

BAB II

LANDASAN TEORI

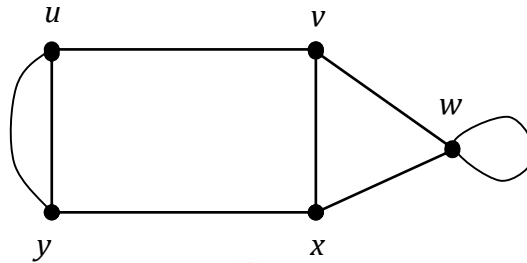
Bab ini berisi tentang teori-teori pendukung yang digunakan dalam pembuktian teorema pohon matriks pada graf multipartit lengkap dan penerapannya untuk mencari banyaknya pohon rentangan. Teori-teori tersebut diantaranya definisi graf, definisi pohon, definisi matriks, matriks pada graf dan teorema pohon matriks.

2.1 Graf

Sebelum membahas tentang graf multipartit lengkap dan matriks pada graf akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi graf berikut ini.

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 2.1.1.1. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 3) Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di G dinotasikan dengan $E(G)$. Banyaknya elemen di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $n(G)$, sedangkan banyaknya elemen di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $m(G)$. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka order dan ukuran dari graf G cukup ditulis dengan n dan m .

Contoh 2.1.1.2.Gambar 2. 1 Graf $G(5, 8)$

$$V(G) = \{u, v, w, x, y\}$$

$$E(G) = \{uv, vw, ww, wx, xy, yu, yu, vx\}$$

Perhatikan Gambar 2.1, gambar tersebut menunjukkan bahwa graf G memuat himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Banyaknya titik pada graf G adalah 5 yang artinya order dari G adalah $n = 5$ dan sisi yang dimiliki graf G adalah 8 maka ukuran dari G adalah $m = 8$.

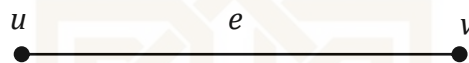
Perhatikan sisi ww dan sisi yu pada Gambar 2.1. Sisi ww disebut loop sedangkan sisi yu disebut sisi ganda. Loop merupakan sebuah sisi yang menghubungkan suatu titik dengan titik itu sendiri, sedangkan sisi ganda merupakan dua atau lebih sisi yang menghubungkan suatu pasangan titik.

Berdasarkan Definisi 2.1.1.1., diketahui bahwa sebuah graf G merupakan pasangan himpunan dari titik dan sisi. Hubungan titik dan sisi tersebut dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.1.1.3. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 3-4) Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi dari G maka e dikatakan menghubungkan titik u dan v serta biasa ditulis

dengan uv atau vu . Oleh karena $e = \{u, v\}$ adalah sisi dari G , maka u dan v disebut bertetangga (*adjacent*), sedangkan u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*).

Menurut Definisi 2.1.1.3., hubungan titik dan sisi dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2. 2 Hubungan titik dan sisi

Definisi 2.1.1.4. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 10) Graf H disebut subgraf dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ sehingga dapat ditulis $H \subseteq G$.

Berdasarkan Gambar 2.1, salah satu subgraf dari graf $G(5,8)$ sebagai berikut.



Gambar 2.3 Subgraf dari $G(5,8)$

2.1.2 Jenis-Jenis Graf

Menurut Rinaldi Munir dalam bukunya yang berjudul Matematika Diskrit suatu graf dapat dikelompokkan ke dalam beberapa jenis bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Berdasarkan adanya loop dan sisi ganda, graf dibedakan menjadi 2 yaitu

- a. Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung loop dan sisi ganda.
- b. Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung loop atau sisi ganda. Ada 2 macam graf tak sederhana yaitu graf ganda yang mengandung sisi ganda dan graf semu yang mengandung loop.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, graf G dibedakan menjadi 2 jenis yaitu

- a. Graf tak berarah yaitu graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah.
- b. Graf berarah yaitu graf yang setiap sisinya mempunyai orientasi arah.

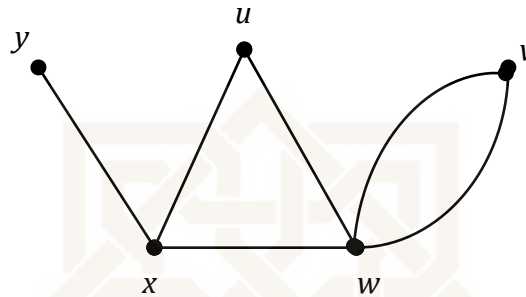
2.1.3 Derajat Titik

Sebelum membahas tentang matriks derajat pada teorema pohon matriks terlebih dahulu dijelaskan definisi derajat suatu titik dan teorema yang terkait dengan derajat titik.

