adalah keragaman lorentzian berdimensi empat yang Hausdorff, tersambung dan parakompak. Model tersebut menuntut sebuah praanggapan, yakni tidak boleh ada kurva bakwaktu tertutup secara lokal untuk menghindari paradoks perjalanan menembus waktu. Ditunjukkan pula bahwa ruangwaktu yang konsisten secara logis dengan praanggapan tersebut mempunyai beberapa tingkatan kausalitas, mulai dari yang paling rendah (memenuhi syarat kronologis) hingga yang paling tinggi (bersifat hiperbolis secara global).

Kata kunci : topologi ruangwaktu, keragaman lorentzan, struktur kausal, hiperbolisitas global

ABSTRACT

TOPOLOGICAL ASPECT AND CAUSAL STRUCTURE OF SPACETIME IN EINSTEIN'S THEORY OF RELATIVITY

HARI TAQWAN SANTOSO

11620017

We have reconstructed a model of geometrical spacetime based on its relativistic causality character. The spacetime model that being reconstructed is a Hausdorff, connected and paracompact four dimensional Lorentzian manifold. The model demands an assumption, that there is no local closed timelike curve to avoid the time travel paradox. It is shown that a spacetime which logically consistent to such assumption has a causal hierarchy, from the lowest (i.e. satisfy the chronologically condition) to the highest one (i. e. globally hyperbolic).

Keywords : spacetime topology, Lorentzian manifold, causal structure, global hyperbolicity

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam teori relativitas, keserentakan (*simultanety*) tidak berlaku secara universal. Yakni tidak berlaku sama bagi setiap pengamat sebagaimana keyakinan yang telah mendarah daging dalam fisika klasik. Untuk suatu wilayah tertentu U dalam ruangwaktu, misalnya, peristiwa - peristiwa yang dapat dipengaruhi oleh U ditentukan oleh bisa-tidaknya sinyal cahaya melintasi ruangwaktu yang bersangkutan dan menghubungkan U dengan dengan peristiwa - peristiwa tersebut. Karena itu, meskipun agak menyimpang dari pengertian formalnya, lintasan cahaya ini kemudian disebut kurva bakcahaya.

Materi (benda bermassa) tidak dapat bergerak dengan kecepatan cahaya sebagai konsekuensi teori relativitas. Maka gerak materi dalam ruangwaktu membentuk kurva lain, yakni kurva bakwaktu. Serupa dengan sifat kurva sebelumnya, keberadaan kurva ini menunjukkan kemungkinan pengaruh materi di suatu titik (atau wilayah) tertentu pada ruangwaktu bagi peristiwa - peristiwa di wilayah lain dalam ruangwaktu itu.

Di sisi lain, kendati terdapat beberapa fisikawan teoretik yang mempunyai gagasan bahwa ruangwaktu bersifat diskrit, agaknya praanggapan ruangwaktu yang bersifat malar masih dapat dipertahankan. Ini menimbulkan kemungkinan untuk melabeli peristiwa - peristiwa dalam ruangwaktu (setidaknya secara lokal) dengan sekumpulan bilangan riil. Tujuan dipilihnya bilangan riil sebagai model bagi ruangwaktu adalah untuk membangun kalkulus pada ruangwaktu tersebut, sedemikian rupa sehingga hukum - hukum fisika dapat dirumuskan sebagai seperangkat persamaan differensial. Model matematis yang dimaksud adalah ruang topologis

dengan syarat - syarat tertentu, misalnya ruang Husdorff, tersambung serta memuat metrik lorentzian di dalamnya (Budhi, 2005).

Selain itu, dalam model ruangwaktu ini dapat dibangun struktur yang akan diberi nama "struktur kausal". Struktur ini tidak lain adalah relasi urutan yang didefinisikan berdasarkan pengertian kurva - kurva bakcahaya maupun bakwaktu secara formal (Sen, 2010).

Secara lebih umum, dapat disimpulkan bahwa dengan memahami struktur kausal ruangwaktu waktu orang dapat memahami salah satu watak penting ruangwaktu tersebut. Yakni apakah model yang dibicarakan mampu menjadi kandidat yang "baik" bagi ruangwaktu riil serta konsisten dengan hasil - hasil pengamatan atau tidak. Karena itulah, kiranya struktur kausal ruangwaktu menjadi pokok bahasan yang sangat diperlukan dalam fisika matematika untuk teori relativitas dan semua topik yang berkaitan dengannya.

Kendati penting, sejauh pengamatan penulis penelitian dengan tema "struktur kausal ruangwaktu" relatif sedikit. Penelitian yang hendak penulis lakukan bukan jenis penelitian yang menghasilkan penemuan baru melainkan studi pustaka belaka. Penulis sekadar memahami, merangkum lalu menjelaskan kembali konsep - konsep yang berkaitan dengan struktur kausal ruangwaktu disertai beberapa implikasinya teori relativitas dan kosmologi.

1.2 Rumusan Masalah

Perumusan masalah dalam penelitian ini dapat diwakilkan pada pertanyaan - pertanyaan berikut :

1. Bagaimana merumuskan ruang topologis sebagai model bagi ruangwaktu dan bagaimana sifat - sifatnya?
2. Bagaimana merumuskan struktur kausal dalam ruangwaktu tersebut?

3. Apakah yang dimaksud dengan ruangwaktu yang hiperbolis secara global, dan sifat - sifat apa saja yang dimiliki olehnya?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini membutuhkan perangkat matematis berupa Topologi dan Geometri Diferensial. Keduanya merupakan bidang kajian yang sangat luas, sehingga penggunaannya dalam menyelesaikan masalah yang telah disampaikan perlu dibatasi. Lebih khusus, batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Ruang topologis yang digunakan di sini adalah juga keragaman real berdimensi sembarang namun berhingga.
2. Topologi yang digunakan dalam penelitian ini dibatasi pada topologi alamiah (topologi metrik).

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah :

1. Memperoleh perumusan model matematis-topologis bagi ruangwaktu beserta penjelasan sifat - sifatnya.
2. Memperoleh perumusan struktur kausal pada model tersebut.
3. Memahami pengertian ruangwaktu yang hiperbolis secara global beserta bu-
nga rampainya.

1.5 Manfaat Penelitian

Struktur kausal ruangwaktu berkaitan erat dengan singularitas dan masalah Cauchy dalam relativitas umum. Perumusan struktur kausal ruangwaktu menyediakan jalan bagi kajian lanjutan, yakni kedua bidang tersebut.

1.6 Tinjauan Pustaka

Sebelum teori relativitas lahir, dalam disiplin ilmu fisika terdapat keyakinan yang mendarah daging tentang ruang dan waktu. Newton, misalnya, yakin bahwa ruang terpisah dari waktu dan tidak gayut pada fenomena fisik. Waktu sendiri dipandang sebagai "sesuatu yang bersifat mutlak, mengalir dengan sendirinya tanpa kaitan dengan sesuatu di luarnya". Dengan kata lain, waktu dianggap "ada dengan sendirinya" tanpa membutuhkan gawai acuan untuk mengukurnya.

Tahun 1905, Einstein menerbitkan papernya yang berjudul "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*". Salah satu gagasan yang disampaikan dalam paper ini adalah bahwa ruang dan waktu bersifat relatif. Kesan mengenai sesuatu yang disebut "ruang" dan "waktu" tidak akan ada tanpa pengamat. Di samping itu keduanya merupakan pengejawantahan satu wujud tunggal yakni ruangwaktu.

Gagasan ini kemudian mengubah cara pandang sebagian besar orang, khususnya fisikawan, tentang ruang dan waktu. Oleh karena kesan tentang ruangwaktu berubah, kesan tentang kausalitas pun turut berubah.

Einstein memperumum gagasannya itu dalam paper yang terbit pada 1915 dengan judul "*Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*". Ruang dan waktu tidak hanya dipandang sebagai entitas yang gayut terhadap keberadaan pengamat, tetapi juga sebagai obyek geometris yang kelengkungannya ditentukan oleh agihan massa-energi.

