

**APLIKASI SEKUENSI DAN DERET PADA PERHITUNGAN
PEMBENTUKAN GEOMETRI FRAKTAL SEDERHANA**



SKRIPSI

**Diajukan Kepada Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Pendidikan Sains**

Oleh :

Dwi Sulistiyantoko
NIM: 03430341

**PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA
2008**

ABSTRAK

APLIKASI SEKUENSI DAN DERET PADA PERHITUNGAN PEMBENTUKAN GEOMETRI FRAKTAL SEDERHANA

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana obyek geometri fraktal terbentuk, aplikasi sekuensi dan deret pada proses pembentukannya dan uji konvergensi pada obyek geometri fraktal sederhana. Obyek geometri fraktal yang diteliti adalah Himpunan per-tiga Tengah Cantor, Kurva Von Koch, segitiga Sierpinski dan Debu Cantor.

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*). Penelitian ini bersumber dari data-data atau bahan-bahan tertulis yang berkaitan dengan topik masalah yang dibahas. Pengumpulan data yang digunakan adalah dengan metode dokumenter, yaitu melacak berbagai sumber tertulis yang memuat berbagai tema dan pokok kajian yang dibahas. Metode analisis data yang digunakan adalah metode deskriptif kualitatif. Sumber data yang diperlukan dalam penelitian ini terdiri atas dua jenis, yaitu: sumber data primer dan sumber data sekunder. Sumber data primer diperoleh dari buku *Fractal Geometry* karya Gerald A. Edgar dan buku *Introduction to Real Analysis* karya Robert G. Bartle dan D.R Sherbert.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa obyek geometri fraktal dapat dijelaskan proses pembentukannya. Aplikasi deret pada Geometri fraktal dapat dilihat dari rumus suku ke- n pada perhitungan pembentukan objek geometri fraktal. Hasil uji konvergensi menggunakan Uji Kondisi Perlu dan Uji Cauchy Rasio menunjukkan bahwa Himpunan per-tiga Tengah Cantor deret konvergen; Kurva Von Koch divergen, Segitiga Sierpinski konvergen dan Debu Cantor konvergen

Kata kunci: *sekuensi, deret, fraktal, konvergensi*

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Dwi Sulistiyantoko
N I M : 0343 0341
Program Studi : Pendidikan Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Universitas : UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Menyatakan dengan sesungguhnya dan sejujurnya, bahwa Skripsi saya yang berjudul **"APLIKASI SEKUENSI DAN DERET PADA PERHITUNGAN PEMBENTUKAN GEOMETRI FRAKTAL SEDERHANA"** adalah asli hasil penelitian saya sendiri dan bukan plagiasi hasil karya orang lain.

Yogyakarta, 21 April 2008



Yang menyatakan

Dwi Sulistiyantoko

N I M. 0343 034



PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1155/2008

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Aplikasi Sekuensi dan Deret Pada Perhitungan Pembentukan Geometri Fraktal Sederhana.

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Nama : Dwi Sulistiyantoko

NIM : 03430341

Telah dimunaqasyahkan pada : 8 Mei 2008

Nilai Munaqasyah : A -

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Drs. Sugiyono, M.Pd

NIP. 130795237

Penguji I

Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si

NIP.150299967

Penguji II

Dra. Endang Sulistyowati

NIP. 150292517

Yogyakarta, 7 Juli 2008

UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan



Dra. Maizer Said Nahdi, M.Si.

NIP. 150219153

MOTTO

خير الناس ، انفعهم للناس

**“Sebaik-Baik Manusia Adalah
Yang Bermanfaat Bagi Manusia”**

PERSEMBAHAN

Karya ini kupersembahkan untuk :

- 1. Almamater tercinta, Kampus Putih Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta**
- 2. Orang Tuaku tersayang. Cinta kasih kalian yang tak terbalaskan.**
- 3. Juga kepada pecinta ilmu dan para saintis.**

KATA PENGANTAR

Assalamu`alaikum Warahmatullahi Wabarakatuhu.

Alhamdulillah, merupakan lafadz terindah yang pantas diucapkan seorang hamba atas segala kenikmatan yang telah diterimanya dari Allah tuhan semesta alam. Sholawat beserta salam teruntuk baginda nabi Muhammad SAW sebagai penghulu tauladan dan uswah mulia.

Terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu terlaksananya proses penelitian ini, sehingga selesai penyusunan skripsi ini, diantaranya kepada:

1. Dra. Maizer S.N., M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah membantu dalam kelancaran penelitian ini.
2. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si. selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah membantu dalam kelancaran pengurusan administrasi penelitian ini.
3. Drs. Sugiyono, M.Pd. selaku Dosen pembimbing I yang telah memberikan dukungan moral dan pengarahan serta menyediakan waktu, tenaga dan pikiran di tengah aktifitas yang padat.
4. Iwan Kuswidi, S.Pd.I. selaku Dosen Pembimbing II yang dengan sabar memberikan pengarahan dan bimbingan dalam proses penelitian ini.
5. Khurul Wardati, M.Si. dan Endang S, M.Si. selaku tim penguji skripsi yang telah menguji dan memberikan masukan untuk penyempurnaan penyusunan skripsi ini.

6. Para staf pengajar di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah memberikan banyak ilmu, pengetahuan, wawasan dan tauladan yang tidak ternilai harganya.
7. Istriku, umi idaman bagi anak-anakku yang memberikan motivasi dan dukungan sehingga tersusunlah laporan penelitian ini.
8. Teman-teman “Math Education ‘03” yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah memberikan bantuan dalam berbagai bentuk.
9. Rekan-rekan KKN, PPL juga teman seperjuangan di Masjid Al Iman, jazakumullah khairan katsir.
10. Semua pihak yang telah banyak membantu dan mendukung baik moral maupun material.

Semoga Allah SWT memberikan balasan atas bantuan dan kebaikan yang telah diberikan selama proses penelitian ini. Penyusun menyadari mungkin masih banyak kekurangan dan kesalahan dalam skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran membangun sangat penyusun harapkan.

Wassalamu`alaikum Warahmatullahi Wabarakatuhu

Yogyakarta, 22 April 2008

Penyusun

Dwi Sulistiyantoko

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
ABSTRAK	ii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	iii
HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI/ TUGAS AKHIR.....	iv
HALAMAN PENGESAHAN.....	vi
HALAMAN MOTTO	vii
HALAMAN PERSEMBAHAN	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI.....	xi
BAB I. PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Pembatasan Masalah	6
C. Rumusan Masalah	7
D. Tujuan Penelitian	7
E. Manfaat Penelitian	7
F. Tinjauan Pustaka	8
BAB II LANDASAN TEORI	
A. Sekuensi dan Deret	10
1. Definisi Sekuensi dan deret.....	10
2. Uji Konvergensi-Divergensi Deret	13
3. Konvergensi Deret Bilangan riil	20

B. Geometri.....	23
1. sDasar geometri.....	24
a. Titik, garis dan bidang.....	24
b. Sudut dan segitiga	27
2. Geometri Fraktal	28
a. Teori Chaos	28
b. Geometri fraktal	31
 BAB III METODE PENELITIAN	
A. Jenis Penelitian.....	37
B. Sumber Data.....	37
C. Pengumpulan dan Analisa data.	39
 BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	
A. Proses Pembentukan Obyek Geometri Fraktal	40
B. Aplikasi Deret pada Objek Geometri Fraktal	54
C. Uji Konvergensi Deret pada Obyek Geometri Fraktal.....	71
 BAB V PENUTUP	
A. Kesimpulan	79
B. Saran-saran.....	80
DAFTAR PUSTAKA	81
CURICULUM VITAE.....	83

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Hakikat manusia diciptakan telah memiliki banyak keunggulan apabila dibandingkan dengan makhluk yang lain. Potensi jasmani, ruhani dan pikiran adalah potensi yang menjadi kunci keutamaan manusia. Ketiga potensi ini apabila dapat dimanfaatkan dengan baik akan memberikan dampak yang positif dan menjadikan manusia dapat hidup dengan sejahtera dan menciptakan peradaban di alam ini. Perkembangan peradaban yang diciptakan manusia tidaklah terlepas dari tingkat pemahaman dan penguasaan manusia pada ilmu pengetahuan.

Ilmu pengetahuan bagi manusia ibarat sebuah pisau yang mempunyai sisi yang tajam untuk membedah apa yang ada. Sebagaimana diketahui bahwasanya manusia tidak akan dapat beradaptasi dengan dunia ini jika tanpa ilmu pengetahuan. Hal ini menjadi dasar mengapa manusia yang diutus oleh Allah untuk menjadi Khalifah di muka bumi ini dibekali dengan ilmu. Ilmu pengetahuan sudah diturunkan sejak manusia pertama di bumi ini, seperti dalam firman Allah dalam Al Qur'an :

قَالَ يٰٓآدَمُ اَنْۢبِئْهُمْ بِاَسْمَائِهِمْ ۖ فَلَمَّآ اَنْۢبَاَهُمْ بِاَسْمَائِهِمْ قَالَ اَلَمْ اَقُلْ لَّكُمْ
اِنِّىۤ اَعْلَمُ غَيْۢبَ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَاَعْلَمُ مَا تُبْدُوۡنَ وَمَا كُنْتُمْ
تَكْتُمُوۡنَ ﴿۳۳﴾

Artinya: Allah berfirman: "Hai Adam, beritahukanlah kepada mereka Nama-nama benda ini." Maka setelah diberitahukannya kepada mereka Nama-nama benda itu, Allah berfirman: "Bukankah sudah Ku katakan kepadamu, bahwa Sesungguhnya aku mengetahui rahasia langit dan bumi dan mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan?" (Al Baqarah: 33).¹

Ilmu semakin berkembang seiring dengan perkembangan peradaban manusia. Ilmu yang ada dan berkembang di alam ini menjadi bermacam-macam dan terbagi menjadi beberapa disiplin ilmu. Beberapa ahli membedakan antara filsafat, ilmu pengetahuan dan agama. Beberapa ahli yang lain mengusahakan adanya integrasi dan interkoneksi di antara ketiga hal tersebut. Termasuk dalam hal ini beberapa ilmuwan muslim yang jauh sebelumnya dalam sejarah kependidikan islam telah terpola pengembangan keilmuan yang bercorak integralistik-ensiklopedik di satu sisi, yang dipelopori oleh para ilmuwan seperti *Ibnu Sina*, *Ibnu Rusyd* dan *Ibnu Khaldun* berhadapan dengan pola pengembangan keilmuan agama yang spesifik-parsialistik di sisi lain, yang dikembangkan oleh para ahli hadis dan ahli fiqih.²

Matematika sebagai salah satu ilmu pengetahuan yang awal ditemukan dan digunakan oleh manusia. Istilah Matematika dalam Kamus Ilmiah Populer berarti ilmu pasti.³ Matematika seolah-olah menjadi penjawab atas segala permasalahan dan menjadi penyelesaian atas segala kebuntuan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, mulai dari yang sederhana sampai dengan

¹ Al Baqarah(02): 33, Depag RI (Lajnah Pentashih Mushaf Al Qur'an), *Al Qur'an & Terjemahannya* (Bandung : Diponegoro, 2000) hlm. 6

² M. Amin Abdullah, dkk, *Menyatukan Kembali Ilmu-ilmu Agama dan Umum dan Upaya Mempersatukan Epistemologi Islam dan Umum* (Yogyakarta: Sunan Kalijaga Press, 2003), hal 5.

³ Pius A. Partanto dan M. Dahlan Al Barry, *Kamus Ilmiah Populer* (Surabaya: Arkola, 1994) hlm. 444

permasalahan yang kompleks, mulai dari operasi-operasi mudah sampai dengan operasi yang rumit.

Penemuan ilmu matematika yang dikenal dalam sejarah Matematika bahwa Matematika digunakan untuk menghitung jumlah benda di alam, sehingga lahirlah bilangan *natural* (asli). Manusia masa lampau menggunakan bilangan untuk menghitung jumlah ternak mereka, jumlah anggota kelompok dan jumlah benda yang lain. Bilangan yang lain juga ditemukan dan menjadi apa yang diketahui saat ini.

Bilangan asli dapat dilihat sebagai sebuah barisan atau sekuensi. Suatu sekuensi adalah suatu rangkaian dengan unsur $u_1, u_2, u_3, \dots$ yang terbentuk menurut suatu aturan tertentu. Dapat dilihat bilangan asli merupakan barisan dengan anggotanya 1, 2, 3, 4,..... Sedangkan suatu deret dinyatakan sebagai penjumlahan $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ unsur-unsur suatu sekuensi. Suatu sekuensi tertentu atau deret tertentu mempunyai unsur-unsur tertentu, suatu sekuensi atau deret tak tentu mempunyai unsur tak terbatas. Unsur umum, atau unsur ke- n dari suatu sekuensi atau deret menunjukkan aturan atau formula untuk memperoleh suatu unsur.

Geometri adalah salah satu cabang matematika yang berkaitan dengan titik, garis dan bidang. Ilmu ini sudah dikenal secara luas oleh masyarakat. Kata geometri berasal dari bahasa Yunani (*greek*), yaitu *geomatria*. *Ge* berarti bumi dan *metre* berarti ukuran, sehingga geometri berarti ukuran bumi. Maksudnya mengukur segala sesuatu yang ada di bumi. Geometri kuno sebagian dimulai dari pengukuran praktis yang diperlukan untuk pertanian

orang-orang Babylonia dan Mesir. Kemudian geometri orang-orang Mesir dan Babylonia diperluas untuk pengukuran panjang ruas garis, luas dan volume. Hasil-hasil ini sering dinyatakan sebagai deret aritmatika yang secara empiris tidak benar.⁴

Tiga unsur pangkal dalam geometri, yaitu titik, garis dan bidang.⁵ Ketiga unsur dalam geometri tersebut akan dapat mendefinisikan perhitungan yang pasti, sehingga dapat dihitung unsur-unsur dalam geometrinya, yaitu panjang, luas dan volume suatu obyek Geometri.