Definisi 2.1.3.1. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 5) Derajat suatu titik v pada sebuah graf G adalah banyaknya sisi pada G yang terkait langsung dengan titik v (*incident*) dan dinotasikan dengan $deg_G(v)$. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka notasi dapat disingkat menjadi $deg(v)$. Titik dikatakan ganjil (*odd vertices*) jika berderajat ganjil dan titik dikatakan genap (*even vertices*) jika berderajat genap. Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end-vertices*).

Contoh 2.1.3.2.

Graf G pada Gambar 2.4 memiliki himpunan titik $V(G) = \{u, v, w, x, y\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{uw, vw, vx, wx, xy, xu\}$.



Gambar 2. 4 Derajat titik

Berdasarkan Gambar 2.4, diperoleh $\deg(u) = 2$, $\deg(v) = 2$, $\deg(w) = 4$, $\deg(x) = 3$ dan $\deg(y) = 1$. Titik u, v dan w disebut titik genap sedangkan titik x dan y disebut titik ganjil. Banyaknya derajat titik pada suatu graf G adalah jumlah semua derajat titik pada setiap titik yang terdapat dalam graf G . Pada Gambar 2.4, banyaknya derajat titik pada graf G yaitu

$$\begin{aligned} \deg(u) + \deg(v) + \deg(w) + \deg(x) + \deg(y) &= 2 + 2 + 4 + 3 + 1 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Hubungan antara banyaknya derajat titik dan banyaknya sisi (m) dapat dijelaskan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.1.3.3. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 6) Jika G adalah sebuah graf dengan order n dan ukuran m , maka $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$.

Bukti:

Ketika menghitung derajat suatu titik di G , maka setiap sisi di G akan terhitung dua kali karena setiap sisi di G menghubungkan dua titik yang berbeda.

Hal ini menunjukkan bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah semua sisi di G sehingga terbukti bahwa $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$. ■

Berdasarkan hubungan tersebut diperoleh akibat sebagai berikut

Akibat Teorema 2.1.3.4. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 6)

Banyaknya titik yang berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap.

Bukti:

Misalkan V_1 adalah himpunan titik berderajat ganjil dengan banyak anggota k dan V_2 adalah himpunan titik berderajat genap dengan banyak anggota r pada G . Misalkan pula n adalah order dari G dan m adalah ukurannya. Jika $u_i \in V_1$ dan $v_j \in V_2$ maka menurut Teorema 2.1.3.3, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \deg u_i + \sum_{j=1}^r \deg v_j &= 2m \\ \sum_{i=1}^k \deg u_i &= - \sum_{j=1}^r \deg v_j + 2m. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Akan ditunjukkan bahwa k genap. Diketahui $v_j \in V_2$ dan V_2 adalah himpunan titik berderajat genap maka $\sum_{j=1}^r \deg v_j$ adalah genap. Akibatnya $\sum_{i=1}^k \deg u_i = - \sum_{j=1}^r \deg v_j + 2m$ adalah genap. Jika ditulis $\deg u_i = 2r_i - 1$, $r_i \in \mathbb{N}$ untuk setiap i dan $- \sum_{j=1}^r \deg v_j + 2m = 2l$ untuk $l \in \mathbb{N}, l < m$ maka persamaan (2.1) dapat ditulis

$$\sum_{i=1}^k (2r_i - 1) = 2l$$

$$\sum_{i=1}^k 2r_i - \sum_{i=1}^k 1 = 2l$$

$$k = \sum_{i=1}^k 2r_i - 2l$$

$$k = 2(\sum_{i=1}^k r_i - l).$$

Jelas bahwa $2(\sum_{i=1}^k r_i - l)$ adalah bilangan genap. Jadi k adalah bilangan genap atau dengan kata lain banyaknya titik yang berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap. ■

2.1.4 Graf Multipartit Lengkap

Pada penelitian ini graf multipartit lengkap menjadi pokok bahasan utama. Oleh karena itu, sebelum membahasnya lebih lanjut pada bab pembahasan akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi graf multipartit lengkap.

Definisi 2.1.4.1. (Munir, 2005, hal. 377) Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya mempunyai sisi yang menghubungkan dengan titik lainnya. Graf lengkap dinotasikan dengan K_n .