Melalui geometri ruang lengkung yang diciptakan oleh Gauß, Lobachevsky, Riemann dll. pada periode sebelumnya, telaah ruangwaktu dari sisi geometris menjadi mungkin. Salah satu telaah geometris ruangwaktu tersebut adalah telaah tentang struktur kausal yang dimilikinya.

Berkaitan dengan struktur kausal ruangwaktu, Robert Geroch menerbitkan beberapa paper. Khususnya pada 1970, papernya yang berjudul "*Domain of Dependence*" membahas kegayutan suatu titik p dalam ruangwaktu terhadap suatu wilayah

S secara lengkap dan tunggal (Geroch, 1970). Selain itu, Geroch juga membuktikan bahwa ruangwaktu yang hiperbolis secara global dapat bersifat homeomorfis dengan $S \times \mathbb{R}$, dengan S suatu permukaan Cauchy dalam ruangwaktu tersebut.

Tahun 1972, dalam buku kuliah singkat yang berjudul "*Techniques of Differential Topology in Relativity*" (Penrose, 1972), Roger Penrose mengulas sisi topologis ruangwaktu berdasarkan sudut pandang teori relativitas.

Tahun berikutnya, Stephen Hawking bersama George Ellis menerbitkan buku berjudul "*The Large Scale Structure of Space-time*". Bab 6 buku tersebut mengulas struktur kausal dalam ruangwaktu relativistik. Kendati tidak lebih lengkap dari (Penrose, 1972), tetapi bahasa ulasan yang digunakan dalam buku tersebut lebih ensiklopedik dan lebih banyak menggunakan landasan fisis alih-alih formal matematis.

John Beem dan Paul Ehrlich dalam bukunya yang terbit pada 1996 berjudul "*Global Lorentzian Geometry*" (edisi kedua) mengupas tuntas masalah telaah ruangwaktu secara global. Dalam buku tersebut, masalah struktur kausal juga dibahas. Selain itu, beberapa penelitian relatif baru, misalnya hasil kerja Miguel Sánchez yang membuktikan bahwa homeomorfisma ruangwaktu yang hiperbolis secara global dapat dibawa ke tatar yang lebih tinggi, yakni difeomorfisma. Beberapa paper yang dihasilkan keduanya antara lain (Sánchez, 2005) dan (Sánchez, 2010).

Penelitian ini dimaksudkan untuk mengulas sisi topologis dan struktur kausal ruangwaktu berdasarkan ketiga sumber yang telah dipaparkan.

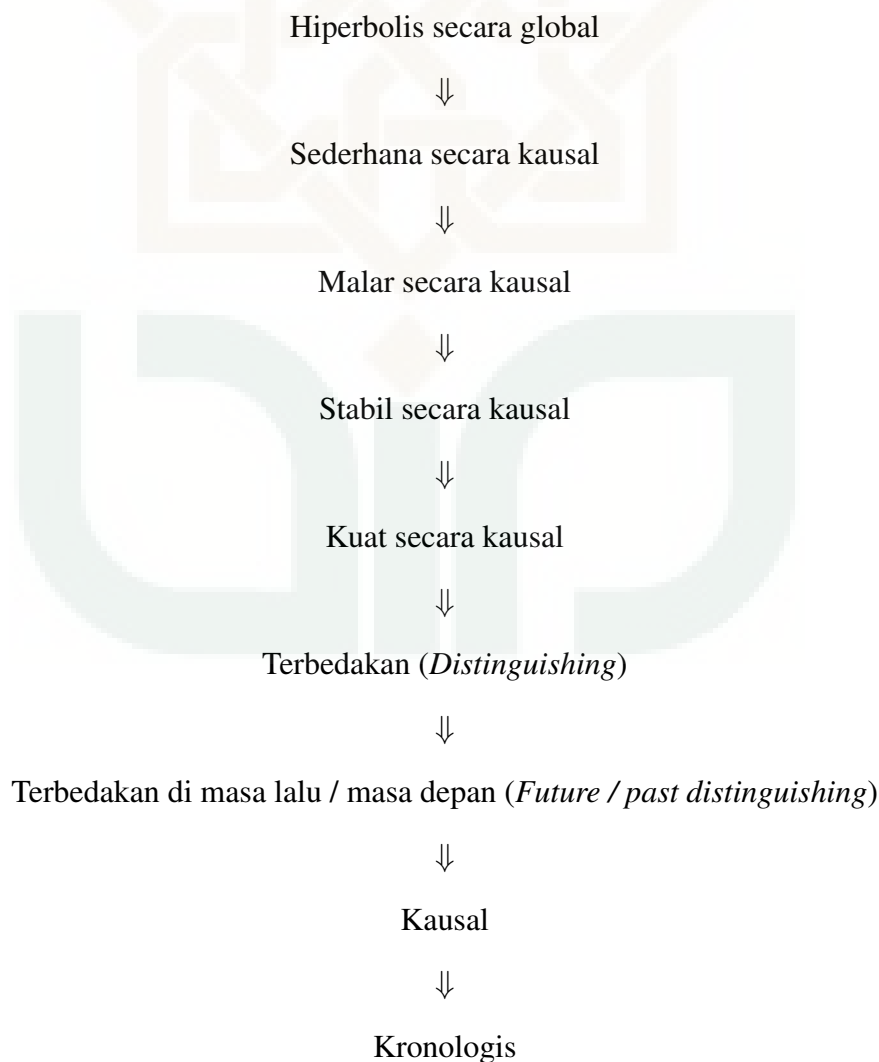
1.7 Metode Penelitian

Metode penelitian yang hendak digunakan adalah metode kajian teoretis dan matematis. Untuk melakukan pemodelan ruangwaktu dan pemberian struktur kausal di dalamnya dibutuhkan perangkat matematis berupa Topologi dan Geometri Diferensial. Dengan demikian, penelitian ini akan diawali dengan membahas to-

pologi beserta bunga rampainya secara ringkas. Pembahasan serupa juga akan dilakukan untuk Geometri Diferensial. Dilanjutkan dengan menjelaskan perbedaan struktur kausal dalam sudut pandang fisika klasik dan teori relativitas.

Langkah selanjutnya adalah merumuskan model bagi ruangwaktu dengan ruang topologis sebagai kandidat serta mendefinisikan sifat - sifat yang diperlukan model terkait struktur kausal, agar model konsisten dengan logika. Dengan kata lain, penelitian ini murni matematis dan hanya melibatkan praanggapan - praanggapan logis semata, nyaris tanpa melibatkan hasil - hasil pengamatan.

Adapun struktur kausal ruangwaktu yang hendak dikaji mempunyai beberapa tingkatan sebagai berikut :



Tingkatan - tingkatan di atas menyatakan kualitas struktur kausal ruangwaktu. Tingkatan paling bawah menyatakan ruangwaktu dengan syarat paling longgar. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan bahwa semakin ke atas, syarat yang diberlakukan bagi model ruangwaktu semakin ketat.



BAB VII

PENUTUP

Sebagaimana lazimnya tugas akhir, pokok bahasan pada bab ini ada dua, yakni simpulan yang dapat ditarik dari penelitian ini dan saran untuk penelitian selanjutnya.

7.1 Simpulan

1. Salah satu objek yang dapat digunakan untuk memodelkan ruangwaktu adalah himpunan titik - titik peristiwa yang berdimensi empat. Himpunan ini dianggap mempunyai struktur mulus dan memuat struktur metrik lorentzan di dalamnya. Dengan kata lain, ruangwaktu dimodelkan sebagai keragaman semi-riemannan berdimensi empat (Q, g) dengan metrik g bersignatur $(-+++)$.

Secara topologis Q berupa ruang tersambung, Hausdorff dan parakompak. (Q, g) perlu disyaratkan maksimal dalam arti tidak isometris dengan subhimpunan ruangwaktu lain. Selain itu, jika terdapat $(P, \bar{g})$ dan difeomorfisma $\Phi : Q \rightarrow P$ yang mengimbas Φ^* sedemikian rupa sehingga $\Phi^*g = \bar{g}$ dipenuhi, maka kedua model dianggap setara. Jadi untuk suatu isometri model ruangwaktu, pengambilan salah satu anggotanya untuk ditelaah sudah mencukupi.