Benda geometri dapat dengan mudah dijumpai keberadaanya di alam ini. Benda geometri dengan mudah dikenali dan disebutkan namanya, tetapi banyak pula benda yang sulit didefinisikan apa istilahnya. Tiang bendera dilihat dari jauh seperti garis, sebuah meja dilihat dari atas berupa segi-empat, dan peti itu berbentuk balok, yang masing-masing mempunyai dimensi satu, dua, dan tiga, yaitu bilangan-bilangan bulat (*integer*).

Pegunungan, pohon dengan cabang-cabangnya, jaringan pembuluh, gumpalan awan di langit, lekuk-lekuk garis pantai merupakan bentuk-bentuk yang tidak memiliki definisi bentuk dalam Matematika. Ketika melihat kepada sebuah pohon bercabang, cabangnya berdahan, dahannya beranting, dan ranting itu mempunyai anak ranting yang lebih kecil, maka inilah fenomena fraktal. Sehingga evolusi (perubahan) sebuah fraktal biasanya kacau (*chaotic*).

⁴ Sri Mulyati, Individual Text Book "*Geometri Euclid*", JICA, UNY hlm. 2.

⁵ Materi Perkuliahan, *Geometri*, (Universitas Negeri Yogyakarta, 2003) hlm. 01

Benda fraktal dapat dijumpai di sekitar manusia, mulai dari skala mikro, makro, hingga mega dan giga. Cara virus SARS membelah diri, jaringan pori-pori (tanah, batuan, makhluk hidup), rembesan zat cair di dalam tanah, adalah contoh-contoh fraktal dalam skala mikro. Percabangan akar, pola retakan batuan, daun cemara, bahkan beberapa motif batik, adalah contoh-contoh fraktal skala makro. Kelokan-kelokan sungai, busur kepulauan, bentuk galaksi, nebula, adalah fraktal dalam skala *mega* (perbesaran 1 juta kali) hingga *giga* (perbesaran 1 miliar kali). Contoh yang paling sederhana dari fraktal adalah jika cermin dipegang di hadapan sebuah cermin. Cermin yang dipegang, didalamnya ada bayangan orang yang memegang cermin. Cermin yang ada di bayangan, ada bayangan si pemegang cermin itu lagi, dan seterusnya.

Geometri fraktal dilihat sebagai obyek geometri yang belum dapat diketahui persamaan ataupun perhitungannya secara umum. Geometri fraktal mempunyai karakter-karakter penting antara lain *self similar* (penjelmaan diri), *self affine* (penyederhanaan diri), *self inverse* (pembalikan diri), dan *self squaring* (pemutaran diri). Skala panjangnya tidak spesifik atau *invariant*. Skala fraktal dicirikan oleh bilangan-bilangan pecahan atau tak bulat (*non-integer*), yang disebut dimensi fraktal (*fractal dimensions*). Ciri-ciri yang biasanya dijumpai pada bangun fraktal, adalah bahwa bagian terkecil dari benda itu merupakan cerminan bentuk keseluruhannya (*the part is reminiscent of the whole*), dengan kata lain, bahwa di dalam suatu himpunan fraktal, bagian dari himpunan tersebut merupakan skala kecil dari keseluruhannya.

Uraian mengenai barisan, deret dan geometri fraktal dapat menjadi sebuah kajian tersendiri. Sebagaimana dipahami bahwa obyek geometri fraktal memiliki suatu formula untuk membentuknya. Oleh karena itu, geometri fraktal akan dapat dilihat sebagai sebuah barisan dan deret yang akan dicari formulanya.

Dalam mencari perhitungan terhadap obyek geometri fraktal inilah diperlukan suatu metode, sehingga terhadap obyek geometri fraktal ini dapat diturunkan suatu persamaan umum pada geometri fraktal. Berdasarkan uraian di atas maka peneliti tertarik untuk meneliti penjabaran geometri fraktal sebagai deret dan penyelesaiannya.

B. Pembatasan Masalah

Penggunaan barisan dan deret sudah banyak dijumpai dalam berbagai bidang keilmuan, tetapi dalam penelitian ini penggunaan barisan dan deret dibatasi hanya pada obyek geometri fraktal. Penelitian ini hanya memfokuskan penelitian pada beberapa obyek geometri fraktal sebagai contoh aplikasi (penggunaan) barisan dan deret. Obyek yang akan diteliti tersebut adalah obyek geometri fraktal sederhana berupa *himpunan per-tiga tengah cantor*, *kurva von koch*, *segitiga sierpinski* dan *debu cantor*. Penelitian ini akan meneliti proses pembentukan obyek geometri fraktal, aplikasi barisan dan deret pada obyek geometri fraktal dan juga meneliti uji konvergensi pada deret geometri fraktal.

C. Rumusan Masalah

Bertitik tolak dari latar belakang dan pembatasan masalah di atas, dapat dirumuskan masalah sebagai berikut :

- a. Bagaimana proses terbentuknya obyek geometri fraktal?
- b. Bagaimana aplikasi barisan dan deret pada obyek geometri fraktal yang dapat dihitung?
- c. Bagaimana menentukan konvergensi-divergensi deret pada deret geometri fraktal?

D. Tujuan Penelitian

Setiap penelitian atau karya ilmiah disusun pasti memiliki tujuan tertentu yang ingin dicapai, demikian juga penelitian ini. Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. Mendapatkan gambaran yang jelas tentang bagaimana sebuah obyek fraktal dapat dibuat, sehingga menjadi sebuah gambaran umum tentang geometri khususnya geometri fraktal
- b. Memberikan pemahaman yang jelas tentang aplikasi barisan dan deret pada pembentukan obyek geometri fraktal.
- c. Menentukan konvergensi-divergensi deret pada deret geometri fraktal .

E. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

- a. Untuk lebih memahami ilmu geometri khususnya geometri fraktal.

- b. Mengetahui aplikasi sekuensi dan deret pada geometri fraktal
- c. Mempelajari lebih dalam mengenai uji konvergensi dan pembuktian uji konvergensi pada deret geometri fraktal

F. Tinjauan Pustaka

Peneliti menemukan beberapa referensi berupa skripsi dan laporan penelitian yang berkaitan dengan judul “Aplikasi sekuensi dan Deret pada Perhitungan Geometri Fraktal Sederhana”. Beberapa referensi yang peneliti jadikan refereensi antara lain:

- a. Skripsi yang berjudul “*Barisan Fungsi dan Deret Fungsi*” yang disusun oleh Ari Suryantoko.⁶ Skripsi ini menjelaskan fungsi sebagai barisan dan deret secara teoritis. Skripsi ini juga berisi definisi, teorema, lemma dan contoh-contoh sekuensi dan deret.
- b. Laporan penelitian berjudul “*Perkenalan dengan Geometri Fraktal*” yang disusun oleh beberapa dosen senior di UGM, yakni B. Susanta, R. Sumantri, Suprpto, Janoe Hendarto, Widodo dan Lina Aryati. Penelitian ini menjelaskan fraktal sebagai ilmu geometri secara tinjauan literatur.

Beberapa tulisan di atas menarik minat peneliti untuk lebih lanjut meneliti tentang sekuensi dan deret ketika diaplikasikan kepada geometri fraktal. Skripsi Ari Suryantoko memberikan banyak informasi teoritis tentang sekuensi (barisan) dan deret. Sedangkan penelitian para dosen UGM memberikan informasi secara teoritis literature tentang geometri fraktal.

⁶ Mahasiswa S1 Matematika UGM lulus tahun 2006.

Kedua penelitian tersebut menjadi referensi penting yang peneliti ambil sehingga menjadi sebuah judul penelitian, yakni: *“Aplikasi Sekuensi dan Deret pada Pembentukan Geometri Fraktal Sederhana”*.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Sekuensi dan Deret

1. Definisi Sekuensi dan deret

Suatu *sekuensi* adalah suatu rangkaian dengan unsur $u_1, u_2, u_3, \dots$ yang terbentuk menurut suatu aturan tertentu. Suatu deret dinyatakan sebagai penjumlahan $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ unsur-unsur suatu sekuensi. Suatu sekuensi tertentu atau deret tertentu mempunyai unsur-unsur tertentu, suatu sekuensi atau deret tak tentu mempunyai banyak unsur tak terbatas. Unsur umum, atau unsur ke- n dari suatu sekuensi atau deret menunjukkan aturan atau formula untuk memperoleh suatu unsur.

Barisan adalah urutan suku-suku yang dibentuk mengikuti aturan atau kaidah yang telah ditetapkan, dengan kata lain barisan adalah sekuensi. Barisan berhingga hanya mengandung suku-suku yang berhingga banyaknya. Sedangkan barisan tak berhingga tidak mempunyai suku terakhir.

Semua bilangan asli, yaitu 1, 2, 3, 4, merupakan barisan tak berhingga. Nomor-nomor halaman dari sebuah buku dan nomor-nomor telepon pada buku telepon merupakan barisan berhingga.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots$ adalah barisan dan $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$

adalah deret tertentu dengan unsur ke- n adalah $1/n$.

a. Deret Geometri

Ditinjau deret dengan n suku

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \dots\dots\dots (1)$$

Deret ini dinamakan deret geometri. Rumusan untuk S_n , yaitu jumlah deret geometri, dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut.

Jumlah persamaan (1) dikalikan dengan r . maka diperoleh:

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \dots\dots\dots(2)$$

Selanjutnya persamaan (1) dikurangkan dengan persamaan (2), maka diperoleh:

$$rS_n - S_n = ar^n - a$$

Jadi,

$$S_n(r - 1) = a(r^n - 1) \quad \text{atau} \quad S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

Sehingga,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r}$$

Jika $|r| < 1$, maka r^n nilai mutlaknya menurun bilamana n naik sehingga:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$$

Diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - r} = S$$

Jadi, jika $|r| < 1$, jumlah S_n suatu deret geometri akan mendekati suatu limit apabila cacah suku-sukunya dinaikkan tak terbatas.

Jika $|r| > 1$, maka r^n akan menjadi tak berhingga apabila n naik tak terbatas, sehingga $|S_n|$ akan terus naik terus tanpa batas.

Jika $r = -1$ akan dijumpai keadaan yang menarik. Dalam hal ini deret geometri tersebut menjadi

$$a - a + a - a + \dots$$

Dalam hal ini, jika n genap, S_n adalah nol. Jika n ganjil, S_n sama dengan a . Bilamana n naik terus tanpa batas, nilai mutlak jumlah S_n tidak naik terus tak terbatas tetapi masih S_n belum mendekati suatu limit.

Deret semacam ini dinamakan deret berayun.

b. Deret Konvergen dan Divergen

Ditinjau deret

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n$. Variabel S_n yang menunjukkan jumlah deret itu merupakan fungsi n . jika sekarang cacah suku, yakni n , dibiarkan naik tanpa batas, salah satu dari dua keadaan ini dapat terjadi.

Keadaan I: S_n mendekati suatu limit S yang ditunjukkan dengan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Dalam hal ini, deret tak berhingga dikatakan *konvergen* dan menuju ke nilai S atau mempunyai jumlah S .

*Keadaan II: Dalam hal ini S_n tidak mendekati suatu nilai limit. Deret tak berhingga ini lalu dikatakan *divergen*.*⁷

⁷ Louis A. Pipes & Lawrence R. Harvil, *Matematika Terapan Untk Para Insinyur dan Fisikawan*, (Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 1991), hlm. 1108

Sebagai contoh, deret

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ atau $2 - 2 + 2 - 2 + \dots$ dikatakan divergen.

Dalam matematika terapan deret konvergen adalah sangat penting, dengan demikian perlu ada suatu cara untuk menguji kekonvergenan atau kedivergenan suatu deret.

2. Uji Konvergensi-Divergensi Deret

Penentuan konvergensi atau divergensi deret adalah lebih sulit bila tidak dapat diperoleh bentuk umum untuk S_n . Dalam kasus-kasus sedemikian dilakukan pengujian-pengujian berikut:

a. *Kondisi perlu untuk konvergensi.*

Bila $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergen maka $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Artinya bila unsur ke- n dari

deret tidak mendekati 0 bila n menjadi tidak tertentu, maka deret adalah divergen.

Jadi $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ adalah syarat perlu tetapi bukan syarat cukup bagi konvergensi.

Dengan kata lain,

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, deret adalah divergen

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut

Contoh 3.1.

Diberikan deret $\frac{1}{9} + \frac{2!}{9^2} + \frac{3!}{9^3} + \frac{4!}{9^4} + \dots$

Bentuk umum :

$$u_n = \frac{n!}{9^n}$$

Dapat dicari $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{9^n} = \infty$, jadi deret ini divergen

b. *Uji deret alternatif.*

Suatu deret alternatif adalah deret yang mempunyai unsur negatif atau positif. Deret demikian konvergen bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dan setiap unsur adalah lebih kecil dalam nilai absolut dibandingkan unsur-unsur terlebih dulu, artinya $|u_{n+1}| < |u_n|$ untuk semua $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Contoh 3.2.

Diberikan deret

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \frac{7}{2^4} + \dots$$

Bentuk umum

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^n}$$

Dapat dilihat bahwa unsur-unsur pembilang adalah 1, 3, 5, 7, ... yang merupakan deret aljabar dengan unsur pertama adalah 1 dan beda adalah 2; unsur ke- n dari deret ini adalah $2n - 1$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dan $|u_{n+1}| < |u_n|$ untuk setiap n , sehingga deret alternatif adalah konvergen

c. *Uji Cauchy Rasio.*

Andaikan

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n+1} + \dots$$

adalah unsur-unsur positif. Dengan menggunakan rasio u_n dan u_{n+1} , $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

dan andaikan

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Maka,

Bilai $\rho < 1$, deret adalah konvergen

Bilai $\rho > 1$, deret adalah divergen

Bilai $\rho = 1$, uji ini gagal.

Contoh 3.3.