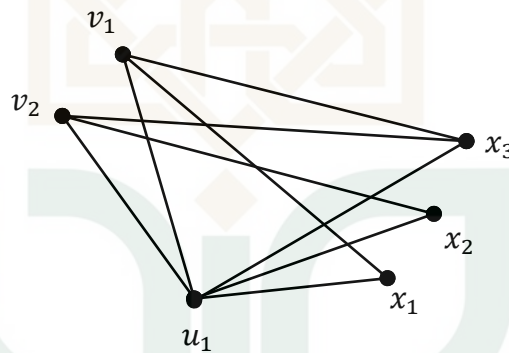
Definisi 2.1.4.2. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 15) Misalkan $V_1, V_2, \dots, V_k$ adalah beberapa himpunan bagian dari himpunan titik $V(G)$ pada suatu graf G . Himpunan V_i untuk setiap i disebut partisi dari $V(G)$ jika $V_i \neq \emptyset$ dan $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V_i$ serta $V_i \cap V_j = \emptyset$ dengan $i \neq j$. Graf G disebut graf k -partit jika $V(G)$ dapat dipartisi ke dalam k partisi $V_1, V_2, \dots, V_k$ sehingga setiap sisi $e = uv \in E(G)$, berlaku $u \in V_i$ dan $v \in V_j$ untuk suatu i dan $j, i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Graf k -partit untuk $k \geq 2$ dengan $|V_i| = n_i$ disebut graf *multipartit*, dinotasikan dengan $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

Berdasarkan konsep pada Definisi 2.1.4.1. dan Definisi 2.1.4.2. diperoleh definisi graf multipartit lengkap sebagai berikut.

Definisi 2.1.4.3. (Ocansey, 2011, hal. 18) Sebuah Graf K yang memiliki n titik adalah graf k -partit lengkap jika setiap himpunan titik $V(K)$ dapat dipartisi ke dalam k himpunan partisi $V_1, V_2, \dots, V_k$ sedemikian sehingga tidak ada dua titik dalam setiap himpunan partisi V_i yang bertetangga dan setiap titik bertetangga dengan semua titik pada himpunan partisi lain. Graf multipartit lengkap dinotasikan dengan $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$.

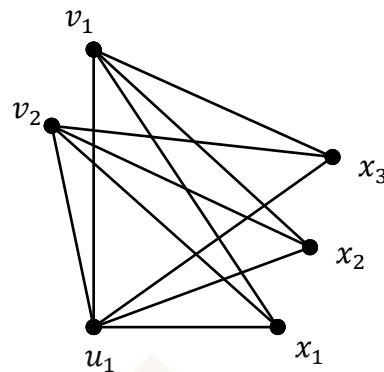
Contoh 2.1.4.4.

Perhatikan Gambar 2.5. dan Gambar 2.6 di bawah ini.



Gambar 2. 5 Graf multipartit $B_{1,2,3}$

Gambar 2.5 merupakan gambar graf multipartit $B_{1,2,3}$ yang terdiri dari 3 partisi titik yaitu $U = \{u_1\}$ dengan $|U| = 1$, $V = \{v_1, v_2\}$ dengan $|V| = 2$ dan $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ dengan $|X| = 3$. Banyaknya sisi pada Gambar 2.5 adalah 9 dengan himpunan sisi $E(G) = \{u_1v_1, u_1v_2, u_1x_1, u_1x_2, u_1x_3, v_1x_1, v_1x_2, v_1x_3, v_2x_1, v_2x_2, v_2x_3\}$.



Gambar 2. 6 Graf multipartit lengkap $K_{1,2,3}$

Gambar 2.6 merupakan gambar graf multipartit lengkap $K_{1,2,3}$ yang terdiri dari 3 partisi titik yaitu $U = \{u_1\}$ dengan $|U| = 1$, $V = \{v_1, v_2\}$ dengan $|V| = 2$, dan $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ dengan $|X| = 3$. Himpunan sisi pada Gambar 2.6 yaitu $E(G) = \{u_1v_1, u_1v_2, u_1x_1, u_1x_2, u_1x_3, v_1x_1, v_1x_2, v_1x_3, v_2x_1, v_2x_2, v_2x_3\}$ sehingga diperoleh banyaknya sisi adalah 11.

2.1.5 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

Pada sub bab ini akan dijelaskan mengenai graf terhubung dan graf tak terhubung yang berguna untuk memahami pembuktian teorema pohon matriks .

Definisi 2.1.5.1. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 37) Sebuah jalan W dari u ke v biasa ditulis $u - v$ dalam graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) yang berselang seling antara titik dan sisi ($W : u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$), yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v , dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ adalah sisi di G . u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ disebut titik internal dan n menyatakan panjang dari W . Secara umum, jalan dapat dinyatakan dengan $W : u = v_0, v_1, \dots, v_k = v$.