Materi dan tenaga yang menjadi isi (*content*) alam semesta, dalam teori relativitas umum dipandang sebagai medan - medan tensor pada keragaman ruangwaktu. Terdapat tiga postulat yang hendak diberlakukan bagi materi dan tenaga ini, yaitu bahwa materi dan tenaga tersebut harus mematuhi kausalitas lokal, mematuhi kelestarian tenaga-momentum (secara lokal) serta mematuhi

dinamika yang digambarkan secara matematis oleh persamaan medan Einstein.

2. Keberadaan metrik lorentzian setara dengan keberadaan kerucut cahaya yang didefinisikan pada ruang singgung di setiap titik $p \in \mathcal{Q}$. Penyematan setiap titik dalam ruangwaktu dengan satu kerucut cahaya masa depan secara malar disebut struktur kausal bagi ruangwaktu tersebut.

3. Kausalitas ruangwaktu mempunyai banyak tingkatan. Tingkatan - tingkatan tersebut (dari ruangwaktu yang paling khusus ke yang paling umum), dinyatakan sebagai berikut :

Hiperbolis secara global $\Rightarrow$ Sederhana secara kausal $\Rightarrow$ Malar secara kausal $\Rightarrow$ Stabil secara kausal $\Rightarrow$ Memenuhi syarat kausalitas kuat $\Rightarrow$ Memenuhi syarat keterbedaan $\Rightarrow$ Memenuhi syarat keterbedaan masa lalu / masa depan $\Rightarrow$ Memenuhi syarat kausal $\Rightarrow$ Memenuhi syarat kronologi.

Telah dibuktikan bahwa arah panah - panah di atas tidak dapat dibalik, sebab ruangwaktu yang berada di sebelah kanan anak panah lebih umum dari ruangwaktu yang berada di sebelah kirinya. Adapun masing - masing tingkatan di atas dapat dijelaskan sebagai berikut :

- (a) Terpenuhi syarat kronologi (kausal) pada suatu ruangwaktu berarti ketiadaan kurva bakwaktu (kausal) tertutup pada ruangwaktu tersebut.
- (b) Terpenuhi syarat keterbedaan masa depan pada suatu ruangwaktu $\mathcal{Q}$ berarti tidak ada dua titik yang berlainan $p, q \in \mathcal{Q}$ sedemikian rupa sehingga $\mathcal{I}^+(p) = \mathcal{I}^+(q)$. Pengertian syarat keterbedaan masa lalu dan syarat keterbedaan mengikuti secara langsung.
- (c) Terpenuhi syarat kausalitas kuat di titik $q \in \mathcal{Q}$ berarti jika tidak ada lingkungan $U \ni q$ sedemikian rupa sehingga kurva kausal γ mengiris

U dua kali atau lebih. Suatu ruangwaktu yang tidak memenuhi syarat kausalitas kuat boleh jadi tidak memuat kurva kausal tertutup, akan tetapi variasi kecil pada metrik dapat menimbulkan kurva semacam ini.

(d) Terpenuhiya syarat kausalitas stabil pada ruangwaktu $\mathcal{Q}$ berarti bahwa pelebaran kerucut cahaya di sembarang titik $q \in \mathcal{Q}$ tidak menghasilkan kurva kausal tertutup. Pelebaran yang dimaksud berkaitan dengan variasi metrik lorentzian pada $\mathcal{Q}$.

(e) Terpenuhiya syarat kemalaran kausal pada ruangwaktu $\mathcal{Q}$ berarti $\mathcal{Q}$ memenuhi syarat keterbedaan serta $\mathcal{I}^+$ dan $\mathcal{I}^-$ adalah fungsi - fungsi malar bernilai himpunan pada $\mathcal{Q}$. Syarat kemalaran suatu ruangwaktu setara dengan syarat pencerminan ruangwaktu itu, pun juga setara dengan keberadaan fungsi waktu global (teorema (6.4)). Jika syarat ini tidak dipenuhi oleh $\mathcal{Q}$, boleh jadi banyaknya informasi fisis yang dapat dikirim dari satu titik ke titik lain di $\mathcal{Q}$ berubah secara tidak mulus.

(f) Terpenuhiya syarat kesederhanaan kausal dalam ruangwaktu $\mathcal{Q}$ berarti syarat keterbedaan terpenuhi di $\mathcal{Q}$ dan untuk sembarang $p \in \mathcal{Q}$ berlaku $\mathcal{J}^+(p)$ serta $\mathcal{J}^-(p)$ tertutup.

4. Konsepsi kausalitas dalam teori relativitas umum masih menyertakan gagasan determinisme. Akibatnya muncul konsep daerah kegayutan. Daerah kegayutan masa depan bagi suatu daerah $\mathcal{S}$ dalam ruangwaktu $\mathcal{Q}$, ditulis $\mathcal{G}^+[\mathcal{S}]$, terdiri atas himpunan titik - titik $q \in \mathcal{Q}$ sedemikian rupa sehingga setiap kurva kausal berarah masa lalu dari q yang tidak mempunyai titik akhir masa lalu memotong $\mathcal{S}$. Daerah kegayutan masa lalu, ditulis $\mathcal{G}^-[\mathcal{S}]$, didefinisikan secara analog. Adapun daerah kegayutan itu sendiri adalah himpunan gabungan $\mathcal{G}[\mathcal{S}] = \mathcal{G}^+[\mathcal{S}] \cup \mathcal{G}^-[\mathcal{S}]$. Suatu himpunan akronal $\mathcal{S}$ disebut permukaan (hiper) Cauchy bagi ruangwaktu $\mathcal{Q}$ jika daerah kegayutannya meliputi seluruh $\mathcal{Q}$.

5. Suatu ruangwaktu $\mathcal{Q}$ dikatakan hiperbolis secara global jika syarat kausalitas kuat dipenuhi oleh $\mathcal{Q}$ dan untuk setiap dua titik $p, q \in \mathcal{Q}$, $\mathcal{I}^+(p) \cap \mathcal{I}^-(q)$ bersifat kompak. Lebih jauh, pernyataan - pernyataan berikut setara :
- (a) $\mathcal{Q}$ hiperbolis secara global.
 - (b) $\mathcal{Q}$ memuat suatu permukaan Cauchy $\mathcal{S}$.

Ruangwaktu yang hiperbolis secara global dapat dituliskan sebagai $\mathcal{Q} = \mathcal{S} \times \mathbb{R}$, dengan $\mathcal{S}$ suatu permukaan Cauchy pada $\mathcal{Q}$. Akan tetapi tidak selalu berlaku bahwa dalam ruangwaktu yang homeomorfis dengan $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$, $\mathcal{S}$ merupakan suatu permukaan Cauchy, misalnya ruangwaktu anti-de Sitter (Geroch, 1970). Selain itu, ruangwaktu yang hiperbolis secara global tidak memuat singularitas telanjang.

7.2 Saran

Telah disinggung secara tersirat bahwa penelitian ini bukan penelitian yang bersifat mengupas-tuntas. Banyak persoalan yang masih belum terjawab, sehingga penelitian ini perlu dilanjutkan. Berikut disebutkan beberapa di antara persoalan - persoalan tersebut :

1. Model ruangwaktu yang digunakan dalam penelitian ini adalah keragaman dengan sifat tertentu. Barangkali terdapat obyek matematis lain yang mampu menjadi kandidat lebih baik bagi model ruangwaktu.
2. Keragaman dan banyak obyek geometris yang digunakan dalam penelitian ini berupa objek mulus, yakni mempunyai tingkat keterdiferensialan paling tinggi. Layak untuk ditanyakan, apa yang terjadi jika derajat diferensiabilitas keragaman dan obyek - obyek geometris lain dalam penelitian ini diturunkan?

3. Secara kasar, keragaman adalah ruang topologis yang disertai suatu struktur diferensial. Adapun keragaman yang digunakan dalam penelitian ini hanya melibatkan satu struktur diferensial saja. Padahal boleh jadi suatu ruang topologis mempunyai lebih dari satu struktur diferensial dan masing - masing tidak "rukun" satu sama lain. Khususnya, struktur diferensial di $\mathbb{R}^4$ dapat dilabeli dengan bilangan riil. Artinya, struktur - struktur diferensial di $\mathbb{R}^4$ tidak tercacah. Terlebih lagi, penelitian dalam bidang ini masih terhitung sedikit, sehingga menyediakan lahan penelitian yang amat luas.