Diberikan deret

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots$$

Bentuk umum

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

Maka u_{n+1} dapat diperoleh dengan mengganti n dengan $(n+1)$

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\text{Sehingga } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}$$

Sekarang di cari $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2/n + 1/n^2}{1 + 2/n} \\ &= \frac{1 + 0 + 0}{1 + 0} = 1\end{aligned}$$

Ternyata $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ yang tidak memberikan informasi apa-apa yang memungkinkan deret tersebut dapat divergen dan juga dapat konvergen. Hasil ini dikembalikan kepada uji kondisi perlu deret untuk konvergen. Dimana,

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, deret adalah divergen

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut

Diambil $u_n = \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1$$

Dikarenakan $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, maka deret ini divergen.

d. *Konvergensi Mutlak.*

Sejauh ini dibahas deret dengan suku-sukunya positif. Beberapa deret terdiri dari suku-suku positif dan suku-suku negatif secara bergantian yang

disebut dengan deret selang-seling. Sebagai contoh, deret $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

u_n menyatakan suku ke- n dari deret secara umum, maka dalam hal ini u_n mungkin positif atau negatif. Tetapi $|u_n|$, atau “mod u_n ” menyatakan nilai numerik atau mutlak dari u_n , sehingga jika $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots$ adalah deret yang suku-sukunya positif dan negatif secara bergantian, maka deret $|u_1| + |u_2| + |u_3| + |u_4| + \dots$ adalah deret yang suku-sukunya positif.

Jadi, jika $\sum u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Maka $\sum |u_n| = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

1. Suatu deret selang-seling dikatakan *konvergen mutlak* atau konvergen tak bersyarat apabila deret yang dibentuk dari deret itu dengan menjadikan semua suku-sukunya positif adalah konvergen.

Dengan kata lain, jika $\sum |u_n|$ konvergen, maka deret $\sum u_n$ konvergen mutlak.

2. Sedangkan apabila setelah menjadikan suku-sukunya positif merupakan deret divergen, tetapi deret u_n konvergen maka disebut konvergen bersyarat.

Dengan kata lain, jika $\sum |u_n|$ tidak konvergen, tetapi $\sum u_n$ konvergen, maka $\sum u_n$ dikatakan konvergen bersyarat.

Contoh 3.3

Diberikan deret $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}$

Adalah konvergen mutlak karena deret

$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \dots + \frac{1}{n^n}$ adalah konvergen, dengan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^n} = 0$$

e. *Uji Perbandingan.*

Dalam banyak kasus dapat ditentukan apakah suatu deret itu konvergen atau divergen dengan membandingkan unsur per unsur dengan deret yang diketahui konvergen atau divergen. Suatu deret dengan unsur-unsur positif adalah konvergen, bila setiap unsurnya adalah lebih kecil atau sama dengan unsur yang terkait dari suatu deret yang diketahui konvergen. Deret geometri yang dibicarakan di atas dan "*deret p*" sering berguna dalam menerapkan uji perbandingan.

Deret p dinyatakan sebagai :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

Deret ini konvergen bila $p > 1$ dan divergen bila $p \leq 1$. bila $p = 1$ deret adalah deret harmonis.

CATATAN:

Karena konvergensi atau divergensi suatu deret tidak dapat dipengaruhi oleh pengabaian suatu jumlah unsur tertentu, maka uji perbandingan dapat diterapkan pada unsur-unsur $u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots$ dibandingkan pada unsur $u_1, u_2, u_3, \dots$

Contoh 3.5.

Diberikan deret

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

Dicari deret p pembanding yang sudah diketahui status kekonvergenannya, misal deret $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ yang sudah diketahui adalah deret konvergen, karena

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Jika dibandingkan suku-suku yang bersesuaian kecuali suku pertama dan kedua, maka akan terlihat bahwa:

$\frac{1}{3^3} < \frac{1}{2^3}; \frac{1}{4^4} < \frac{1}{2^4}; \frac{1}{5^5} < \frac{1}{2^5};$ dan seterusnya untuk semua suku berikutnya.

Dapat dilihat bahwa suku bersesuaian dari deret pertama selalu lebih kecil dari suku bersesuaian pada deret padanannya yang diketahui merupakan deret konvergen.

Dengan demikian deret $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$ adalah konvergen.

3. Konvergensi Deret Bilangan riil

Definisi 1

Diberikan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan riil. Deret bilangan riil

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \dots + x_k + \dots$ adalah jumlahan semua suku dari barisan $\{x_n\}$.

⁸Barisan jumlahan deret tersebut adalah $\{S_n\}$, dengan $S_1 = x_1$, $S_2 = x_1 + x_2$,

$S_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ dan $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n$.

Jika $\{S_n\}$ konvergen, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ adalah jumlah deret. Elemen x_n disebut suku ke- n dan elemen $\{S_k\}$ disebut jumlahan parsial k suku pertamanya.

Definisi 2

Suatu deret bilangan riil $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen dan memiliki jumlah S jika

barisan $\{S_n\}$ konvergen ke S . Jika barisan $\{S_n\}$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergen. ⁹

Teorema 1

Deret bilangan riil $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke S jika dan hanya jika untuk setiap

bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika

$k \geq n_0(\varepsilon)$ berlaku

⁸ Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons Inc. 2000), hlm. 89

⁹ Ibid, hlm. 91

$$|S_n - S| = \left| \sum_{n=1}^n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^n x_n \right| < \varepsilon^{10}$$

Teorema 2

- a. jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen, maka berlaku
1. deret $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$
 2. deret $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)$ konvergen dan $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n - \sum_{n=1}^{\infty} y_n$
- b. jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen dan C adalah suatu bilangan riil maka deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cx_n \text{ konvergen dan } \sum_{n=1}^{\infty} Cx_n = C \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{11}$$

Teorema 3

Diberikan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan riil positif. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen

jika dan hanya jika barisan jumlahan parsial $S = \{S_k\}$ terbatas. Dalam hal ini

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup_{1 \leq n \leq \infty} \{S_n\}^{12}$$

Contoh 3.6

Deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ adalah divergen.

¹⁰ Ibid, hlm. 92

¹¹ Ibid, hlm. 93

¹² Ibid, hlm. 93

Barisan jumlahan parsial deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ adalah $\{S_n\}$, dengan $\{S_n\} =$

$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n}$, untuk suatu $k \in N$. Dibentuk sebarang barisan bagian $\{S_{k_n}\}$ di dalam

$\{S_n\}$. Barisan $\{S_n\}$ ini adalah barisan jumlahan parsial deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Jika $k_1 = 2$ maka $S_{k_1} = S_2 = 1 + \frac{1}{2}$

Jika $k_2 = 2^2 = 4$ maka

$$\begin{aligned} S_{k_2} = S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \end{aligned}$$

Jika $k_3 = 2^3 = 8$ maka

$$\begin{aligned} S_{k_3} = S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ &= S_4 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jika $k_4 = 2^4 = 16$ maka

$$\begin{aligned} S_{k_4} &= S_{16} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \\ &= S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > S_8 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$= S_8 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

Secara induktif, jika $k_n = 2^n$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ didapat

$$\begin{aligned} S_{k_n} &> S_{k(n-1)} + 2^{n-1} \left(\frac{1}{2^n} \right) = S_{k(n-1)} + \left(\frac{2^{n-1}}{2^n} \right) \\ &= S_{k(n-1)} + \left(\frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{(n-1)}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n-1+1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Maka terlihat deret akan naik sehingga deret harmonik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen.

Lemma

Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen dalam $\mathbb{R}$ maka $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.¹³

Teorema 4

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dalam $\mathbb{R}$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap

bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika

$l > n \geq n_0(\varepsilon)$ berlaku

$$|S_l - S_k| = |x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_{l-1} + x_l| < \varepsilon \quad ^{14}$$

B. Geometri

1. Dasar geometri

Pada perkembangannya terdapat beberapa penggolongan geometri:

a. Berdasarkan lingkup atau bidang kajian :

¹³ Ibid, hlm. 96

¹⁴ Ibid, hlm. 97

- 1) Geometri bidang (dimensi dua)
 - 2) Geometri ruang (dimensi tiga)
 - 3) Geometri dimensi n
 - 4) Geometri bola
 - 5) dan lain-lain
- b. Berdasarkan bahasa yang digunakan, terdapat :
- 1) Geometri analitik: geometri dengan bahasa aljabar
 - 2) Geometri murni: geometri dengan bahasa gambar
 - 3) Geometri diferensial: geometri dengan bahasa derivatif
- c. Berdasarkan sistem aksioma
- 1) Geometri *euclid*
 - 2) Geometri *non-euclid*
 - 3) Geometri proyektif
- d. Berdasarkan transformasi
- e. Berdasarkan metode pendekatan.¹⁵

Geometri seperti yang telah dikenal, adalah ilmu yang berkaitan dengan ilmu ukur. Berdasar makna kata tersebut, maka geometri dikembangkan dan diarahkan guna mengetahui perhitungan benda-benda yang ada di alam ini.

- a. Titik, garis dan bidang

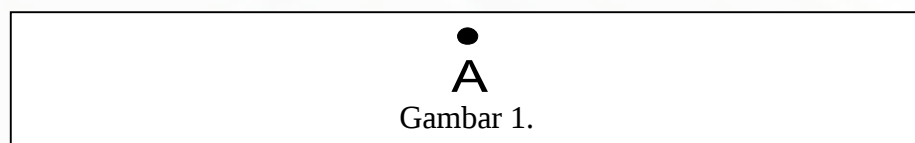
Tiga unsur pangkal dalam geometri, yaitu titik, garis dan bidang.¹⁶

¹⁵ B. Susanto dan Bambang Sudijono, *Model Matematika*. (Jakarta: Karunika Universitas Terbuka, 1989), hlm. 89

¹⁶ Tim Penyusun UNY. *Materi Perkuliahan: Geometri*, (Universitas Negeri Yogyakarta, 2003), hlm. 1

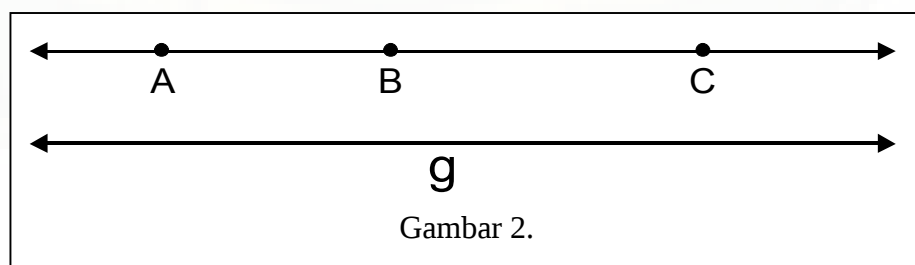
1) Titik

Sebuah titik dipikirkan sebagai suatu tempat/ posisi dalam ruang. Titik tidak memiliki panjang maupun ketebalan. Bekas tusukan jarum, atau bekas ujung pensil di atas kertas, dapat dipikirkan sebagai model fisik dari sebuah titik. Sebuah titik direpresentasikan dengan sebuah noktah dan diberi nama dengan suatu huruf kapital.¹⁷



2) Garis

Sebuah garis dipikirkan sebagai suatu himpunan titik berderet yang panjang dan tak terbatas, serta tidak memiliki lebar. Seutas benang yang diregangkan, goresan pensil yang mengikuti tepi sebuah garis dapat dipikirkan sebagai model sebuah garis. Sebuah garis direpresentasikan dengan sebuah gambar sinar dengan mata di kedua ujungnya menunjukkan bahwa garis tersebut tak berakhir. Untuk memberi nama sebuah garis, dapat memanfaatkan dua buah titik pada garis tersebut, atau dengan sebuah huruf kecil¹⁸. Cara menuliskannya :



¹⁷ Materi Perkuliahan, *Geometri*, (Universitas Negeri Yogyakarta, 2003) hlm. 1

¹⁸ Ibid. hlm. 01

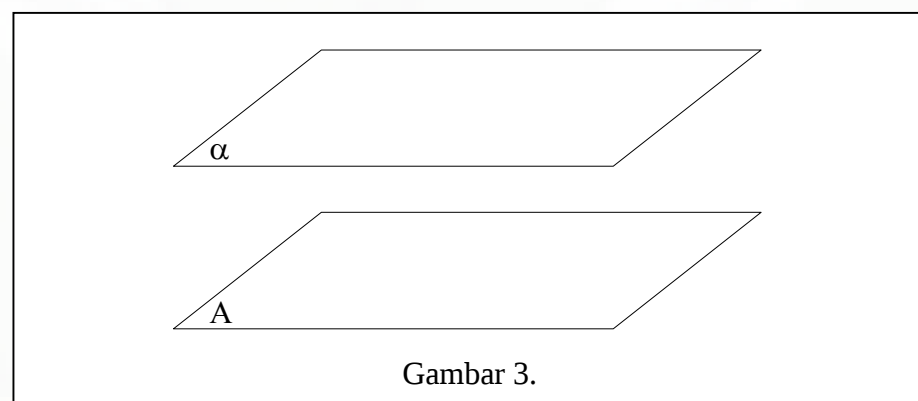
Garis di atas dapat dinyatakan dengan :

$$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BA}, \overleftrightarrow{CB}, \overleftrightarrow{CA} \text{ atau } g.$$

3) Bidang

Sebuah bidang dipikirkan sebagai himpunan titik berderet dan berjajar secara rapat dan tak terbatas serta tidak memiliki ketebalan. Permukaan sebuah meja, atau permukaan selembar kertas putih polos yang dibentang ke segala arah tak terbatas dapat dipikirkan sebagai sebuah model fisik sebuah bidang. Sebuah bidang direpresentasikan dengan sebuah gambar jajaran genjang dan nama sebuah bidang dapat menggunakan sebuah huruf capital atau huruf Yunani.¹⁹

Nama sebuah bidang menggunakan huruf-huruf Yunani: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \varsigma, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega$ dan sebagainya. Dapat juga menggunakan huruf kapital.²⁰



Secara ringkas, dapat disederhanakan keterkaitan antara ketiga hal tersebut. Dimana sebuah garis dapat dinyatakan sebagai sekumpulan titik

¹⁹ Ibid. hlm .01

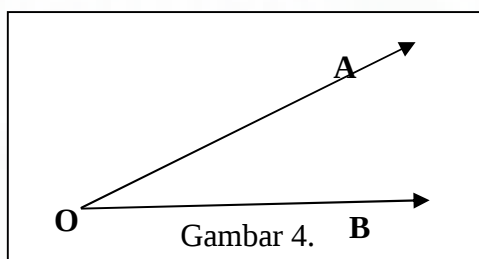
²⁰ Ibid. hlm. 31

yang berjajar. Sedangkan bidang adalah sekumpulan garis-garis yang berjajar sejajar dan beraturan/ saling himpit.