Definisi 2.1.5.2. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 38) Diberikan sebuah graf G , jalan yang memiliki sisi yang tidak berulang dalam graf G disebut *trail*.

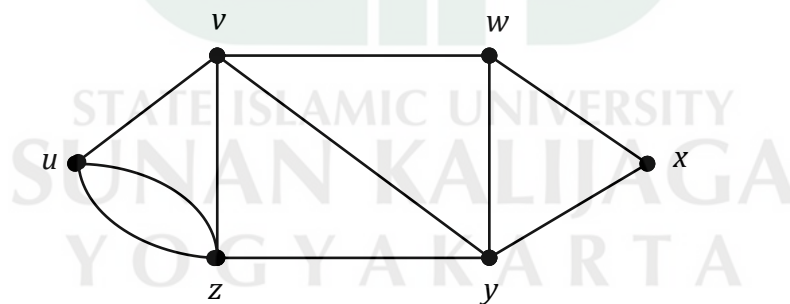
Definisi 2.1.5.3. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 38) Jalan yang titik awal dan akhirnya berbeda disebut jalan terbuka dan jalan tertutup jika titik awal dan akhirnya sama.

Definisi 2.1.5.4. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 38) Jalan yang memiliki titik dan sisi yang berbeda disebut lintasan (*path*).

Definisi 2.1.5.5. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 41) Suatu jalan yang terdiri dari satu titik disebut jalan trivial. Jalan trivial termasuk dalam jalan tertutup. Jalan tertutup yang tak trivial dan tidak memiliki sisi yang berulang pada graf G disebut sirkuit.

Definisi 2.1.5.6. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 41) Sirkuit dengan $n \geq 3$ dan memiliki titik yang tidak berulang disebut sikel (*cycle*).

Contoh 2.1.5.7.



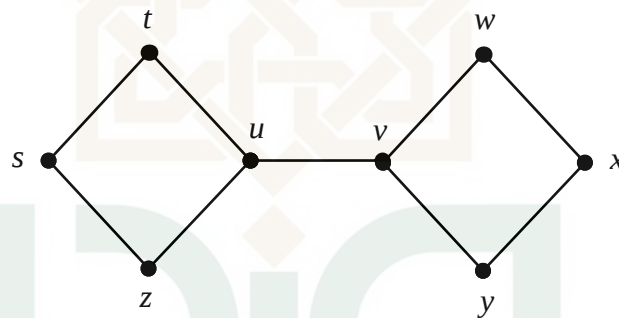
Gambar 2. 7 Graf Terhubung

Berdasarkan Gambar 2.7., jalan terbuka pada graf terhubung di atas adalah $u - z - u - v - w - y - v - w - x$, trail $u - v - z - y - w - x - y$ dan *path*

$u - v - w - x - y - z$. Jalan tertutup yaitu $u - v - w - y - v - u$, sirkuit $u - v - w - x - y - v - z - u$ dan siklus $u - v - w - x - y - z - u$.

Definisi 2.1.5.8. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 42) Misalkan u dan v adalah dua titik yang berbeda dalam graf G , maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat lintasan $u - v$ pada G . Suatu graf G dikatakan terhubung jika setiap titik u dan v di G terhubung. Graf G yang tidak terhubung disebut graf tak terhubung.

Contoh 2.1.5.9.

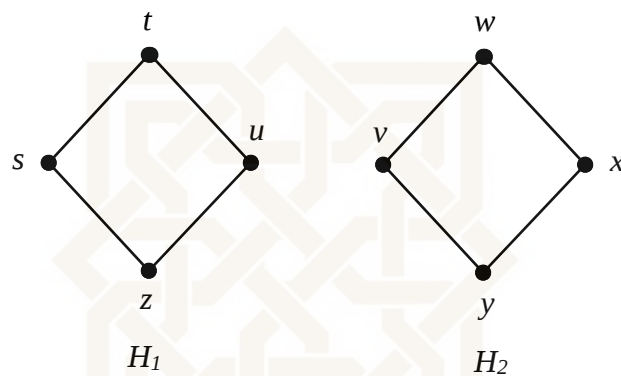


Gambar 2.8 Graf Terhubung

Gambar 2.8 adalah contoh graf terhubung dengan setiap titik pada graf memiliki lintasan. Apabila dihilangkan lintasan antara titik u dan v sehingga tidak ada sisi yang menghubungkan titik u dan v maka graf pada Gambar 2.8 menjadi graf tak terhubung. Suatu graf tak terhubung memiliki komponen terhubung.