4. Telah disebutkan bahwa model ruangwaktu haruslah memuat orientabilitas waktu. Menarik untuk menanyakan apakah orientabilitas ruang juga harus disyaratkan sebagai model matematis bagi ruangwaktu.

5. Terdapat tingkatan kausalitas yang lebih umum daripada tingkatan yang telah didapat dalam penelitian ini. Misalnya saja, sebagaimana disinggung dalam (Hawking dan Sachs, 1973) :

Kosong dan sederhana secara asimtotis (*asymptotically simple and empty*) $\Rightarrow$ Hiperbolis secara global $\Rightarrow$ Kesederhanaan kausal $\Rightarrow$ Kemalaran kausal $\Rightarrow$ Kausalitas stabil $\Rightarrow$ Kausalitas kuat berderajat- n ($n = 3, 4, 5, \dots$) $\Rightarrow$ Kausalitas kuat $\Rightarrow$ Keterbedaan $\Rightarrow$ Keterbedaan masa lalu / masa depan $\Rightarrow$ Keterbedaan secara lemah $\Rightarrow$ Kausal $\Rightarrow$ Kronologi

Ada beberapa tingkatan yang tidak disebutkan dalam penelitian ini. Tentu sangat menarik untuk memahami tingkatan - tingkatan yang tidak disebutkan itu.

6. Penulis juga telah menyinggung bahwa penelitian lanjutan yang masih sejalan dengan penelitian ini, di antaranya adalah masalah Cauchy dalam teori relativitas umum dan masalah singularitas.

7. Masalah lain yang telah mendarah daging dalam fisika teoretik lanjut adalah perumusan gravitasi kuantum. Semua praanggapan fisis dalam penelitian ini masih klasik, tidak ada konsep kuantum apapun yang digunakan. Penguantuman gravitasi dapat menjadikan ruangwaktu bersifat diskrit. Perumusan struktur kausal dan segala bunga rampai di dalamnya tentulah memerlukan modifikasi.
8. Terakhir, penelitian ini murni matematis. Tepatnya didasarkan pada praanggapan - praanggapan yang masuk akal dan konsisten secara logis. Agar seseorang dapat menghasilkan model yang lebih baik dalam arti konsisten dengan pengamatan, maka tentu dibutuhkan data - data percobaan, misalnya data - data kosmologis.

DAFTAR PUSTAKA

- Beem, J. K., Ehrlich, P. E., 1996, *Global Lorentzian Geometry* (2nd ed), Marcel Dekker, Inc., New York.
- Budhi, R. H. S., 2005, *Ketidak-komplitan Geodesik Sebagai Indikator Singularitas Ruang-waktu*, Skripsi S-1, Departemen Pendidikan Nasional Universitas Gajah Mada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Yogyakarta.
- Caroll, S. M., 2004, *Spacetime and Geometry ; An Introduction to General Relativity*
- Choquet-Bruhat, Y., 2009, *General Relativity and Einstein's Equation*, Oxford University Press, Oxford.
- De Felice, F., Clarke, C. J. S., 1990, *Relativity on Curved Manifolds* Cambridge University Press, Cambridge.
- Dixmier, J., 2010, *General Topology*, Springer-Verlag, New York.
- Earman, J., 1995, *Bangs, Crunches, Whimpers and Shrieks : Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*, Oxford University Press, Oxford.
- Eschrig, H., 2011, *Topology and Geometry for Physics*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- S Geroch, R., 1970, Domain of Dependence, J. Math. Phys. 11, 437 (1970).
- Hawking, S. W., Ellis, G. R., 1973, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Hawking, S. W., Sachs, R. K., 1973, Causally Continuous Spacetimes, Commun. math. Phys. 35, 287-296.

- Hilgert, J., Neeb, K., 2012, *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York.
- Isham, C. J., 2001, *Modern Differential Geometry for Physicist (2nd ed)*, World Scientific, London.
- Kriele, M., 2001, *Spacetime ; Foundations of General Relativity and Differential Geometry*, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Lee, J. M., 2003, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York.
- Matsushima, Y., 1972, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Munkres, J. R., 2000, *Topology (2nd ed)*, Pearson, Boston.
- Nakahara, M., 2003, *Geometry, Topology and Physics (2nd ed)*, Institute of Physics Publishing, Philadelphia.
- Oliva, W., M., 2002, *Geometric Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- O'Neill, B., 1983, *Semi-Riemannian Geometry ; With Applications to Relativity*, Academic Press, New York.
- Penrose, R., 1972, *Techniques of Differential Topology in Relativity*, The Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia.
- Sánchez, M., 2005, Causal Hierarchy of Spacetimes, Temporal Functions and Smoothness of Geroch's Splitting; A Revision, arxiv : [gr-qc] 0411143, <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0411143>
- Sánchez, M., 2010, Recent Progress on the Notion of Global Hyperbolicity (edisi revisi), arxiv: [gr-qc] 0712.1933v2, <http://arxiv.org/abs/0712.1933>
- Sen, R. N., (2010), *Causality, Measurement Theory and The Differentiable Structure of Spacetime*, Cambridge University Press, New York.

Sharan, P., 2009, *Spacetime, Geometry and Gravitation*, Birkhauser, Basel.

Straumann, N., (2013), *General Relativity (2nd ed)*, Springer, New York.

Wald, R. M., 1984, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago.



LAMPIRAN I

PERUMUSAN PERSAMAAN MEDAN EINSTEIN

A.1 Perumusan Secara Intuitif

Pengaruh medan gravitasi terhadap perilaku (gerak) materi dan sebaliknya, sebenarnya telah termuat dalam teori gravitasi Newton. Cara materi bergerak dalam pengaruh medan gravitasi diberikan oleh

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \phi \quad (\text{A.1})$$

dengan $\mathbf{r}$ menyatakan kedudukan benda dalam ruang, t waktu newtonian dan $\nabla \phi$ gradien potensial gravitasi. Sementara cara agihan materi menentukan medan gravitasi diberikan oleh persamaan Poisson untuk medan gravitasi

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.2})$$

dengan G menyatakan tetapan gravitasi universal dan ρ agihan materi dalam ruang.

Sementara di sisi lain, berdasarkan prinsip kesetaraan Einstein ketidakterukuran gravitasi dalam kerangka acuan lokal setara dengan bisa direduksinya metrik Lorentz menjadi metrik Minkowski secara lokal. Di sembarang titik dalam ruangwaktu $p \in \mathcal{Q}$ berlaku $g_{ij} = \eta_{ij}$ dan $\partial_k g_{ij} = 0$. Ini berarti bahwa relativitas khusus berlaku benar di setiap titik dalam ruangwaktu tanpa mempedulikan medan gravitasinya, dan "hampir benar" di wilayah yang dekat dengan titik tersebut.

Lintasan partikel yang jatuh bebas dalam ruangwaktu diberikan oleh kurva

berparameter $x^i(\lambda)$ yang memenuhi persamaan geodesik

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Harus dibuktikan bahwa persamaan ini kembali menjadi persamaan (A.1) dalam limit newtonan, yakni kecepatan partikel jauh lebih kecil dibandingkan dengan kecepatan cahaya c , kandidat medan bak-gravitasi yang diusulkan bersifat lemah dan statis. Syarat - syarat limit newtonan itu dapat diwujudkan dalam bahasa matematis sebagai berikut (Caroll, 2004) :

1. Gerak partikel yang relatif lambat dibandingkan dengan kecepatan cahaya dalam ruang hampa bermakna $dx^i/d\lambda \ll dx^0/d\lambda$ untuk $i = 1, 2, 3$. Akibatnya persamaan geodesik (A.3) menjadi

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^0}{d\lambda} = 0. \quad (\text{A.4})$$

2. Simbol Christoffel yang muncul dalam persamaan (A.4) secara eksplisit diberikan oleh

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ik} (\partial_0 g_{k0} + \partial_0 g_{0k} - \partial_k g_{00}). \quad (\text{A.5})$$

Sifat statis yang disyaratkan mengharuskan turunan metrik terhadap waktu (koordinat ke-0) lenyap, yaitu $\partial_0 g_{ij} = 0$.