Secara umum, sudah dapat diproyeksikan titik di dimensi 1, 2 dan 3. Akan tetapi untuk dimensi ke-4 dan seterusnya, secara geometris, para ilmuwan belum dapat menggambarannya.

b. Sudut dan segitiga

Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya²¹.



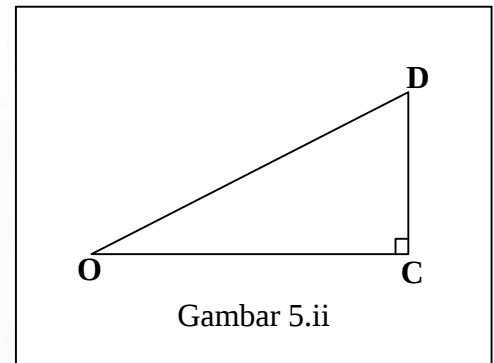
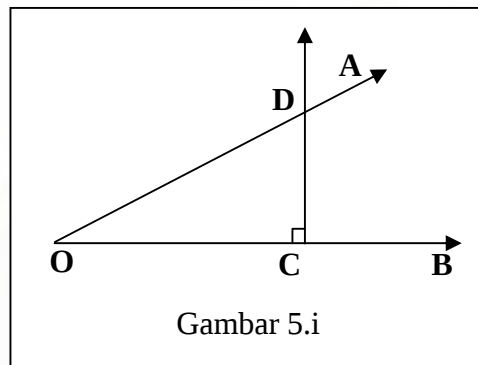
Sebuah sudut yang tertentu oleh $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ dan dilambangkan dengan $\angle AOB$ atau $\angle BOA$ atau $\angle O$. $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ disebut kaki-kaki sudut dan titik O disebut titik sudut. Sebuah sudut disebut sudut nol bila dan hanya bila kaki-kaki sudut tersebut berimpit. Sedangkan sebuah sudut disebut lurus bila dan hanya bila kaki-kaki sudut tersebut berlawanan.²²

Trigonometri merupakan cabang ilmu yang pembahasannya didasarkan pada segitiga siku-siku. Oleh karena itu, untuk gambar 4. diubah menjadi bentuk segitiga siku-siku dengan menambahkan sinar garis

²¹ Materi Perkuliahan, *Geometri*, (Universitas Negeri Yogyakarta, 2003) hlm. 4

²² Ibid. hlm. 4

tegak lurus garis OB, seperti terlihat pada gambar 5.i. setelah diubah, akan terbentuk sebuah segitiga siku-siku OCD, seperti pada gambar 5.ii.



2. Geometri Fraktal

a. Teori Chaos

Sebelum dirincikan apa itu geometri fraktal, sekilas dipelajari *Teori Chaos* yang memiliki kaitan dengan fraktal.

Dalam fisika dan matematika, teori chaos menjelaskan tentang perilaku dari sistem dinamis nonlinear tertentu yang pergerakannya sangat bergantung kepada kondisi awal. Sebagai hasil dari ketergantungan pada kondisi awal ini adalah bahwa kondisi awal menyebabkan gangguan yang pada akhirnya akan terlihat sebagai suatu yang acak. Hal ini terjadi walaupun sistem tersebut sudah diketahui, berarti bahwa pergerakan yang akan datang sangat bergantung sepenuhnya kepada kondisi awal mereka.

Chaos pertama kali terlihat dalam sebuah sistem yang dikenal dengan nama sistem dinamis. Tidaklah berlebihan jika kelahiran sistem dinamis dikaitkan dengan seorang matematikawan Perancis, *Henri Poincare'* pada awal abad ke-20. Pada era itu, perhatian matematikawan terpusat pada pencarian solusi dari suatu sistem. *Henri Poincare'* adalah yang pertama

kali membangun suatu metode untuk menganalisis sistem tanpa menghitung solusi secara eksplisit dan melahirkan teori modern tentang persamaan diferensial. Dari tulisan *Henri Poincare'*, dapat disimpulkan bahwa *Poincare'* telah mengenal chaos.

Sebagai contoh dari fenomena chaos adalah yang ditemukan oleh Edward Lorenz yang tertarik kepada chaos karena kejadian yang secara tidak sengaja terjadi pada pekerjaannya pada peramalan cuaca pada tahun 1961. Lorenz telah menggunakan komputer untuk menggambarkan simulasi dari perhitungan cuaca. Hasil yang mengejutkan adalah ternyata hasil peramalan data menggunakan komputer berbeda dengan perhitungannya sendiri yang hanya berbeda pada digit ke-6 dibelakang koma, yang berarti perbedaannya hanyalah sedikit sekali. Akan tetapi walaupun perbedaan yang terjadi adalah sangat kecil ternyata menyebabkan pergerakan yang sungguh jauh berbeda.

Sebuah sistem dinamis dapat dikategorikan sebagai chaos bilamana memenuhi beberapa hal berikut : ²³

1. harus bergantung pada kondisi awal

Hal ini berarti bahwa setiap titik pada sistem dinamis sangat bergantung pada titik yang lain. Perubahan sedikit saja nilai pada kondisi awal akan menyebabkan perubahan yang besar dan berbeda pada pergerakan berikutnya.

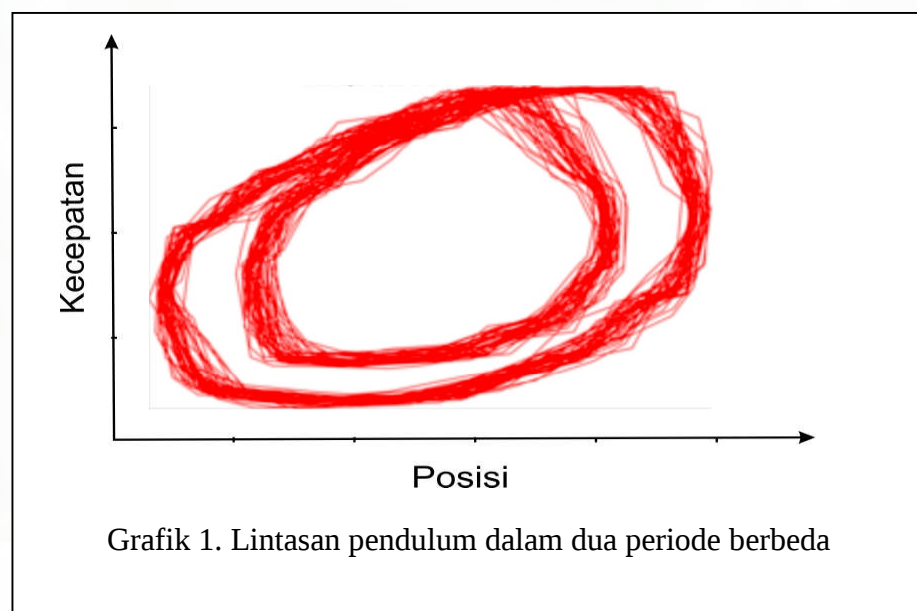
²³ http://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory"

2. pencampurannya secara topologi

Percampuran disini berarti bahwa sistem dinamis akan meningkat dari waktu ke waktu akan berakibat pada lintasan yang akan semakin tumpang tindih pada titik tertentu. Percampuran disini dapat juga dipersepsikan pencampuran warna atau cairan sebagai contoh sistem yang chaos.

3. lintasannya haruslah rapat.

Lintasan yang terbentuk akan menuju pada suatu atraktor tertentu. Atraktor ini dapat berupa titik, kurva, bidang ataupun luasan. Sebagai contoh menggambarkan atraktor adalah lintasan pendulum pada permukaan yang cekung. Dimana lintasannya dapat digambarkan dalam grafik, sebagai berikut



Gambaran tersebut menggambarkan grafik posisi pendulum pada dua periode berbeda dimana posisi pendulum sebagai sumbu-x dan kecepatan pendulum pada sumbu-y.

Pelemparan dadu 100 kali adalah contoh kejadian yang berulang, akan tetapi perulangan tersebut tidaklah beraturan. Hal ini karena angka satu keluar kira-kira sebanyak $\frac{1}{6}$ kali banyaknya pelemparan. Peristiwa ini dinamakan proses random (acak). Melempar dadu mengandung unsur ketidakpastian (kerandoman). Sebagai contoh pelemparan dadu sebanyak 30 kali memberikan hasil sebagai berikut :

5 1 5 3 2 4 2 5 3 1 6 4 2 5 1 3 2 4 6 5 1 5 2 5 3 1 4 6 2 1

Apabila pelemparan dadu tersebut diteruskan sampai lemparan ke- n maka tidak dapat ditemukan aturan yang baku dan pasti atas kemungkinan kejadian angka dadu yang muncul.

Fenomena chaos sangat akrab dengan kehidupan manusia, mulai pada sistem elektronik, aliran listrik, sinar laser, lintasan benda-benda di angkasa luar, pergerakan respon pada sel syaraf, pencampuran kimia, asap rokok, peramalan cuaca, iklim sampai kepada perilaku sosial manusia dalam sistem ekonomi dan keuangan. Fenomena chaos dalam fluktuasi harga saham atau nilai valuta asing dapat terlihat jika harga saham tersebut dikaitkan dengan variabel waktu. Hasilnya adalah kurva berbentuk gergaji yang giginya tidak teratur.

b. Geometri fraktal

Chaos yang memiliki corak yang akan terlihat tidak teratur seperti pada lintasan orbit benda angkasa. Alam semesta ini atau bumi merupakan satu sistem yang kompleks. Di satu pihak terdapat orbit-orbit dan siklus-siklus

yang teratur, tetapi di lain pihak dapat memunculkan fenomena geometri yang kacau, ruwet, dan sukar dijelaskan.

Keterbatasan manusia dalam memahami kompleksitas alam, telah menyebabkan manusia kemudian memecah suatu sistem menjadi subsistem-subsistem kecil (*fraction*) yang lebih mudah dipelajari. Suatu titik ketika mengorbit dalam lintasan tidak pernah mengulang tempat kedudukan yang sama dalam waktu tak terhingga, maka dikatakan orbitnya menganut gerakan chaos. Di lain pihak, ada perjalanan orbit yang selalu mengulang kembali tempat kedudukan sebelumnya. Hingga saat ini orbit bulan, bumi, bahkan beberapa komet di tata surya, dianggap menganut lintasan yang tetap, sehingga mereka bukan termasuk kategori chaos.

Fraktal (*fractal*) adalah sebuah bentuk grafik yang mengandung perulangan atas dirinya sendiri yang bisa dibangkitkan dengan fungsi matematika. Istilah ini berasal dari bahasa latin *fractus* yang berarti "mematahkan". Pola fraktal ini juga dapat ditemukan pada alam nyata, seperti daun paku-pakuan. Bentuk fraktal memperlihatkan bahwa apabila bangun fraktal diperbesar terlihat bangun serupa dan sebangun berukuran lebih mini.

Bangun geometri dapat dengan mudah dijumpai keberadaanya di alam ini. Benda-benda dengan mudah dapat dikenali dan disebutkan namanya, tetapi banyak benda yang sulit didefinisikan apa istilahnya. Tiang bendera dilihat dari jauh seperti garis, sebuah meja dilihat dari atas berupa segi-

empat, dan peti itu berbentuk balok, yang masing-masing mempunyai dimensi satu, dua, dan tiga.