Definisi 2.1.5.10. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 42) Komponen terhubung dari graf G adalah subgraf dari G yang tidak memuat subgraf terhubung lain dari graf G . Misalkan $H_1 \subseteq H_2 \subseteq G$ dengan $V(H_1) \subseteq V(H_2)$ dan $E(H_1) \subseteq E(H_2)$, maka $H_1 = H_2$. Banyaknya komponen terhubung dari G dinotasikan dengan $\kappa(G)$.

Banyaknya komponen terhubung pada graf terhubung adalah 1 karena pada graf terhubung hanya memuat satu subgraf terhubung. Pada Gambar 2.8., jika sisi uv dihilangkan maka graf tersebut menjadi graf tak terhubung yang memiliki 2 komponen terhubung seperti pada gambar berikut.



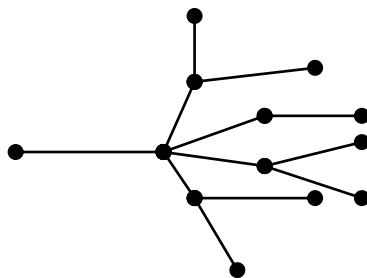
Gambar 2.9 Komponen terhubung H_1 dan H_2

2.2 Pohon

Definisi 2.2.1. (Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2015, hal. 63) Pohon adalah graf tak berarah terhubung yang tidak mengandung siklus.

Berdasarkan Definisi 2.2.1., terdapat dua sifat penting pada pohon yaitu terhubung dan tidak mengandung siklus.

Contoh 2.2.2.



Gambar 2. 10 Pohon

Perhatikan Gambar 2.10, gambar tersebut jelas menunjukkan pohon dengan banyaknya titik yaitu 13 dan banyaknya sisi yaitu 12. Semua titik pada pohon tersebut terhubung dan tidak mengandung siklus. Berdasarkan Contoh 2.2.2. terlihat bahwa terdapat kaitan antara banyaknya titik dan banyaknya sisi. Jika banyaknya titik adalah n dan banyaknya sisi adalah m maka banyaknya sisi pada sebuah pohon adalah $m = n - 1$. Hal ini dapat dijelaskan dengan teorema berikut.

Teorema 2.2.3. (Rosen, 2012, hal. 752) Sebuah pohon dengan banyaknya titik n memiliki $n - 1$ sisi.

Bukti:

Misal banyaknya sisi adalah m maka dapat ditulis $m = n - 1$. Akan ditunjukkan bahwa $m = n - 1$ benar dengan menggunakan induksi matematika.

Untuk $n = 1$ maka diperoleh

$$m = n - 1$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0.$$

Untuk $n = n$, asumsikan bahwa $m = n - 1$ berlaku untuk semua pohon dengan banyaknya titik n dan banyaknya sisi m dengan $n \geq 1$.

Akan ditunjukkan bahwa $m = n - 1$ juga berlaku untuk banyaknya titik $n + 1$.

$$m = n - 1$$

$$m + 1 = n + 1 - 1$$

$$m = n + 1 - 1 - 1$$

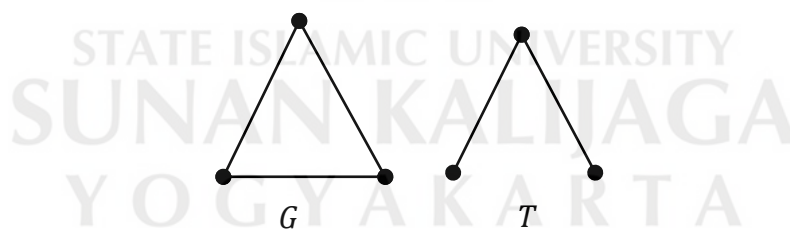
$$m = n - 1.$$

Jadi terbukti benar bahwa banyaknya sisi pada sebuah pohon adalah $n - 1$ dengan n adalah banyaknya titik pada sebuah pohon. ■

Definisi 2.2.4. (Aldous & Wilson, 2003, hal. 144) Pohon rentangan dari graf G adalah graf bagian dari G yang memuat seluruh titik pada G dan juga sebuah pohon.

Jika terdapat G terhubung yang bukan pohon, artinya pada G terdapat beberapa siklus. Graf G dapat diubah menjadi pohon dengan cara memutuskan siklus-siklus yang ada. Caranya, mula-mula pilih sebuah siklus, lalu hapus satu buah sisi dari siklus ini. G akan tetap terhubung dan jumlah siklusnya berkurang satu. Bila proses ini dilakukan terus-menerus sampai semua siklus di G hilang, maka G menjadi sebuah pohon (Munir, 2005, hal. 447).