3. Syarat medan gravitasi lemah bermakna metrik Lorentz g_{ij} dapat dituliskan sebagai metrik Minkowski η_{ij} ditambah dengan suku usikan kecil h_{ij} , dengan $|h_{ij}| \ll 1$. Jadi

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij} \quad (\text{A.6})$$

dan

$$g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}. \quad (\text{A.7})$$

Maka

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2} (\eta^{ik} - h^{ik}) \partial_k (\eta_{ik} + h_{ik}) \\ &\simeq -\frac{1}{2} \eta^{ik} \partial_k h_{00} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Dengan membatasi persamaan geodesik dengan ketiga syarat di atas, akhirnya diperoleh persamaan

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = \frac{1}{2} \eta^{ik} \partial_k h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 \quad (\text{A.9})$$

Sifat statis kandidat medan gravitasi yang disyaratkan sebelumnya mengharuskan komponen ke-0 persamaan (A.9) menjadi $d^2 x^0 / d\lambda^2 = 0$ atau $dx^0 / d\lambda = k$ dengan k suatu tetapan. Sementara untuk komponen lainnya, metrik ruang η^{ij} dengan tidak lain adalah delta-Kronecker δ^{ij} sehingga

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = \frac{1}{2} \partial^i h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 \quad (\text{A.10})$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{(dx^0)^2} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 &= \frac{1}{2} \partial^i h_{00} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 \\ \frac{d^2 x^i}{(dx^0)^2} &= \frac{1}{2} \partial^i h_{00}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dengan mengingat definisi operator *grad* dan koordinat $dx^0 = dt$, maka diperoleh

persamaan

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial^i h_{00}, \quad (\text{A.12})$$

yang kembali menjadi persamaan (A.1) jika diatur

$$h_{00} = -2\phi. \quad (\text{A.13})$$

Jika diperhatikan baik - baik, sisi kanan persamaan Poisson (A.2) mengandung turunan kedua potensial gravitasi Newton sementara sisi kanannya mengandung agihan sumber (materi). Persamaan yang menggambarkan gravitasi dalam sudut pandang relativistik harus memuat sifat ini. Gravitasi diwakili oleh objek matematis yang berkaitan dengan tensor metrik, sementara rampatan bagi rapat massa ρ adalah tensor energi-momentum T_{ij} . Maka diusulkan suatu persamaan tensorial berbentuk

$$[\nabla^2 g]_{ij} \propto T_{ij} \quad (\text{A.14})$$

untuk menggambarkan interaksi gravitasi.

Tensor energi-momentum bersifat setangkup, karena itu sisi kiri persamaan (A.14) juga harus bersifat setangkup. Orang mungkin mengharapkan sisi kanan berupa operator $\nabla^k \nabla_k$ yang bekerja pada metrik g_{ij} , tetapi harapan ini tidak dapat diwujudkan karena $\nabla_k g_{ij} = 0$.

Untungnya ada besaran (yang secara umum) tak nol dan mengandung turunan kedua tensor metrik, yaitu tensor Riemann R^i_{jkl} . Tensor Riemann ini dapat dikontraksikan untuk mendapatkan tensor Ricci, suatu tensor berderajat $[0, 2]$ yang bersifat simetris, sehingga orang bisa mengusulkan kandidat persamaan "gravitasi rela-

tivistik” yang dicari sebagai

$$R_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (\text{A.15})$$

Untuk mempertahankan kelestarian materi-tenaga secara lokal, sisi kanan persamaan (A.15) harus memenuhi $\nabla^i T_{ij} = 0$. Maka persamaan tersebut harus dimodifikasi kembali mengingat identitas Bianchi $\nabla^i R_{ij} = \nabla_j \mathcal{R}/2$, yang tidak sama dengan nol. Orang lalu dapat mengusulkan sisi kiri persamaan (A.15) sebagai

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{ij}. \quad (\text{A.16})$$

Besaran G_{ij} yang sekarang dikenal dengan sebutan tensor Einstein bersifat simetris dan divergensinya lenyap. Maka persamaan gravitasi yang dicari telah ditemukan, dan dapat ditulis sebagai

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (\text{A.17})$$

Persamaan (A.17) akan kembali menjadi persamaan Poisson (A.2) pada limit tertentu. Untuk membuktikan pernyataan ini, persamaan (A.17) dikontraksikan

$$\mathcal{R} = -\kappa T, \quad (\text{A.18})$$

ditulis ulang sebagai

$$R_{ij} = -\kappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} T g_{ij} \right), \quad (\text{A.19})$$

dan diambil tensor energi-momentum fluida sempurna yang berbentuk

$$T_{ij} = (\rho + p) u_i u_j + p g_{ij}, \quad (\text{A.20})$$

dengan u^i kecepatan-4 fluida dan ρ , p masing - masing menyatakan rapat energi dan momentum fluida sempurna dalam kerangka diam. Untuk partikel - partikel fluida dengan kecepatan rendah, rapat momonetum p dapat diabaikan dan kita dapat memilih kecepatan-4 $u = (u^0, 0, 0, 0)$ dengan syarat normalisasi $g_{ij}u^i u^j$. Nilai ρ juga harus cukup kecil. Komponen metrik nomer-00, g_{00} berubah menjadi

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + h_{00} \\ g^{00} &= -1 - h^{00}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

dan dengan menggunakan ekspansi binomial serta mengambil dua suku pertama, diperoleh $u^0 \simeq -1 + h_{00}/2$. Sampai tingkat pendekatan ini orang dapat dipilih $u^0 = 1$ dan $u_0 = -1$. Maka komponen tensor tenaga-momentum yang diperhitungkan hanya komponen ke-00 saja, sebab komponen lain mempunyai nilai yang relatif sangat kecil.

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho, \\ T &= g^{00}T_{00} = -\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Dengan menyulihkan hasil ini ke persamaan (A.19), diperoleh

$$\begin{aligned} R_{00} &= \kappa \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) \\ &= \kappa \left(\rho + \frac{\rho}{2} [-1 + h_{00}] \right) \\ &\simeq \kappa \frac{\rho}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Sementara komponen tensor Ricci R_{00} secara eksplisit dibtikan oleh

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{i0}^i + \Gamma_{ik}^i \Gamma_{00}^k + \Gamma_{0k}^i \Gamma_{i0}^k. \quad (\text{A.24})$$

$R_{000}^0 = 0$, sehingga jumlahan Einstein untuk indeks- i berjalan dari 1 sampai 3. Suku kedua pada sisi kanan persamaan (A.24) lenyap karena berdasarkan syarat medan statis, suku yang mengandung turunan terhadap koordinat ke-0 harus lenyap. Suku ketiga dan keempat berbentuk $(\Gamma)^2$, sehingga bisa diabaikan. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= R^i{}_{0i0} \\
 &= -\partial_i \frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} \\
 &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}
 \end{aligned}
 \tag{A.25}$$

dengan operator ∇^2 menyatakan operator laplacian dalam ruang-3. Maka persamaan yang dihasilkan

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa \rho. \tag{A.26}$$

Oleh karena persamaan (A.13) mensyaratkan $h_{00} = -2\phi$, maka persamaan (A.26) akan tepat kembali menjadi persamaan Poisson (A.2) jika dipilih $\kappa = 8\pi G$.

A.2 Perumusan Lagrangian PME

Selanjutnya akan ditunjukkan perumusan PME melalui metode variasi aksi. Cara ini dapat dikatakan lebih elegan namun lebih abstrak jika dibandingkan dengan.

Sebagaimana penurunan persamaan Euler-Lagrange untuk medan, penurunan PME melalui cara ini membutuhkan medan skalar yang mencirikan ruangwaktu secara khas (lagrangian) dengan syarat medan skalar ini bergantung pada metrik dan turunan - turunannya. Hilbert mengusulkan bahwa medan skalar paling sederhana yang memenuhi sifat - sifat yang disyaratkan ini adalah skalar Ricci $\mathcal{R}$ (Caroll,

2004). Aksi yang dirumuskan dari skalar Ricci ini (selanjutnya disebut aksi Hilbert) berbentuk

$$S_H = \int \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.27})$$

dengan $g = \det(g_{ij})$.