Jika suatu himpunan F merupakan fraktal maka secara spesifik terpikir hal-hal berikut: ²⁴

- 1) F mempunyai struktur yang halus (fine structure), yakni rincian pada skala sembarang kecilnya.
- 2) F terlalu tak teratur untuk diuraikan dalam bahasa geometri tradisional, baik secara lokal maupun global.
- 3) Kerap kali F memiliki bentuk kesebangunan diri mungkin secara aproksimasi maupun secara statistis
- 4) Biasanya dimensi fraktal dari F (bagaimanapun menentukannya) lebih besar daripada dimensi topologisnya.
- 5) Kebanyakan F didefinisikan dengan cara yang sederhana, mungkin secara rekursif

Sudah dikenal bahwa kurva mulus adalah suatu bangun berdimensi 1 sedangkan luasan memiliki dimensi 2. Sedangkan definisi suatu fraktal dapat dicari dengan rumus

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}, \quad ^{25}$$

Dimana: D = Dimensi

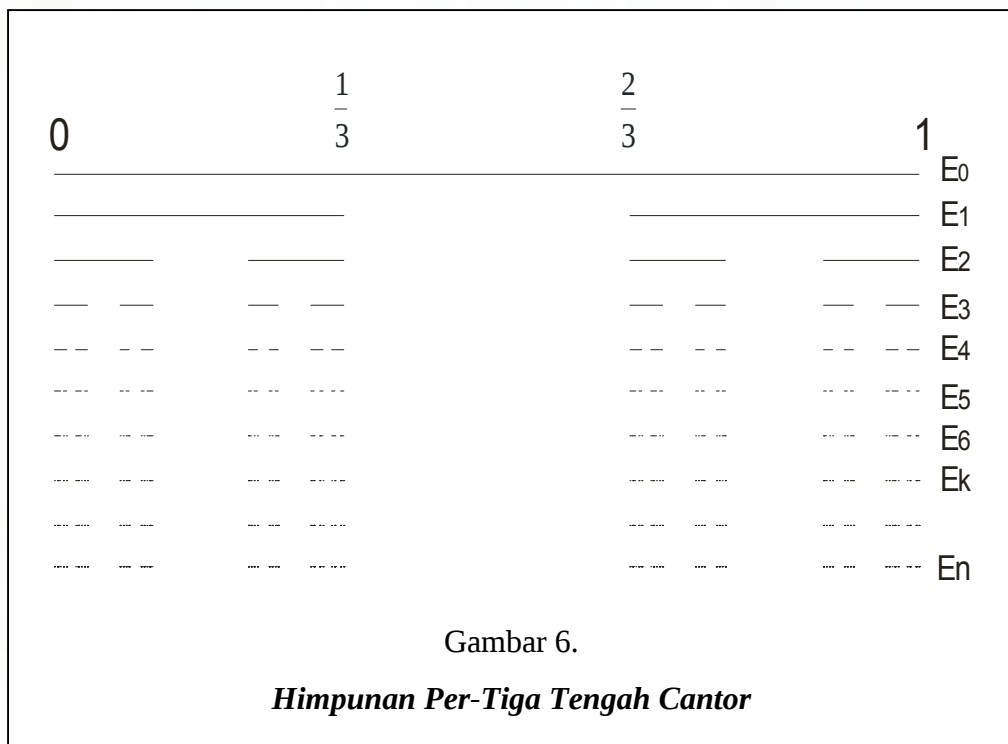
ε = panjang selang

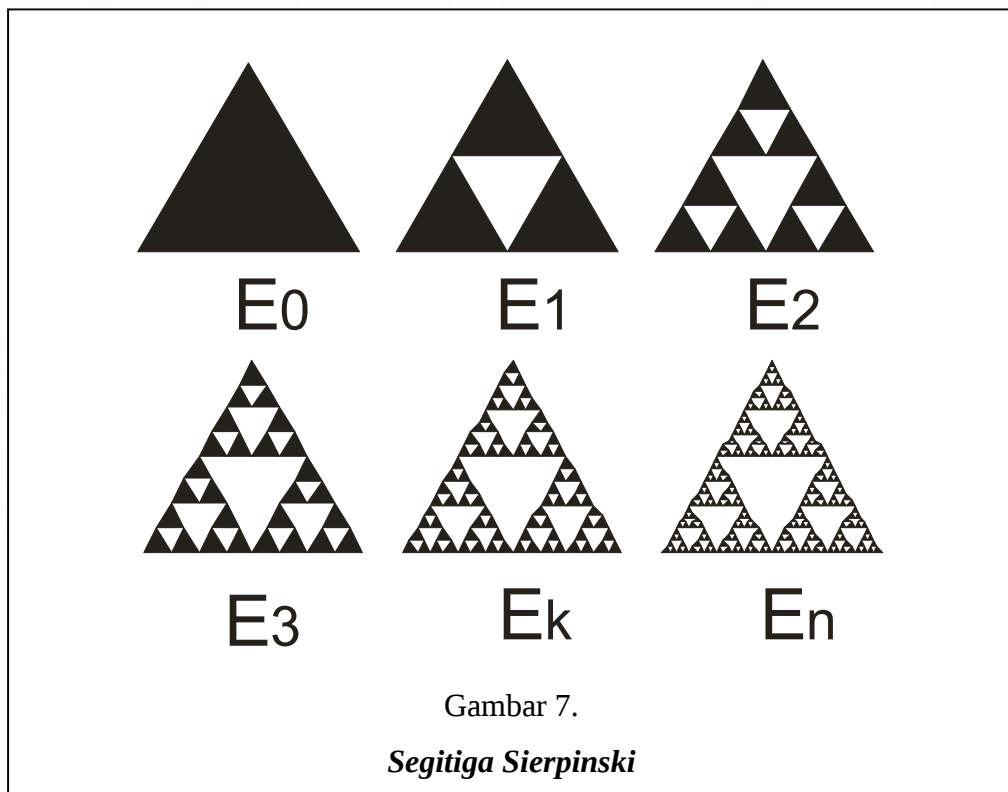
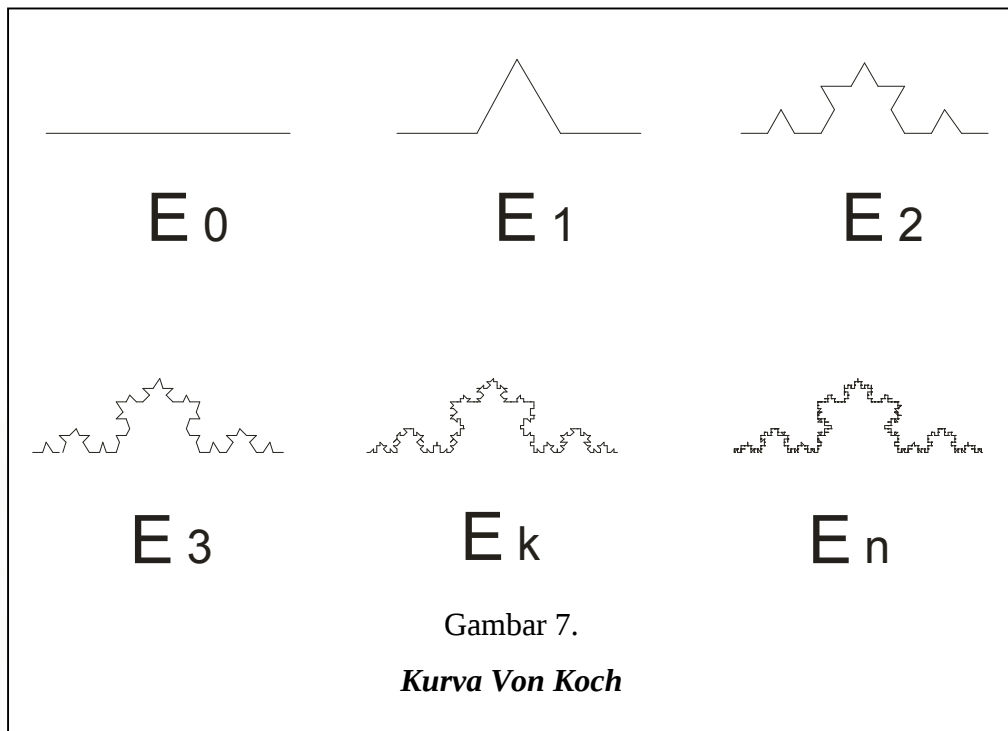
²⁴ B. Susanta, R. Sumantri, dkk. *Perkenalan Dengan Geometri Fraktal*. (Yogyakarta: FMIPA-UGM. 1992), hlm. 9.

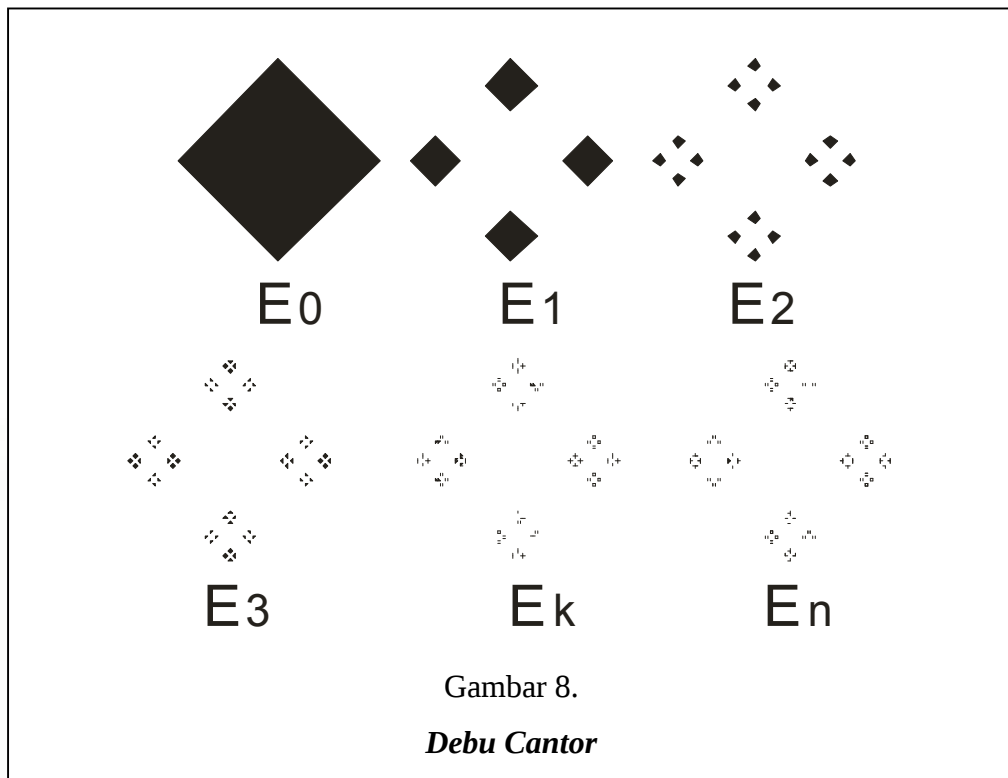
²⁵ Ibid, hlm. 29

$$N(\varepsilon) = \text{banyak selang}$$

Geometri fraktal yang ada dan berkembang memiliki banyak jenis dan bentuk. Akan tetapi yang akan dijelaskan adalah fraktal yang proses pembentukannya secara mudah. Adapun beberapa contoh geometri fraktal adalah *himpunan per-tiga tengah cantor*, *kurva von koch*, *segitiga sierpinski* dan *debu cantor*. Berikut gambar himpunan per-tiga tengah cantor, kurva von koch, segitiga sierpinski dan debu cantor:







BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*) dan penelitian yang bersumber dari data-data atau bahan-bahan tertulis yang berkaitan dengan topik masalah yang diangkat, yaitu *Aplikasi Sekuensi dan Deret Pada perhitungan Geometri Fraktal Sederhana*. Penelitian ini merupakan studi pustaka yang lebih memerlukan olahan filosofik dan teoritik dari pada uji empirik di lapangan.²⁶

B. Sumber data

Adapun sumber data yang dipergunakan dalam penelitian ini terdiri atas dua kategori, yaitu :

- a. Data primer, berupa buku *Measure, Topology, and Fractal Geometry* karya Gerald A. Edgar sebagai acuan tentang materi geometri fraktal dan buku *Introduction to Real Analysis* karya Robert G. Bartle dan D.R Sherbert sebagai acuan yang menjelaskan pada materi barisan dan deret.

²⁶ Noeng Muhadjir, *Metodologi Penelitian Kualitatif*, Yogyakarta : Rake Sarasin, 1996, hal. 159

- b. Data sekunder, yaitu data tambahan yang bersumber pada buku-buku, artikel, ataupun penelitian-penelitian dalam bentuk skripsi yang ada kaitannya dengan pembahasan penelitian ini. Antara lain : buku *The Fractal Geometry of Natural* karya Benoit B. Mandelbrot, buku *Chaos, Fractals and Noise (Stochastic aspect of dynamics)*, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems (Theory and experiment)*, karya Andrzej Lasota and Michael C. Mackey, dan buku *Matematika terapan Untuk Insinyur dan Fisikawan* karya Louis A. Pipes and Lawrence R. Harvill. Paper berjudul "*Sekali Lagi tentang Teori Chaos*". yang ditulis oleh Dr. Johan Matheus Tuwankotta.²⁷ Paper ini berisikan tentang definisi chaos, fenomena chaos di alam sekitar dan perbedaan chaos dengan fraktal. Paper berjudul "*Geometri Fraktal di Goyang Inul*" yang ditulis oleh Dr. Sari Bahagiarti Kusumayudha.²⁸ Yang berisi tentang fenomena goyang Inul dikaitkan dengan fraktal dan beberapa aplikasi fraktal di berbagai ilmu pengetahuan.

Beberapa tulisan di atas menjadi motivasi bagi penulis untuk meneliti lebih lanjut tentang fraktal, terutama perhitungan pada proses terbentuknya bentuk geometri fraktal dikaitkan sebagai sekuensi dan deret. Dari tulisan Johan Matheus Tuwankota dan Sari Bahagiarti Kusumayudha belum ditemukan penjelasan yang jelas tentang obyek fraktal dikaitkan dengan sekuensi dan deret. Pada kedua tulisan tersebut baru dijelaskan beberapa

²⁷ Dosen senior di Departemen Matematika Institut Teknologi Bandung.

²⁸ Dosen Jurusan Teknik Geologi UPN "Veteran" Yogyakarta dan banyak meneliti tentang fenomena Fraktal.

fenomena fraktal yang ada di sekitar manusia dan belum menjelaskan perhitungannya.

C. Pengumpulan dan Analisa data.

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan sehingga pengumpulan data yang digunakan adalah metode dokumenter, yaitu melacak berbagai sumber tertulis yang memuat berbagai tema dan pokok kajian yang dibahas. Metode analisis data yang digunakan adalah metode deskriptif kualitatif.

Data yang telah terkumpul dan diinterpretasikan kemudian dianalisis dengan metode deskriptif kualitatif yaitu menjelaskan variabel-variabel yang diteliti.

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Proses Pembentukan Obyek Geometri Fraktal

1. Himpunan per-tiga tengah Cantor

Himpunan per-tiga tengah Cantor adalah fraktal yang paling dikenal dan yang paling mudah dikonstruksikan.

- a. Dimulai dengan membuat selang tertutup $E_0 = [0,1]$ dengan panjang 1 (satu) satuan panjang.

$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline \qquad \qquad \qquad E_0 \end{array}$$

- b. Kemudian dihapus sepertiga selang terbuka tengah pada E_0 sehingga tersisa gabungan 2 selang tertutup $E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ yang masing-masing panjangnya $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \frac{1}{3} \qquad \qquad \frac{2}{3} \qquad \qquad 1 \\ \hline \qquad \qquad \qquad E_1 \end{array}$$

- c. Dihapus sepertiga selang terbuka tengah dari masing-masing selang tertutup dalam E_1 ini dan diperoleh gabungan 4 selang tertutup yang

- i. F adalah berkesebangunan diri (*self similar*)

Bagian F yang terletak di dalam suatu selang tertutup penyusun dari E_n (yang panjangnya $(3)^{-n}$) sebangun dengan F dengan faktor kesebangunan $(3)^{-n}$. Jadi F memuat potret dirinya sendiri dengan berbagai skala.