Contoh 2.2.5.



Gambar 2. 11 Graf lengkap G dan pohon rentangannya T

Graf G pada Gambar 2.11 merupakan graf terhubung yang mengandung siklus sedangkan T adalah pohon rentangan dari graf G yang diperoleh dengan menghapus salah satu sisi pada graf G .

2.3 Matriks

Pada sub bab ini dijelaskan mengenai matriks dan operasi-operasi dalam matriks yang akan digunakan sebagai dasar untuk memahami pembuktian teorema pohon matriks dan perhitungan banyaknya pohon rentangan.

2.3.1 Definisi Matriks

Definisi 2.3.1.1. (Anton, 1987, hal. 25) Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut entri dari matriks.

Contoh 2.3.1.2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{7} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [2]$$

Berdasarkan Contoh 2.3.1.2., terlihat bahwa suatu matriks memiliki ukuran yang berbeda-beda. Ukuran suatu matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (*arah horizontal*) dan banyaknya kolom (*arah vertikal*) yang dimiliki oleh matriks tersebut. Misalkan matriks pertama pada Contoh 2.3.1.2. memiliki banyak baris 3 dan banyak kolom 2 sehingga disebut matriks berukuran 3 kali 2 ditulis dengan 3×2 . Angka pertama pada ukuran matriks menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom. Jadi dari Contoh 2.3.1.2., ukuran matriks berturut turut adalah 3×2 , 1×4 , 3×3 , 2×1 dan 1×1 .

Suatu matriks yang hanya memiliki satu kolom disebut matriks kolom (*vektor kolom*). Begitu pula dengan matriks yang hanya memiliki satu baris disebut matriks baris (*vektor baris*). Berdasarkan Contoh 2.3.1.2., matriks 1×4 merupakan

matriks baris, matriks 2×1 adalah matriks kolom dan matriks 1×1 adalah matriks baris dan matriks kolom.

Entri yang terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j pada suatu matriks A dinyatakan dengan a_{ij} . Jadi matriks umum $m \times n$ ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dan dinotasikan secara singkat sebagai $[a_{ij}]_{m \times n}$ atau $[a_{ij}]$.

Sebuah matriks dapat dipartisi menjadi bentuk yang lebih kecil. Partisi-partisi matriks ini disebut submatriks. Erick W. Weisstein dalam *MathWorld* menyatakan bahwa submatriks berukuran $p \times q$ dari matriks berukuran $m \times n$ adalah matriks berukuran $p \times q$ dengan $p \leq m$ dan $q \leq n$ dibentuk dengan mengambil beberapa bagian elemen dari ukuran matriks aslinya.

Berdasarkan salah satu Contoh 2.3.1.2. yaitu $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ maka salah satu submatriks dari matriks tersebut adalah $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ yang diperoleh dengan mengambil baris kedua dan baris ketiga dari matriks semula.

2.3.2 Operasi pada Matriks

Definisi 2.3.2.1. (Anton & Rorres, 2004, hal. 28) Dua matriks dikatakan setara (*equal*) jika memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang sama bersesuaian.

Pada notasi matriks, jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama maka $A = B$ jika dan hanya jika $[a_{ij}] = [b_{ij}]$ untuk semua i dan j .

Contoh 2.3.2.2.

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pada Contoh 2.3.2.2., matriks A dikatakan bersesuaian dengan B apabila nilai $x = 4$ sehingga memenuhi definisi dengan memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian nilainya sama.

Definisi 2.3.2.3. (Anton & Rorres, 2004, hal. 28) Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian dengan A dan selisih (*difference*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi entri-entri pada A yang bersesuaian dengan B . Matriks dengan ukuran berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Contoh 2.3.2.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 5+2 & 3+1 \\ 4+0 & 2+3 & 7+4 \\ 0+1 & 3+3 & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 11 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A - B &= \begin{bmatrix} 1-5 & 5-2 & 3-1 \\ 4-0 & 2-3 & 7-4 \\ 0-1 & 3-3 & 1-1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

sedangkan $A + C$, $B + C$, $A - C$ dan $B - C$ tidak terdefinisi.

Definisi 2.3.2.5. (Anton & Rorres, 2004, hal. 29) Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka hasilkali-nya (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A dengan bilangan c . Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari A .