Selanjutnya ditinjau perilaku S_H di bawah variasi kecil metrik, $g^{ij} \rightarrow g^{ij} + \delta g^{ij}$.

$$\delta S_H = \delta \int \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x = \int \delta(\mathcal{R}) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{R} \delta(\sqrt{-g}) d^4x = 0 \quad (\text{A.28})$$

Evaluasi $\delta(\sqrt{-g})$ memberikan

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \quad (\text{A.29})$$

g adalah fungsi g_{ij} menurut hubungan $\sum_j g_{ij} M_{ij} (-1)^{i+j}$ (tidak ada penjumlahan ke tikas i) dengan M_{ij} adalah minor i, j

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} = M_{ij} (-1)^{i+j}$$

Oleh karena

$$\begin{aligned} g^{ij} &= \frac{1}{g} M_{ij} (-1)^{i+j} \\ g^{ij} g &= M_{ij} (-1)^{i+j} \\ &= \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

maka

$$\delta g = g^{ij} g \delta g_{ij} \quad (\text{A.31})$$

Di sisi lain $\delta(g^{ij})g_{jk} + g^{ij}\delta(g_{jk}) = \delta(g^{ij}g_{jk}) = \delta(\delta_k^i) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned} -\delta(g^{ij})g_{jk} &= g^{ij}\delta(g_{jk}) \\ -g_{li}g_{jk}\delta(g^{ij}) &= g_{li}g^{ij}\delta(g_{jk}) \\ &= \delta_l^j\delta(g_{jk}) \\ &= \delta(g_{jk}) \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

karena itu

$$\delta g_{ij} = -g_{ik}g_{jl}\delta g^{kl} \quad (\text{A.33})$$

Didapatkan

$$\begin{aligned} \delta g &= -g^{ij}gg_{ik}g_{jl}\delta g^{kl} \\ &= gg_{ik}\delta_l^i\delta g^{kl} \\ &= gg_{lk}\delta g^{kl} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Akhirnya diperoleh variasi $\sqrt{-g}$

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ij}\delta g^{ij} \quad (\text{A.35})$$

Selanjutnya, algoritma untuk mengevaluasi $\delta\mathcal{R}$ sedikit lebih rumit. Evaluasi ini dimulai dengan memvariasikan tensor Ricci $R_{ij} = \Gamma_{ij,k}^k - \Gamma_{ik,j}^k + \Gamma_{ij}^l\Gamma_{lk}^k - \Gamma_{lj}^k\Gamma_{ik}^l$.

$$\delta R_{ij} = \delta(\Gamma_{ij,k}^k) - \delta(\Gamma_{ik,j}^k) + \delta(\Gamma_{ij}^l)\Gamma_{lk}^k + \Gamma_{ij}^l\delta(\Gamma_{lk}^k) - \delta(\Gamma_{lj}^k)\Gamma_{ik}^l - \Gamma_{lj}^k\delta(\Gamma_{ik}^l) \quad (\text{A.36})$$

Untuk mendapatkan $\delta\Gamma_{ij}^k$ akan digunakan

$$\Gamma_{ijk} = g_{kl}\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) \quad (\text{A.37})$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
\delta(\Gamma_{ij}^k) &= \delta(g^{kl}\Gamma_{ijl}) \\
&= \delta(g^{kl})\Gamma_{ijl} + g^{kl}\delta(\Gamma_{ijl}) \\
&= \delta(g^{kl})\Gamma_{ijl} + g^{kl}\delta\left(\frac{1}{2}[g_{il,j} + g_{lj,i} - g_{ij,l}]\right) \\
&= \delta(g^{kl})\Gamma_{ijl} + g^{kl}\left(\frac{1}{2}[\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{ij,l}]\right) \\
&= \delta(g^{kl})\Gamma_{ijl} + g^{kl}\left(\frac{1}{2}[\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{ij,l}]\right) \\
&= -g^{nk}g^{ml}\delta g_{nm}\Gamma_{ijl} + g^{kl}\left(\frac{1}{2}[\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{ij,l}]\right) \\
&= -g^{lk}\delta g_{lm}\Gamma_{ij}^m + g^{kl}\left(\frac{1}{2}[\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{ij,l}]\right) \\
&= \frac{1}{2}g^{kl}(\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{ij,l} - 2\delta g_{lm}\Gamma_{ij}^m) \\
&= \frac{1}{2}g^{kl}(\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{ij,l} - 2\delta g_{lm}\Gamma_{ij}^m + \Gamma_{jl}^m\delta g_{mi} - \Gamma_{jl}^m\delta g_{mi} \\
&\quad + \Gamma_{li}^m\delta g_{mj} - \Gamma_{li}^m\delta g_{mj}) \\
&= \frac{1}{2}g^{kl}(\delta g_{il,j} - \delta g_{lm}\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{jl}^m\delta g_{mi} + \delta g_{lj,i} - \delta g_{lm}\Gamma_{ij}^m - \Gamma_{li}^m\delta g_{mj} \\
&\quad - [\delta g_{ij,l} - \Gamma_{jl}^m\delta g_{mi} - \Gamma_{li}^m\delta g_{mj}]) \tag{A.38}
\end{aligned}$$

Dengan mengingat turunan kovarian dari suatu tensor kovarian berderajat dua,

$$A_{ij;k} = A_{ij,k} - \Gamma_{ik}^l A_{lj} - \Gamma_{jk}^l A_{il} \tag{A.39}$$

maka

$$\delta\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}[\delta g_{il,j} + \delta g_{lj,i} + \delta g_{ij,l}] \tag{A.40}$$

Oleh sebab δg_{ij} tensor maka $\delta\Gamma_{ij}^k$ juga merupakan tensor. Akibatnya besaran

$$(\delta\Gamma_{ij}^k)_{;k} - (\delta\Gamma_{ik}^k)_{;j}$$

adalah tensor yang dapat dijabarkan menurut turunan kovarian.

$$\begin{aligned}
(\delta\Gamma_{ij}^k)_{;k} - (\delta\Gamma_{ik}^k)_{;j} &= (\delta\Gamma_{ij}^k)_{,k} - \delta\Gamma_{mk}^k\Gamma_{ij}^m - \delta\Gamma_{im}^k\Gamma_{jk}^m + \delta\Gamma_{ij}^m\Gamma_{km}^k \\
&\quad - [(\delta\Gamma_{ik}^k)_j - \delta\Gamma_{mk}^k\Gamma_{ij}^m - \delta\Gamma_{im}^k\Gamma_{kj}^m + \delta\Gamma_{ik}^m\Gamma_{mj}^k] \\
&= (\delta\Gamma_{ij}^k)_{,k} - \delta\Gamma_{mk}^k\Gamma_{ij}^m + \delta\Gamma_{ij}^m\Gamma_{km}^k \\
&\quad - [(\delta\Gamma_{ik}^k)_j - \delta\Gamma_{mk}^k\Gamma_{ij}^m + \delta\Gamma_{ik}^m\Gamma_{mj}^k] \\
&= \delta R_{ij}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

Jadi,

$$\delta R_{ij} = (\delta\Gamma_{ij}^k)_{;k} - (\delta\Gamma_{ik}^k)_{;j} \tag{A.42}$$

Dengan demikian, evaluasi variasi skalar Ricci $\mathcal{R}$ menghasilkan

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R} &= \delta(g^{ij}R_{ij}) \\
&= \delta(g^{ij})R_{ij} + g^{ij}\delta(R_{ij}) \\
&= \delta(g^{ij})R_{ij} + (g^{ij}\delta\Gamma_{ij}^k)_{;k} - (g^{ij}\delta\Gamma_{ik}^k)_{;j} \\
&= \delta(g^{ij})R_{ij} + (g^{ij}\delta\Gamma_{ij}^k)_{;k} - (g^{ik}\delta\Gamma_{ij}^j)_{;k} \\
&= \delta(g^{ij})R_{ij} + (g^{ij}\delta\Gamma_{ij}^k - g^{ik}\delta\Gamma_{ij}^j)_{;k}
\end{aligned} \tag{A.43}$$