- ii. F memiliki struktur halus (*fine structure*)

Yakni, F memuat rincian dengan skala sebarang nilai

- iii. Meskipun F memiliki struktur rinci yang sangat rumit, namun definisi F itu sendiri sesungguhnya sangat jelas

- iv. F diperoleh dengan cara rekursif.

Konstruksinya terdiri atas penghapusan berulang kali sepertiga selang terbuka tengah. Langkah-langkah berurutan memberikan E_n yang merupakan aproksimasi yang makin baik untuk menuju ke F.

- v. Geometri dari F tidak mudah dilukiskan dengan terminologi geometri klasik. F tidak merupakan tempat kedudukan titik-titik yang memenuhi persamaan-persamaan yang sederhana. Setiap titik anggota F terpisah dari titik-titik anggota lainnya dengan jarak kesenjangan berbeda-beda. Berbeda dengan geometri klasik dimana obyek geometri klasik memiliki kerapatan 1 dengan jarak antar titiknya 0.

- vi. Meskipun jumlah panjang seluruh selang yang dihapus mencapai nilai 1 dan sehingga panjang F sendiri menjadi 0, Namun F masih merupakan himpunan tak hingga yang tak terbilang (*uncountable infinite set*).

vii. Dimensi himpunan per-tiga Cantor dapat dicari sesuai dengan definisi

dimensi pada fraktal :

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

Dimana: D = Dimensi

ε = panjang selang

$N(\varepsilon)$ = banyak selang

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log 3^n}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$= 0.630929$$

2. Kurva Von Koch

Menggambar kurva Von Koch melalui beberapa langkah sebagai berikut :

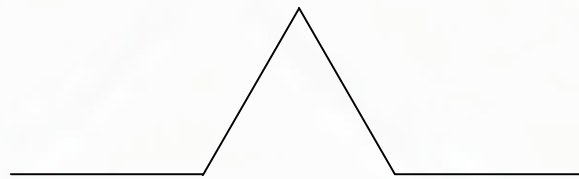
a) Berawal dari menggambar garis dengan selang tertutup $E_0 = [0,1]$

dengan panjang selang tertutupnya 1 satuan panjang.

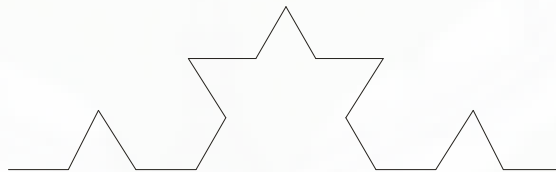
$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline \end{array}$$

$$E_0$$

- b) Himpunan E_1 diperoleh dengan membagi E_0 menjadi tiga bagian dan menghilangkan selang terbuka yang tengah dan menggantinya dengan 2 kaki segitiga sama sisi yang alasnya segmen garis yang dihapus, sehingga terdapat 4 ruas garis dengan panjang $\frac{1}{3}$ panjang selang E_0 .

 E_1

- c) Himpunan E_2 diperoleh dengan melakukan prosedur tadi pada setiap segmen pada E_1 . Pada E_2 terdapat $16 = (4^2)$ ruas garis dengan panjang $\frac{1}{9} = (3)^{-2}$ panjang selang E_0 .

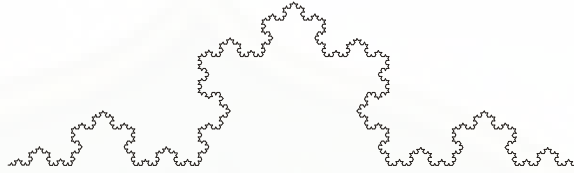
 E_2

- d) Prosedur ini dilakukan terus-menerus. E_n diperoleh dari E_{n-1} dengan mengganti setiap sepertiga tengah segmen pada E_{n-1} dengan 2 kaki segitiga sama sisi. Pada E_3 terdapat 4^n ruas garis dengan panjang $(3)^{-n}$ panjang selang E_0 .

Diperoleh barisan kurva poligon E_n dengan $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ $n \in \mathbb{N}$.

Limit barisan ini untuk $n \rightarrow \infty$ adalah suatu kurva yang dinamakan

kurva Von Koch. Untuk n yang semakin besar kurva pendekatan E_{n-1} & E_n hanya berbeda dalam rinciannya yang semakin halus.



E_n

Kurva Von Koch memiliki sifat-sifat yang dalam hal banyak memiliki persamaan dengan himpunan per-tiga Debu Cantor yang tertera dalam daftar di atas.

Kurva Von Koch adalah suatu fraktal. Akan diperiksa sifat-sifat karakteristik, yakni :

- i. Kurva Von Koch adalah berkesebangunan diri (*self similar*)

Bagian Kurva pada bagian setiap detailnya merupakan bentuk kesebangunan dengan skala berbeda.

- ii. Kurva Von Koch memiliki struktur yang halus (*fine structure*)

Kurva memuat rincian dengan sebarang skala.

- iii. Kurva Von Koch diperoleh dengan cara proses berulang (*rekursif*).

Pembentukan Kurva Von Koch merupakan proses berulang dari penghapusan berulang kali sepertiga selang terbuka tengah dan menggantinya dengan dua sisi segitiga sama sisi.

- iv. Meskipun proses dilakukan sampai pada n berapapun tetap saja masih dapat diperoleh pertambahan panjang yang mendekati nilai panjang tak hingga yang tak terbilang (*uncountable infinite set*).

v. Dimensi Kurva Von Koch dapat dicari dengan rumus:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

Dimana: D = Dimensi

ε = panjang selang

$N(\varepsilon)$ = banyak selang

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4^n}{\log \frac{1}{3^{-n}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4^n}{\log 3^n}$$

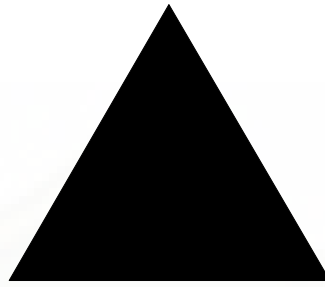
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$= 1.2618$$

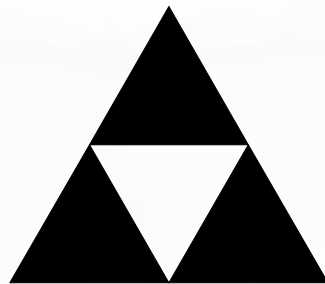
3. Segitiga Sierpinski

Segitiga sierpinski merupakan contoh fraktal yang mudah untuk dipresentasikan. Langkah untuk membentuk segitiga sierpinski sebagai berikut

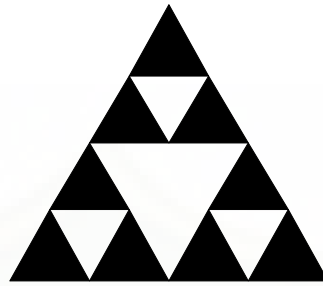
- a. Langkah pertama membuat segitiga sama sisi dengan panjang sisi 1 (satu) satuan panjang sebagai E_0 .

 E_0

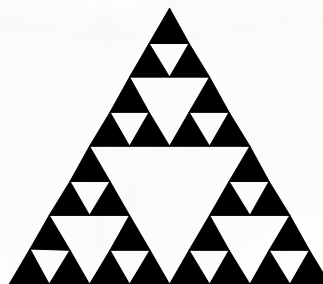
- b. Untuk memperoleh E_1 dilakukan dengan membuat segitiga yang ukuran panjang sisi $\frac{1}{2}$ kali panjang sisi E_0 dan diperbanyak sebanyak tiga buah. Ketiga segitiga tersebut kemudian disusun kembali menjadi berukuran segitiga E_0 .

 E_1

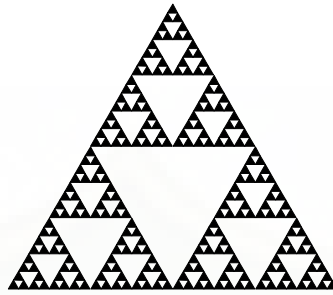
- c. E_2 diperoleh dengan proses berulang seperti pada pembentukan E_1 dengan banyak segitiga adalah 3^2 buah segitiga dengan masing-masing ukuran panjang sisinya adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ panjang sisi segitiga E_0 .

 E_2

- d. E_3 diperoleh dengan proses berulang seperti pada pembentukan E_1 dan E_2 dengan banyak segitiga adalah 3^3 buah segitiga dengan masing-masing ukuran panjang sisinya adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ panjang sisi segitiga E_0 .

 E_3

- e. Dengan proses berulang sampai dengan n kali akan diperoleh bentuk fraktal Segitiga Sierpinski dengan banyak segitiga adalah 3^n buah segitiga dengan masing-masing ukuran panjang sisinya adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ panjang sisi segitiga E_0 .


 E_n

Segitiga Sierpinski merupakan sebuah fraktal. Sifat-sifat karakteristik dalam Segitiga Sierpinski akan diselidiki, yakni sifat-sifat :

- i. Segitiga Sierpinski memiliki berkesebangunan diri (*self similar*)

Bagian dari Segitiga Sierpinski yang terletak di bagian manapun memiliki sifat kesebangunan dimana mereka merupakan kumpulan segitiga sama sisi dengan berbagai skala.

- ii. Segitiga Sierpinski memiliki struktur halus (*fine structure*)

Yakni, memuat rincian dengan skala yang bagaimanapun kecilnya

- iii. Segitiga Sierpinski diperoleh dengan cara rekursif.

Konstruksinya terdiri atas penghapusan berulang kali sepertiga selang terbuka tengah. Langkah-langkah berurutan memberikan E_n yang merupakan aproksimasi yang makin baik untuk menuju ke F .

- iv. Meskipun panjang sisi Segitiga Sierpinski yang dibuat mencapai nilai mendekati 0, namun Segitiga Sierpinski masih merupakan himpunan tak hingga yang tak terbilang (*uncountable infinite set*).

- v. Dimensi Segitiga Sierpinski dapat dicari dengan rumus:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

Dimana: D = Dimensi

ε = panjang selang

$N(\varepsilon)$ = banyak selang

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 3^n}{\log \frac{1}{2^{-n}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 3^n}{\log 2^n}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$= 1.585$$

4. Debu Cantor

Debu cantor diperoleh dengan cara yang hampir sama dengan fraktal-fraktal sebelumnya. Pada dasarnya kebanyakan fraktal mendasarkan pada kesebangunan, yaitu bentuk fraktal merupakan bangun yang sama yang disusun dengan skala yang berbeda.

- a. langkah pertama adalah membuat persegi E_0 dengan panjang sisi 1 satuan dan luas 1 satuan luas..


 E_0

- b. untuk memperoleh persegi E_1 diperkecil menjadi ukuran $\frac{1}{16}$ kali ukuran luas persegi E_0 dan menggandakannya menjadi 4 buah kemudian menyusunnya kembali pada masing-masing sudut persegi.


 E_1

- c. untuk memperoleh E_2 langkah di atas diulangi untuk masing-masing persegi, dimana nantinya akan terdapat $(4)^2 = 16$ buah persegi dengan

ukuran $\left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$ kali ukuran persegi E_0 .


 E_2

- d. proses di atas dilakukan berulang sebanyak n kali untuk memperoleh

E_n maka akan terdapat $(4)^n$ buah persegi kecil dengan ukuran $\left(\frac{1}{16}\right)^n$

kali dari persegi E_0 .



E_n

Debu Cantor merupakan sebuah fraktal. Berikut ini sifat-sifat karakteristik dalam dari Debu Cantor, yakni:

- i. Debu Cantor berkesebangunan diri (*self similar*)

Hal ini dapat terlihat pada Debu Cantor, dimana ketika diperbesar skalanya akan terlihat bentuk yang sebangun dengan bentuk awal.

- ii. Debu Cantor berstruktur halus (*fine structure*)

Yakni, memuat rincian dengan skala yang bagaimanapun kecilnya

- iii. Debu Cantor diperoleh dengan cara rekursif.

Pembentukan Debu Cantor adalah dengan menggandakan berulang-ulang persegi dengan skala yang diperkecil.

- iv. Walaupun luas persegi diperkecil sampai mendekati nilai luas 0, Debu Cantor tetap merupakan himpunan dari persegi-persegi yang tak hingga jumlahnya.

- v. Dimensi Debu Cantor dapat dicari dengan rumus:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}},$$

Dimana: D = Dimensi

ε = panjang selang

$N(\varepsilon)$ = banyak selang

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log \frac{1}{4^{-n}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2^n}{\log 4^n}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log 2}{\log 4}$$

$$= 0.50$$

Dimensi suatu fraktal adalah suatu alat untuk mempelajari sifat fraktal.³⁰

Sudah dikenal bahwa kurva yang mulus adalah suatu bangun yang berdimensi-1, sedangkan luasan (surface) berdimensi-2. Wajar bahwa himpunan per-tiga tengah Cantor diberikan dimensi yang kurang dari 1. dalam geometri fraktal ia berdimensi sedang kurva Von Koch berdimensi

³⁰ B. Susanta, R. Sumantri, dkk. *Perkenalan Dengan Geometri Fraktal*. (Yogyakarta: FMIPA-UGM. 1992), hlm. 7.

$\frac{\log 4}{\log 3} = 1,262$ yang lebih besar daripada dimensi kurva mulus dan kurang

dari dimensi bidang datar.