Contoh 2.3.2.6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $c = 5$ maka nilai perkalian cA adalah

$$\begin{aligned}
 cA &= 5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 25 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definisi 2.3.2.7 (Anton & Rorres, 2004, hal. 30) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari pada baris i dan kolom j dari AB , pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B . Kalikan entri-

entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.3.2.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks A berukuran 2×3 dan matriks B berukuran 3×3 maka hasil kali matriks A dan B berukuran 2×3 . Diperoleh perhitungan hasil kalinya adalah

$$a_{11} = (2 \times 4) + (5 \times (-1)) + ((-1) \times 7) = -3$$

$$a_{12} = (2 \times 0) + (5 \times 3) + ((-1) \times 1) = 14$$

$$a_{13} = (2 \times 2) + (5 \times 5) + ((-1) \times 4) = 28$$

$$a_{21} = (3 \times 4) + (0 \times (-1)) + (1 \times 7) = 19$$

$$a_{22} = (3 \times 0) + (0 \times 3) + (1 \times 1) = 1$$

$$a_{23} = (3 \times 2) + (0 \times 1) + (1 \times 4) = 10$$

Jadi,

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & 14 & 28 \\ 19 & 1 & 10 \end{bmatrix}.$$

2.3.3 Transpos dan Determinan Matriks

Definisi 2.3.3.1. (Anton & Rorres, 2004, hal. 36) Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A (*transpose of A*), dinyatakan dengan A^T , didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-

kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A , kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya. Transpos matriks dapat dituliskan sebagai $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.

Contoh 2.3.3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 \\ 8 & -4 & 26 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 27 & -4 \\ 30 & 26 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.3.3.3. (Anton & Rorres, 2004, hal. 51) Jika ukuran matriks sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan, maka

1. $((A^T)^T) = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan $(A - B)^T = A^T - B^T$
3. $(kA)^T = kA^T$ dengan k adalah skalar sebarang
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Bukti:

Transpos terhadap suatu matriks adalah mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolomnya, sehingga pada Teorema 2.3.3.3. bagian 1, 2 dan 3 jelas terbukti dengan sendirinya.

Akan dibuktikan Teorema 2.3.3.3. bagian 4 sebagai berikut.

Misalkan $A = [a_{ij}]_{m \times r}$ dan $B = [b_{ij}]_{r \times n}$ sedemikian sehingga hasil kali dari AB dan $B^T A^T$ dapat diperoleh. Oleh karena matriks A berukuran $m \times r$ dan

matriks B berukuran $r \times n$, maka hasil kali yang diperoleh akan berukuran $m \times n$ sehingga ukuran matriks $(AB)^T$ diperoleh sebaliknya yaitu $n \times m$.

Akan ditunjukkan bahwa entri-entri yang bersesuaian dengan $(AB)^T$ dan $B^T A^T$ adalah sama, yaitu

$$((AB)^T)_{ij} = (B^T A^T)_{ij} \quad (2.2)$$

Menggunakan Definisi 2.3.2.9. tentang transpos matriks diperoleh

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \end{aligned}$$

Pada ruas kanan Persamaan (2.2) dapat dinyatakan dengan menggunakan entri-entri dari A^T dan B^T yaitu a'_{ij} dan b'_{ij} sehingga

$$a'_{ij} = a_{ji} \text{ dan } b'_{ij} = b_{ji}$$

Berdasarkan Definisi 2.3.2.7. tentang perkalian matriks diperoleh

$$\begin{aligned} (B^T A^T)_{ij} &= b'_{i1}a'_{1j} + b'_{i2}a'_{2j} + \cdots + b'_{ir}a'_{rj} \\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ri}a_{jr} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jr}b_{ri} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(AB)^T = B^T A^T$. ■

Definisi 2.3.3.4. (Anton, 1987, hal. 83) Misalkan A adalah matriks kuadrat, fungsi determinan (*determinant function*) dinyatakan dengan $\det$, maka $\det(A)$ didefinisikan sebagai jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari A .

Hasil perkalian elementer yang bertanda dari A diartikan sebagai sebuah hasil perkalian elementer $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ dikalikan dengan $+1$ dan -1 . Tanda $+$ digunakan jika $j_1, j_2, \dots, j_n$ adalah permutasi genap dan tanda $-$ digunakan jika $j_1, j_2, \dots, j_n$ adalah permutasi ganjil. Secara simbolis determinan A ditulis sebagai berikut

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}.$$

Contoh 2.3.3.5.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32}) - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{31}a_{22}$$

Definisi 2.3.3.6. (Anton, 1987, hal. 83) Jika A adalah suatu matriks kuadrat, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang tetap setelah baris ke- i dan kolom ke- j dicoret dari A . Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dinamakan kofaktor entri a_{ij} .