Suku kedua persamaan di atas akan hilang jika diintegrasikan dan dievaluasi pada tapal batas berdasarkan teorema Gauß. Setelah dikembalikan ke persamaan integral aksi, didapatkan

$$\delta S_H = \frac{c^3}{16\pi G} \int [R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R}]\delta g^{ij} \sqrt{-g} d^4x = 0 \tag{A.44}$$

yang berlaku untuk semua nilai δg^{ij} . Dengan kata lain, bentuk integral ini mem-

berikan persamaan medan Einstein tanpa kehadiran materi-energi

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} = 0 \quad (\text{A.45})$$

Untuk menambahkan suku agihan materi-energi, hal yang perlu dilakukan hanyalah mengubah aksinya

$$\delta S = \delta S_H + \delta S_M = 0 \quad (\text{A.46})$$

dengan δS_M menyatakan aksi yang ditimbulkan oleh agihan materi-energi. Perhitungan aksi sumber cukup sederhana

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int [\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}(\Phi_1, \dots, \nabla_1 \Phi_1, \dots, g)] d^4x \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{ij} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Didefinisikan

$$T_{ij} = -2c \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{ij} \right]$$

sehingga

$$\delta S = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{ij} \left[R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathcal{R} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \right] = 0 \quad (\text{A.48})$$

yang memberikan

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \quad (\text{A.49})$$

LAMPIRAN II

PEMBELAHAN OBJEK - OBJEK GEOMETRIS PADA KERAGAMAN YANG HIPERBOLIS SECARA GLOBAL

Sekali suatu proses pemulusan dilakukan pada suatu keragaman yang hiperbolis secara global, maka metrik lorentzan yang dimiliki oleh keragaman tersebut dapat dibelah menjadi bagian bakwaktu dan bakruang. Lebih jauh lagi, bagian bakwaktu dan bakruang ini bersifat ortogonal. Akibatnya semua obyek geometris yang berkaitan dengan (dapat diperoleh dari) metrik juga dapat dibelah menurut bagian bakwaktu-bakruang.

B.1 Pembelahan vektor dan koneksi

Andaikan $(\mathcal{Q}, g)$ ruangwaktu, $\mathcal{S} \subset \mathcal{Q}$ permukaan Cauchy berdimensi 3 dan $\mathcal{Q}$ dapat dibelah secara mulus dan ortogonal menjadi $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$. Untuk setiap titik $p \in \mathcal{S} \subset \mathcal{Q}$, $T_p(\mathcal{Q})$ merupakan jumlahan langsung antara bagian waktu dan bagian ruang. Jadi setiap vektor anggota $T_p(\mathcal{Q})$ dapat dituliskan sebagai jumlahan antara vektor bakwaktu yang dibangkitkan oleh vektor satuan $N(p)$ yang tegak lurus $\mathcal{S}$ dengan tiga buah vektor bebas linear yang menyinggung $\mathcal{S}$ di p . Jelas bahwa setiap vektor yang menyinggung $\mathcal{S}$ tegak lurus dengan $N(p)$ di p dan sembarang vektor yang tegak lurus dengan $N(p)$ haruslah menyinggung $\mathcal{S}$ di p . Jika titik p divariasikan di $\mathcal{S}$ maka N menjadi medan vektor satuan yang didefinisikan di permukaan bakruang tersebut menurut

$$g(N, N) = -1 \tag{B.1}$$

Selain itu,

$$g(N, \bar{X}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

untuk $\bar{X}$ sembarang medan vektor singgung pada S .

Hasilkali skalar antara nilai dua medan vektor singgung pada setiap titik $p \in S$ berdasarkan metrik g membangkitkan metrik baru di S yang merupakan imbasan dari g dan dinotasikan dengan $\bar{g}$.

$$\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y}) := g(\bar{X}, \bar{Y}) \quad (\text{B.3})$$

$\bar{g}$ juga dikenal dengan **forma asasi pertama** (*first fundamental form*) (Sharan, 2009).

Untuk menghitung turunan kovarian ∇ pada $\mathcal{Q}$ bagi medan vektor Y sepanjang kurva integral milik medan vektor X , orang harus mengetahui nilai Y di sepanjang kurva integral ini. Berdasarkan pengertian ini, turunan kovarian $\nabla_{\bar{X}}\bar{Y}$ bagi medan - medan vektor singgung di S dapat didefinisikan. Serupa itu, $\nabla_{\bar{X}}N$ juga dapat didefinisikan.

Oleh karena $g(N, N) = -1$ bersifat tetap di S , maka

$$0 = \bar{X}(g(N, N)) = g(\nabla_{\bar{X}}N, N) + g(N, \nabla_{\bar{X}}N) \quad (\text{B.4})$$

Selain itu,

$$0 = \bar{Y}(g(\bar{X}, N)) = g(\nabla_{\bar{Y}}\bar{X}, N) + g(\bar{X}, \nabla_{\bar{Y}}N) \quad (\text{B.5})$$

Diberikan sembarang medan vektor mulus X di $\mathcal{Q}$. Untuk sembarang titik $p \in S$, bagian yang menyinggung S bagi nilai X di p (dilambangkan dengan $h(X)$)

dapat diperoleh dengan cara berikut

$$\begin{aligned} X &= N + h(X) \\ h(X) &= X - N = X + g(N, N)N = X + g(X, N)N \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Penulisan $h(X)$ juga mengisyaratkan bahwa h adalah pemetaan yang bersifat proyektif dari ruang singgung $T_p(\mathcal{Q})$ menuju subruang singgung $\bar{T}_p(\mathcal{Q}) = T_p(S)$. Untuk setiap medan vektor $X \in \mathcal{X}(\mathcal{Q})$ berlaku

$$h(h(X)) = h(X) \quad (\text{B.7})$$

Di sisi lain, turunan kovarian dari suatu medan vektor singgung sepanjang kurva integral yang dibangkitkan oleh medan vektor singgung lain di S tidak harus berupa medan vektor singgung (di S) juga. Hasil penurunan kovarian ini dapat dipecah menjadi komponen tegak lurus dan komponen singgung terhadap S . Langkah ini mengarah kepada pendefinisian turunan kovarian baru sebagai komponen tangensial dari hasil yang diperoleh sebelumnya.

Hasil turunan kovarian dari $\bar{Y}$ sepanjang kurva integral $\bar{X}$ dapat ditulis dalam bentuk pemisahan singgung-tegak lurus.

$$\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} + K(\bar{X}, \bar{Y})N \quad (\text{B.8})$$

dengan makna simbol - simbol

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} := h(\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}) \quad (\text{B.9})$$

$$K(\bar{X}, \bar{Y}) := -g(\nabla_{\bar{X}} \bar{Y}, N) = g(\nabla_{\bar{X}} N, \bar{Y}) \quad (\text{B.10})$$

Persamaan (B.8) tidak lain adalah persamaan Gauß dalam bahasa geometri difer-

ensial. Berkaitan dengan persamaan (B.8), terdapat teorema yang dikenal dengan **Theorema Egregium**. Berikut disajikan versi modern teorema tersebut

Teorema B.1 $\bar{\nabla}$ merupakan koneksi metrik (atau turunan kovarian) di S yang berkaitan dengan $\bar{g}$. Lebih jauh, K mendefinisikan tensor kovarian setangkup berderajat dua di S . K disebut **forma asasi kedua** atau **kelengkungan luar**.

Bukti. Untuk membuktikan bahwa $\bar{\nabla}$ adalah koneksi, harus dibuktikan bahwa obyek geometris tersebut memenuhi sifat - sifat koneksi sebagaimana dijelaskan dalam bab 3. Bukti ini diserahkan kepada pembaca. Pembaca dapat mengikuti pembuktian yang dilakukan dalam (Sharan, 2009). $\diamond$

B.2 Pembelahan Tensor Kelengkungan

Pengertian tensor kelengkungan melibatkan komutasi antara dua turunan kovarian, sesuai penjelasan dalam Bab III. Dengan bantuan persamaan (B.8) komputasi untuk memisahkan tensor kelengkungan yang terdefinisi di S menjadi komponen singgung dan komponen tegak lurus dapat langsung dilakukan.