B. Aplikasi Deret pada Objek Geometri Fraktal

1. Himpunan per-tiga tengah Cantor

Aplikasi deret pada himpunan pertiga tengah Cantor dapat diperoleh dari proses berikut:

- a. Pada $E_0 = [0,1]$ dianggap panjang $E_0 = 1$ (satu) satuan adalah L_0

$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline \end{array}$$

E_0

- b. E_1 dapat terlihat sebagai sebuah selang E_0 yang dihapuskan sepertiga selang terbuka tengah pada E_0 menjadi

$$E_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Dapat terlihat total panjang E_1 berkurang jika dibandingkan panjang awal E_0 , dimana :

$$\begin{array}{c} 0 \qquad \qquad \frac{1}{3} \qquad \qquad \frac{2}{3} \qquad \qquad 1 \\ \hline \end{array}$$

E_1

Panjang Himpunan Per-tiga tengah Cantor pada E_1 dapat dicari:

$$L_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

- c. Pada E_2 juga terlihat pengurangan panjang sebagaimana gambar di bawah ini:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & & \frac{6}{9} & \frac{7}{9} & \frac{8}{9} & 1 \\
 \hline & & & & & \hline & & & & \hline
 \end{array}$$

E_2

Panjang E_2 sekarang dapat diketahui yaitu :

$$L_2 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}$$

- d. E_3 merupakan pengulangan proses yang sama pada E_2 .

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \frac{1}{27} & \frac{2}{27} & \frac{3}{27} & \frac{6}{27} & \frac{7}{27} & \frac{8}{27} & \frac{9}{27} & & \frac{18}{27} & \frac{19}{27} & \frac{20}{27} & \frac{21}{27} & \frac{24}{27} & \frac{25}{27} & \frac{26}{27} & 1 \\
 \hline & & & & & & & & & \hline & & & & & & & & & \hline
 \end{array}$$

$$L_3 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27}$$

- e. Demikian seterusnya untuk E_0 sampai pada E_n .

Akhirnya dapat diambil sebuah hubungan antara E_0 , E_1 , E_2 , sampai dengan E_n , dimana dapat terlihat adanya sebuah deret pada pembentukan Himpunan Per-tiga Tengah Cantor.

$$L_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{4}{27} - \dots$$

Dari hasil di atas dapat dirumuskan perubahan panjang ΔL dari panjang awal E_0 , sehingga:

$$L_n = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots \right)$$

$$L_n = 1 - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)$$

$$L_n = L_0 - \Delta L$$

Akan diperoleh persamaan umum untuk perubahan panjang ΔL ,
dimana:

$$\Delta L = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\Delta L = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$$

Akan terdapat kesesuaian antara perubahan panjang ΔL jika dibandingkan dengan persamaan umum deret geometri yang diketahui

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

bersesuaian dengan $u_1 = a$; $u_2 = ar$; $u_3 = ar^2$; dan seterusnya hingga $u_n = ar^{n-1}$.

Permasalahan yang muncul adalah berapa nilai r . Dengan membandingkan nilai yang bersesuaian akan dapat dicari nilai r .

$$\text{Didapat } u_1 = \frac{1}{3} = a; u_2 = \frac{2}{9} = ar \text{ dan } u_3 = \frac{4}{27} = ar^2$$

$$a = \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$ar = \frac{2}{9}$$

Dengan substitusi

$$\frac{1}{3}r = \frac{2}{9}$$

$$r = \frac{2}{3}$$

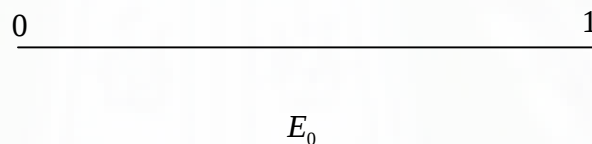
Sehingga dapat diperoleh rumus suku ke- n dari deret pada himpunan per-tiga tengah cantor u_n , dimana:

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

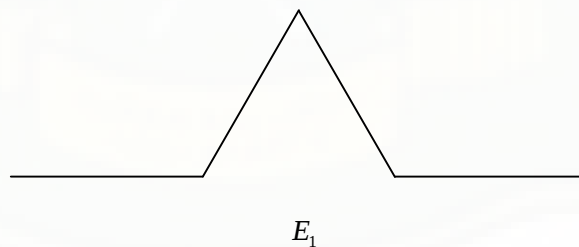
2. Kurva Von Koch

- a) Selang tertutup $E_0 = [0,1]$ memiliki panjang awal 1 satuan panjang.

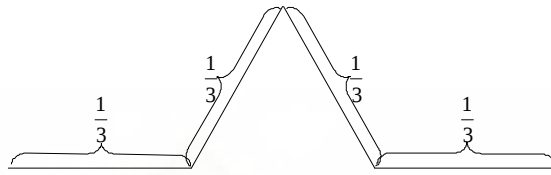


Panjang awal E_0 adalah $L_0 = 1$

- b) Himpunan E_1 diperoleh dengan membagi E_0 menjadi tiga bagian dan menghilangkan selang terbuka yang tengah dan menggantinya dengan 2 kaki segitiga sama sisi yang alasnya segmen garis yang dihapus tadi.



Dari E_1 dapat dirumuskan panjang E pada kurva ini, dimana panjang E_1 adalah L_1 .

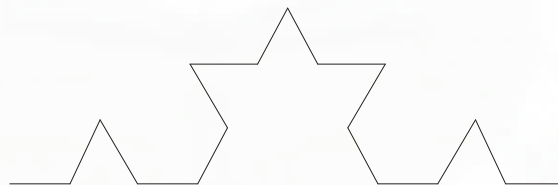


$$L_1 = 4 \times \frac{1}{3}$$

$$L_1 = \frac{4}{3}$$

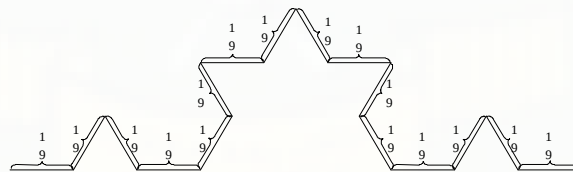
$$L_1 = 1 + \frac{1}{3}$$

- c) Himpunan E_2 diperoleh dengan melakukan prosedur yang sama seperti setiap segmen pada E_1 .



E_2

Dari E_2 dapat diperoleh perhitungan panjang segmen garis dari kurva ini



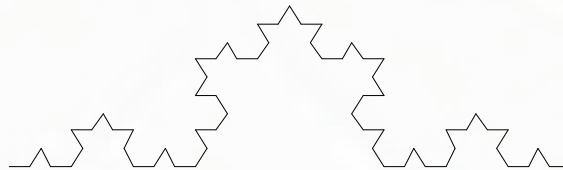
$$L_2 = 4 \times 4 \times \frac{1}{9}$$

$$L_2 = \frac{16}{9}$$

$$L_2 = \frac{9}{9} + \frac{3}{9} + \frac{4}{9}$$

$$L_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}$$

d) Untuk mendapatkan E_3 juga dilakukan prosedur yang sama pada E_2 .



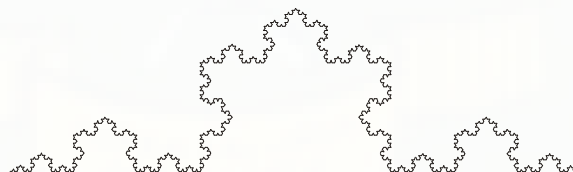
$$L_3 = 4 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{27}$$

$$L_3 = \frac{64}{27}$$

$$L_3 = \frac{27}{27} + \frac{9}{27} + \frac{12}{27} + \frac{16}{27}$$

$$L_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27}$$

e) Prosedur ini dilakukan terus-menerus untuk nilai n yang semakin besar mendekati tak terhingga, maka akan diperoleh E_n .



E_n

Dimana;

$$L_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \dots$$

Dari hasil di atas dapat dirumuskan perubahan panjang ΔL dari panjang awal E_0 pada kurva Von Koch, sehingga:

$$L_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \dots$$

$$L_n = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \dots \right)$$

$$L_n = 1 + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)$$

$$L_n = L_0 - \Delta L$$

Akan diperoleh persamaan umum untuk perubahan panjang ΔL , dimana:

$$\Delta L = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\Delta L = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{16}{27} + \dots$$

Akan terlihat kesesuaian antara pertambahan panjang ΔE dengan deret geometri

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

Diperoleh nilai $u_1 = a = \frac{1}{3}$, $u_2 = ar = \frac{4}{9}$ dan dengan perhitungan didapatkan;

$$a = \frac{1}{3}, \text{ dan}$$

$$ar = \frac{4}{9}$$

dengan substitusi,

$$\frac{1}{3}r = \frac{4}{9}$$

$$r = \frac{4}{3}$$

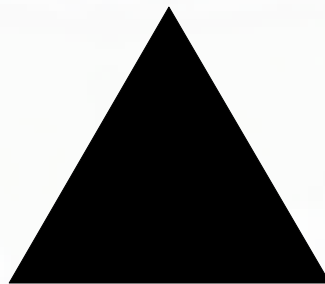
Dari hasil nilai a dan r dapat dirumuskan nilai suku ke- n pada kurva von koch u_n , dimana:

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

3. Segitiga Sierpinski

- a) E_0 dengan panjang sisi segitiga 1 (satu) satuan panjang dapat dicari luas segitiga L .



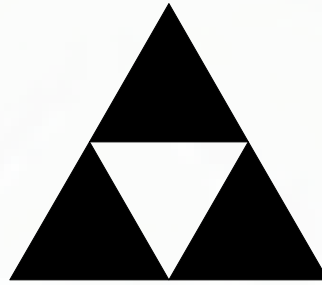
E_0

$$L_0 = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$L_0 = \frac{1}{4} \sqrt{3}$$

- b) E_1 merupakan gabungan dari tiga buah segitiga dengan ukuran panjang sisinya $\frac{1}{2}$ panjang sisi E_0 , maka luas E_1 dapat dihitung, yaitu L_1



E_1

Luas segitiga Sierpinski pada proses tahap pertama dapat dihitung, dimana:

$$L_1 = 3 \times \text{luas } \Delta \text{ kecil}$$

$$L_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} \right)$$

$$L_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \sqrt{3} \right) \right)$$

$$L_1 = 3 \times \left(\frac{1}{16} \sqrt{3} \right)$$

$$L_1 = \frac{3}{16} \sqrt{3}$$

$$L_1 = \frac{4}{16} \sqrt{3} - \frac{1}{16} \sqrt{3}$$

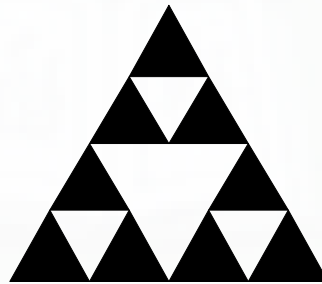
$$L_1 = \frac{1}{4} \sqrt{3} - \frac{1}{16} \sqrt{3}$$

$$L_1 = L_0 - \frac{1}{16}\sqrt{3}$$

c) E_2 diperoleh dengan proses berulang seperti pada pembentukan E_1 , akan diperoleh sebanyak $3^2 = 9$ buah segitiga kecil dengan

ukuran panjang sisi adalah $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right]$ panjang sisi segitiga E_0 .

Luas segitiga Sierpinski pada proses tahap kedua ini dapat dihitung, dimana:



E_2

$$L_2 = 3^2 \times \text{luas } \Delta \text{ kecil}$$

$$L_2 = 3^2 \times \left(\frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}\right)$$

$$L_2 = 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)\right)$$

$$L_2 = 9 \times \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)\right)$$

$$L_2 = 9 \times \left(\frac{1}{64}\sqrt{3}\right)$$

$$L_2 = \frac{9}{64}\sqrt{3}$$

$$L_2 = \frac{16}{64}\sqrt{3} - \frac{4}{64}\sqrt{3} - \frac{3}{64}\sqrt{3}$$

$$L_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{64}\sqrt{3}$$

$$L_2 = L_0 - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{64}\sqrt{3}$$

d) Perubahan luas jumlahan segitiga pada E_3 dapat dihitung sebagai berikut:



E_3

$$L_3 = 3^3 \times \text{luas } \Delta \text{ kecil}$$

$$L_3 = 27 \times \left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{16} \sqrt{3} \right) \right)$$

$$L_3 = 27 \times \left(\frac{1}{256} \sqrt{3} \right)$$

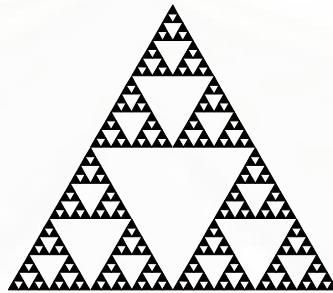
$$L_3 = 27 \times \left(\frac{1}{256} \sqrt{3} \right)$$

$$L_3 = \frac{64}{256}\sqrt{3} - \frac{16}{256}\sqrt{3} - \frac{12}{256}\sqrt{3} - \frac{9}{256}\sqrt{3}$$

$$L_3 = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{64}\sqrt{3} - \frac{9}{256}\sqrt{3}$$

$$L_3 = L_0 - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{64}\sqrt{3} - \frac{9}{256}\sqrt{3}$$

- e) Dengan memperhatikan hasil-hasil di atas, dapat diambil kesimpulan bahwa luas jumlahan segitiga setelah melalui proses pembentukan obyek fraktal sampai dengan n kali adalah:



$$E_n$$

$$L_n = L_0 - \frac{1}{16}\sqrt{3} - \frac{3}{64}\sqrt{3} - \frac{9}{256}\sqrt{3} - \dots$$

$$L_n = L_0 - \left(\frac{1}{16}\sqrt{3} + \frac{3}{64}\sqrt{3} + \frac{9}{256}\sqrt{3} + \dots \right)$$

Dari hasil di atas dapat dirumuskan perubahan luas ΔE dari luas awal E_0 , sehingga:

$$L_n = L_0 - (u_1 + u_2 + u_{n3} + \dots)$$

$$L_n = L_0 - \Delta L$$

Akan diperoleh persamaan umum untuk perubahan luas ΔL , dimana:

$$\Delta L = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\Delta L = \frac{1}{16}\sqrt{3} + \frac{3}{64}\sqrt{3} + \frac{9}{256}\sqrt{3} + \dots$$

Akan terdapat kesesuaian, dimana suku-sukunya merupakan suku sebuah deret. Jika dibandingkan dengan deret geometri

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

bersesuaian dengan $u_1 = a = \frac{1}{16}\sqrt{3}$, $u_2 = ar = \frac{3}{64}\sqrt{3}$ dan seterusnya hingga suku ke- n . Permasalahan yang muncul adalah berapa nilai r untuk mendapatkan persamaan umumnya.

$$a = \frac{1}{16}\sqrt{3}$$

$$ar = \frac{3}{64}\sqrt{3}$$

Dengan substitusi

$$\frac{1}{16}\sqrt{3} \quad r = \frac{3}{64}\sqrt{3}$$

$$r = \frac{3}{4}$$

Sehingga dapat diperoleh rumus umum suku ke- n dari deret pada segitiga sierpinski E_n , dimana:

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{16}\sqrt{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

4. Debu Cantor

- a. Persegi E_0 memiliki panjang sisi 1 satuan panjang.