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\bar{X}}(\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z}) &= \nabla_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z} + K(\bar{Y}, \bar{Z})N) \\
 &= \nabla_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + (\nabla_{\bar{X}}K(\bar{Y}, \bar{Z}))N + K(\bar{Y}, \bar{Z})\nabla_{\bar{X}}(N) \\
 &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + K(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z})N + N\bar{X}(K(\bar{Y}, \bar{Z})) \\
 &\quad + K(\bar{Y}, \bar{Z})\nabla_{\bar{X}}(N) \\
 &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + N[K(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + \bar{X}(K(\bar{Y}, \bar{Z}))] + K(\bar{Y}, \bar{Z})\nabla_{\bar{X}}N
 \end{aligned}
 \tag{B.11}$$

Serupa itu

$$\nabla_{\bar{Y}}(\nabla_{\bar{X}}\bar{Z}) = \bar{\nabla}_{\bar{Y}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) + N[K(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) + \bar{Y}(K(\bar{X}, \bar{Z}))] + K(\bar{X}, \bar{Z})\nabla_{\bar{Y}}N
 \tag{B.12}$$

dan

$$\nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Z} = \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Z} + NK([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z}) \quad (\text{B.13})$$

Menurut definisi,

$$R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = \nabla_{\bar{X}}(\nabla_{\bar{Y}}\bar{Z}) - \nabla_{\bar{Y}}(\nabla_{\bar{X}}\bar{Z}) - \nabla_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Z} \quad (\text{B.14})$$

serta dengan mensubstitusikan persamaan - persamaan (B.11)-(B.13) diperoleh

$$\begin{aligned} R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + N[K(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + \bar{X}(K(\bar{Y}, \bar{Z}))] + K(\bar{Y}, \bar{Z})\nabla_{\bar{X}}N \\ &\quad - \{\bar{\nabla}_{\bar{Y}}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) + N[K(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}) + \bar{Y}(K(\bar{X}, \bar{Z}))] \\ &\quad + K(\bar{X}, \bar{Z})\nabla_{\bar{Y}}N\} - \{\bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Z} + NK([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z})\} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

atau

$$\begin{aligned} R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} &= \{\bar{R}(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} + K(\bar{Y}, \bar{Z})\nabla_{\bar{X}}N - K(\bar{X}, \bar{Z})\nabla_{\bar{Y}}N\} \\ &\quad + N\{K(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{Z}) + \bar{X}(K(\bar{Y}, \bar{Z})) - K(\bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})\} \\ &\quad - \bar{Y}(K(\bar{X}, \bar{Z})) - K([\bar{X}, \bar{Y}], \bar{Z})\} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

yang tidak lain adalah pemisahan tensor kelengkungan menurut komponen singgung dan komponen tegak lurus.

PENJURUS

Akumulasi	Fungsi temporal Cauchy, 94
titik, 11	Fungsi waktu, 94
Aliran lokal, 35	Fungsi waktu Cauchy, 94
Basis	Garis alir, 36
jodoh, 27	Garis sejarah, 68
unsur, 12	Geodesik, 54
Bungkusan, 10	persamaan, 54
Cakrawala Cauchy, 104	pra-, 54
masa depan, 103	Hasilkali dalam, 32
masa lalu, 104	Hasilkali luar, 31
Daerah kegayutan, 101	Hausdorff
masa depan, 101	ruang, 11
masa lalu, 101	Himpunan
Difeomorfisma, 25	akronal, 83
Dukungan, 20	masa depan, 84
Eksterior, 10	masa lalu, 84
Ekstertior	pelanggaran kausalitas, 87
titik, 10	pelanggaran kronologi, 86
Elemen volum, 67	terbuka, 9
Forma diferensial, 40	tertutup, 9
Forma-k, 30	Hiperbolis secara global, 110
Fungsi pada Keragaman, 25	Homeomorfisma, 12
Fungsi temporal, 94	Horismos masa depan, 79
	Interior, 10

titik, 10	Limit
	titik, 11
Kelengkungan, 57	Lingir, 107
skalar, 66	Lingkungan, 9
Keragaman	normal, 55
lorentzan, 59	Liput, 16
mulus, 23	Malar
semi-riemannan, 59	di dalam, 97
terorientasi, 46	di luar, 97
Kerangka, 33	Masa depan kausal, 79
ortonormal, 60	Masa depan kronologis, 79
Kerucut cahaya, 69	Masa lalu bersama, 95
Kerucut cahaya ganda, 76	Masalah Cauchy, 100
Kompak, 16, 95	Metrik, 59
subhimpunan, 97	
Koneksi, 50	Orientabilitas, 46
bebas-torsi, 52	Parakompak, 20, 92
koefisien, 51	Pembenaman, 13
Levi-Civita, 64	Pemetaan eksponensial, 55
Kovektor, 27	Pergeseran sejajar, 53
Kurva	Permukaan Cauchy, 105, 112
bakwaktu, 77	Persamaan medan Einstein, 72
integral, 35	Perumusan nilai awal, 116
kausal, 77	Prinsip kesetaraan Einstein, 71
limit, 82	Prinsip kesetaraan lemah, 71
tak dapat diperpanjang ke masa depan,	<i>Pull-back</i> , 28
	<i>Push-forward</i> , 28

Ruang	penyetangkupan, 30
jodoh, 27	Ricci, 66
singgung, 26	Riemann, 58
tersambung, 14	tenaga-pusa, 72
Sederhana secara kausal, 99	Tetapan kosmologis, 72
Sekatan kesatuan, 20	Titik akhir masa depan, 81
Singularitas, 113	Topologi
Struktur kausal pada ruang waktu, 77	basis, 11
Syarat	metrik, 13
kausalitas, 87	pengertian, 8
kausalitas kuat, 89	terbandingkan, 9
kausalitas stabil, 91	warisan, 9
kemalaran kausal, 96	Topologis
kronologis, 86	ruang, 8, 9
Syarat keterbedaan, 88	subruang, 9
masa depan, 88	Torsi, 51
masa lalu, 88	Trip, 77
Syarat pencerminan, 95	Trip kausal, 78
Tapal batas, 10	Turunan Lie, 38
akronal, 84	Vektor
titik, 10	medan, 32
Tensor, 28	singgung, 26
Anti-penyetangkupan, 30	Wilayah
hasilkali, 29	bakcahaya, 69
kontraksi, 29	bakruang, 69
kontravarian, 28	bakwaktu, 69
kovarian, 28	sederhana, 56
medan, 32	

CURRICULUM VITAE



BIODATA

Nama : Hari Taqwan Santoso

Tempat, Tanggal Lahir : Ponorogo, 29 November 1992

Universitas Asal : Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

Fakultas / Prodi : Sains dan Teknologi / Fisika

Alamat Asal : Jalan Mas Kumambang no. 7 RT 02 RW 02
Mangunharjo, Gandu, Mlarak, Ponorogo
Jawa Timur, Kode Pos : 63472

Alamat Tempat Tinggal : Perum POLRI Gowok, Komplek C IV no. 144
RT 12 RW 05 Caturtunggal, Depok, Sleman
Yogyakarta

E-mail : narasoma7@gmail.com

Hp. : +628987715253

RIWAYAT PENDIDIKAN

Sekolah Dasar : MI Ma'arif Gandu (1997 - 2004)
SMP : MTs Al-Islam Joresan (2004 - 2007)
SMA : MA Al-Islam Joresan (2007 - 2010)
Perguruan Tinggi : UIN Sunan Kalijaga (2011 - 2016)

KEMAMPUAN

Akademik : Tutor Fisika dan Matematika Dasar
Non-Akademik : Menulis (fiktif dan non-fiktif)
Bahasa Inggris (Speaking)
Karya : Novel "The Jazab Boy" (DIVA PRESS 2012), Antologi
Puisi "Teruntuk Mentari dan Rembulan"
(BeBook Publisher, segera terbit)