E_0

Sehingga dapat diperoleh luas persegi E_0 adalah L_0 dengan nilai

$$L_0 = s_0 \times s_0$$

$$L_0 = 1 \times 1 = 1$$

Jadi luas persegi E_0 adalah $L_0 = 1$ (satu) satuan luas.

b. E_1 adalah terlihat sebagai susunan 4 buah persegi dengan ukuran

$\frac{1}{16}$ kali ukuran persegi E_0 .



E_1

Luas persegi E_1 dapat dicari:

$$L_1 = 4(s_1 \times s_1)$$

$$L_1 = 4\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right)$$

$$L_1 = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$$

$$L_1 = 1 - \frac{3}{4}$$

- c. Persegi E_2 merupakan perulangan proses pada E_1 .



E_2

Luas persegi E_2 dapat dicari:

$$L_2 = 4^2(s \times s)$$

$$L_2 = 16\left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}\right)$$

$$L_2 = \frac{1}{16}$$

$$L_2 = \frac{16}{16} - \frac{12}{16} - \frac{3}{16}$$

$$L_2 = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16}$$

- d. Persegi E_3 merupakan perulangan proses pada E_2 .



E_3

Luas persegi E_3 dapat dicari:

$$L_3 = 4^3(s \times s)$$

$$L_3 = 64 \left(\frac{1}{64} \times \frac{1}{64} \right)$$

$$L_3 = \frac{1}{64}$$

$$L_3 = \frac{64}{64} - \frac{48}{64} - \frac{12}{64} - \frac{3}{64}$$

$$L_3 = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \frac{3}{64}$$

e. proses di atas dilakukan berulang sebanyak n kali untuk memperoleh

E_n .

$$\begin{array}{cc} \text{**} & \text{**} \\ \text{**} & \text{**} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{**} & \text{**} \\ \text{**} & \text{**} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \text{**} & \text{**} \\ \text{**} & \text{**} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \text{**} & \text{**} \\ \text{**} & \text{**} \end{array}$$

E_n

Luas jumlahan persegi pada obyek fraktal Debu Cantor ini dapat diperoleh

$$L_n = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \frac{3}{64} - \dots$$

Dari hasil di atas dapat dirumuskan perubahan luas ΔL dari luas awal

E_0 , sehingga:

$$L_n = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \frac{3}{64} - \dots$$

$$L_n = 1 - \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots \right)$$

$$L_n = L_0 - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)$$

$$L_n = L_0 - \Delta L$$

Akan didapat persamaan umum untuk perubahan luas ΔL , dimana:

$$\Delta L = u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

$$\Delta L = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots$$

Akan terdapat kesesuaian, dimana suku-sukunya merupakan suku. Jika dibandingkan dengan deret geometri

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

Permasalahan yang muncul adalah berapa nilai r . Dengan membandingkan nilai yang besesuaian akan dapat dicari nilai r .

$$\text{didapat } u_1 = a = \frac{3}{4} \text{ dan } u_2 = ar = \frac{3}{16}$$

Jadi,

$$a = \frac{3}{4}$$

$$ar = \frac{3}{16}$$

Dengan substitusi

$$\frac{3}{4}r = \frac{3}{16}$$

$$r = \frac{1}{4}$$

Sehingga dapat diperoleh rumus umum deret dari debu cantor E_n ,
dimana:

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

C. Uji Konvergensi Deret pada Obyek Geometri Fraktal

Pada pembahasan bagian ketiga ini akan ditunjukkan uji konvergensi dari masing-masing obyek fraktal yang telah dirumuskan persamaan umumnya.

1. Himpunan per-tiga tengah Cantor

Perhitungan pada bagian sebelumnya dapat diketahui rumus umum E_n ,
dimana:

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

Uji Konvergensi Deret.

a. Kondisi perlu untuk deret

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, deret adalah divergen

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut

Untuk deret pada obyek geometri fraktal Himpunan per-tiga tengah

Cantor dapat diperoleh nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ maka diperlukan pengujian lebih lanjut..

b. Uji Cauchy Rasio

$$u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

Diambil rasio nilai u_n , u_{n+1} dan $\rho = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Akan dicari nilai

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Maka,

Bila $\rho < 1$, deret adalah konvergen

Bila $\rho > 1$, deret adalah divergen

Bila $\rho = 1$, uji ini gagal.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1+1}}{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2)^{n-(n-1)}}{(3)^{n-(n-1)}}$$

$$\rho = \frac{2}{3}$$

Dengan uji Cauchy Rasio diperoleh nilai $\rho = \frac{2}{3}$ dengan kata lain

$\rho < 1$, jadi deret ini konvergen.

2. Kurva Von Koch

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Uji Konvergensi Deret.

a. Kondisi perlu untuk deret

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, deret adalah divergen

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut

Untuk deret pada obyek geometri fraktal kurva von koch dapat

diperoleh nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{3} (\infty)$$

$$= \infty$$

Nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ atau nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ maka menurut uji ini deret

ini divergen.

3. Segitiga Sierpinski

Deret pada obyek fraktal Segitiga Sierpinski adalah deret dari perubahan luas.

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{1}{16} \sqrt{3} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

Uji Konvergensi Deret.

a. Kondisi perlu untuk deret

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, deret adalah divergen

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut

Untuk deret pada obyek geometri fraktal segitiga Sierpinski dapat

diperoleh nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Dicari nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{16} \sqrt{3} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{3} (0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut.

b. Uji Cauchy Rasio

$$u_n = \frac{1}{16} \sqrt{3} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

Diambil rasio nilai u_n , u_{n+1} dan $\rho = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Akan di cari nilai

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Maka,

Bila $\rho < 1$, deret adalah konvergen

Bila $\rho > 1$, deret adalah divergen

Bila $\rho = 1$, uji ini gagal.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{16} \sqrt{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1+1}}{\frac{1}{16} \sqrt{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3)^{n-(n-1)}}{(4)^{n-(n-1)}}$$

$$\rho = \frac{3}{4}$$

Dengan uji Cauchy Rasio diperoleh nilai $\rho = \frac{3}{4}$ dengan kata lain

$\rho < 1$, jadi deret ini konvergen.

4. Debu Cantor

$$u_n = ar^{n-1}$$

$$u_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Deret pada obyek fraktal Debu Cantor terdapat pada perubahan luas ΔL .

Uji Konvergensi Deret.

a. Kondisi perlu untuk deret

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, deret adalah divergen

Bila $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut

Untuk deret pada obyek geometri fraktal segitiga Debu Cantor dapat diperoleh nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Dicari nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} ar^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{4} (0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, maka diperlukan pengujian lebih lanjut.

b. Uji Cauchy Rasio

$$u_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

Diambil rasio nilai u_n , u_{n+1} dan $\rho = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Akan dicari nilai

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Maka,

Bila $\rho < 1$, deret adalah konvergen

Bila $\rho > 1$, deret adalah divergen

Bila $\rho = 1$, uji ini gagal.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1+1}}{\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^n}{\left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1)^{n-(n-1)}}{(4)^{n-(n-1)}}$$

$$\rho = \frac{1}{4}$$

Dengan uji Cauchy Rasio diperoleh nilai $\rho = \frac{1}{4}$ dengan kata lain

$\rho < 1$, jadi deret ini konvergen.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Penelitian ini memiliki beberapa kesimpulan yang dapat peneliti sampaikan.

1. Obyek geometri fraktal dapat dijelaskan proses pembentukannya. Geometri fraktal memiliki beberapa karakteristik seperti: *self similar* (penjelmaan diri), *self affine* (penyederhanaan diri), *self inverse* (pembalikan diri), *self inverse*, *self squaring* (pemutaran diri) dan dimensi fraktal yang lebih besar daripada dimensi topologisnya, dengan dimensi himpunan per-tiga Cantor 0,6309; Kurva Von Koch 1,2618; Segitiga Sierpinski 1,585 dan Debu Cantor 0,50.

2. Obyek geometri fraktal memiliki kaitan dengan deret terutama deret geometri. Hal ini terjadi karena karakteristik fraktal yang memiliki sifat kesebangunan diri, dimana berapapun besarnya, perbesaran skalanya pastilah memiliki bentuk keserupaan. Adapun aplikasi deret pada Geometri fraktal dapat dilihat dari rumus suku ke- n pada objek geometri fraktal. Rumus suku ke- n pada

Himpunan per-tiga Tengah Cantor $E_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$; Kurva Von Koch

$E_n = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$; Segitiga Sierpinski $E_n = \frac{1}{16} \sqrt{3} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$ dan Debu Cantor

$$E_n = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

3. Pengujian terhadap rumus deret pada masing-masing obyek geometri fraktal memberikan hasil yang menjawab pertanyaan tentang konvergensi deret. Uji

ini umumnya dilakukan dengan dua uji, yakni uji kondisi perlu sebuah deret dan uji Cauchy Rasio. Hasil uji konvergensi dapat diperoleh bahwa dengan uji Kondisi Perlu untuk deret diperoleh hasil bahwa : Himpunan per-tiga Tengah Cantor deret konvergen dengan nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$; Kurva Von Koch divergen dengan nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$; Segitiga Sierpinski konvergen dengan nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ dan Debu Cantor konvergen dengan nilai $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Sedangkan dengan Uji Cauchy Rasio diperoleh bahwa Himpunan per-tiga Tengah Cantor merupakan deret konvergen dengan nilai $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$;

Kurva Von Koch divergen dengan nilai $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{3}$; Segitiga Sierpinski

konvergen dengan nilai $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4}$ dan Debu Cantor konvergen

dengan nilai $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4}$.

B. Saran-saran

1. Geometri terutama berkaitan dengan geometri fraktal memiliki bidang ilmu yang luas dan masih memerlukan banyak penelitian dan pengkajian baik secara teori maupun aplikasi.
2. Geometri fraktal merupakan cabang ilmu yang menarik dan perlu untuk dicantumkan pada buku-buku pelajaran sebagai penambah wawasan.

DAFTAR PUSTAKA

- Andrzej lasota and Michael C. Mackey. *Chaos, Fractals and Noise*. Springer: Verlag, 1986
- B. Susanto dan Bambang Sudijono, *Model Matematika*. Jakarta: Karunika Universitas Terbuka, 1989
- B. Susanta, R. Sumantri, dkk. *Perkenalan Dengan Geometri Fraktal*. Yogyakarta: FMIPA-UGM. 1992.
- Benoit Mandelbort. *The Fractal Geometry of Nature*. NEW York: W.H. Freeman and Company, 1982
- Gerald A. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry.*, Virginia: Springer-Verlag. 1990.
- Harijono Djojodiharjo. *Metode Numerik*. Jakarta : PT Gramedia Pustaka Utama, 2000
- Johan Matheus Tuwankotta, *Sekali Lagi Tentang Teori Chaos*, <http://www.fisikanet.lipi.go.id>. Diakses pada 13 Maret 2007 jam 10.00
- K.A. Stroud. *Engineering Nathematics*. New York: Palgrave. 2001
- Louis A. Pipes and Lawrence R. Harvill. *Matematika terapan Untuk Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 1991
- M. Amin Abdullah, dkk, *Menyatukan Kembali Ilmu-ilmu Agama dan Umum dan Upaya Mempersatukan Epistemologi Islam dan Umum*. Yogyakarta: Sunan Kalijaga Press, 2003
- Moeharti Hadiwijojo, *Ilmu Ukur Analit Bidang Bagian I*, Yogyakarta: FPMIPA, 1975
- Robert G. Bartle and Donald R. Sherbert. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2000
- Sari B. Kusumayudha. *Geometri Fraktal Di Goyang Inul*. <http://www..saribk@recent.or.id>. Diakses pada 13 Maret 2007 jam 10.00
- Sri Mulyati, *Individual Text Book "Geometri Euclid"*, JICA, UNY
- Tim Penyusun UNY. Materi Perkuliahan, *Geometri*, Universitas Negeri Yogyakarta, 2003

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/Mandelbrot.html>, *Biography of Mandelbrot*.

Ari Suryantoko. *Barisan Fungsi dan Deret Fungsi*. Skripsi, Yogyakarta: UGM. 2001

CURICULUM VITAE

Nama : Dwi Sulistiyantoko

Tempat Tanggal Lahir : Magelang, 26 Mei 1984

Alamat : Masjid Al Iman

Jln. Tri harma, Gendeng, Baciro GK IV/ 786

HP. 085 292 680 798

Pendidikan :

SD Negeri Brenggong II Lulus tahun 1995

SLTP N 2 Purworejo Lulus tahun 1998

SMU N 1 Purworejo Lulus tahun 2001

Mahasiswa UIN Sunan Kalijaga Lulus tahun 2008

Pengalaman Organisasi :

Direktur TPA Pondok Pesantren Al Barokah tahun 2001-2002

Direktur Kopontren Al Barokah tahun 2002-2003

Ketua BEM Pendidikan Matematika UIN Sunan Kalijaga tahun
2004-2006

Direktur TPA Al Iman tahun 2006-sekarang

Tentor Matematika di Bimbel Gama Exacta tahun 2006-sekarang

Motto :

Sebaik-baik manusia adalah yang bermanfaat bagi orang lain