Contoh 2.3.3.7.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, maka nilai kofaktor a_{11} adalah

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (-1)^{1+1}M_{11} \\
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 18 - 28 \\
&= -10
\end{aligned}$$

Selain menerapkan Definisi 2.3.3.4., ada cara lain untuk memudahkan menghitung suatu determinan yaitu menggunakan metode reduksi baris dan ekspansi kofaktor. Metode reduksi baris sangat sesuai untuk menghitung determinan menggunakan komputer karena metode tersebut sistematis dan mudah diprogramkan. Akan tetapi, untuk perhitungan dengan cara manual ekspansi kofaktor lebih mudah digunakan.

Metode reduksi baris adalah metode yang mengubah bentuk suatu matriks menjadi matriks segitiga atas atau bawah yang dilakukan dengan cara operasi baris elementer (OBE). Operasi baris elementer merupakan operasi aritmatika yang dikenakan pada setiap unsur baris pada sebuah matriks. Ada tiga jenis operasi yang dilakukan dalam OBE yaitu:

1. Mengalikan baris dengan konstanta tak nol
2. Menukarkan posisi dua baris
3. Menambahkan kelipatan satu baris ke baris lainnya.

Metode ekspansi kofaktor dapat dijelaskan melalui teorema berikut.

Teorema 2.3.3.8. (Anton, 1987, hal. 85) Determinan suatu matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris

(kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil perkalian yang dihasilkan yaitu untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Contoh 2.3.3.9.

Hitunglah $\det(A)$ menggunakan reduksi baris dan ekspansi kofaktor

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Reduksi baris

$$\begin{aligned}
 A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Baris pertama dan kedua} \\ \text{dari } A \text{ dipertukarkan} \end{array} \\
 &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Semua faktor bersama} \\ \text{yaitu 2 dari baris pertama} \\ \text{dikeluarkan melewati} \\ \text{tanda determinan} \end{array} \\
 &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} -3 \text{ kali baris pertama} \\ \text{ditambahkan ke baris} \\ \text{ketiga} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

← 6 kali baris kedua ditambahkan ke baris ketiga

$$= (-2)(7) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

← Suatu faktor bersama yaitu 7 dari baris terakhir dikeluarkan melewati tanda deeterminan

$$= (-2)(7)(1)$$

$$= -14$$

Ekspansi kofaktor

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1(2 - 12) + 2(12 - 24)$$

$$= 10 - 24$$

$$= -14$$

2.3.4 Matriks Nonsingular, Rank Matriks dan Nulitas

Definisi 2.3.4.1. (Lipschutz, 1991, hal. 45) Sebuah matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan nonsingular jika $\det(A) \neq 0$.

Contoh 2.3.4.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah matriks nonsingular sebab determinan dari A bukan 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 \\ = 5$$

Matriks B merupakan matriks singular sebab determinan dari B adalah 0.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 8 \\ = 0$$

Definisi 2.3.4.3. (Anton & Rorres, 2004, hal. 294) Dimensi ruang baris dan ruang kolom dari sebuah matriks A dinamakan rank dari A dan dinyatakan sebagai $\text{rank}(A)$. Dimensi dari ruang nul A disebut sebagai nulitas (nulity) dari A dan dinyatakan sebagai $\text{nulitas}(A)$.

Nulitas dari suatu matriks A disebut juga kernel atau inti dari matriks A sehingga dimensi ruang nul dari matriks A sama dengan dimensi dari kernel suatu matriks A.

Teorema 2.3.4.4. (Anton & Rorres, 2004, hal 295) Jika A adalah matriks dengan n kolom, maka $\text{rank}(A) + \text{Nulitas}(A) = n$.

Bukti:

Diketahui A memiliki n kolom, maka sistem linear homogen $Ax = 0$ memiliki n faktor yang tidka diketahui (variabel). Variabel ini terbagi dalam dua kategori yaitu variabel utama dan variabel bebas. Jadi,

$$[\text{Banyaknya variabel utama}] + [\text{Banyaknya variabel bebas}] = n.$$

Banyaknya variabel utama sama dengan banyaknya 1 utama dalam bentuk eselon baris tereduksi dari A dan angka ini merupakan rank dari A sehingga diperoleh

$$\text{rank}(A) + [\text{Banyaknya variabel bebas}] = n.$$

Banyaknya variabel bebas sama dengan nulitas dari A sebab nulitas dari A adalah dimensi ruang solusi dari $Ax = 0$, yang sama banyaknya dengan parameter pada solusi umum. Jadi diperoleh

$$\text{rank}(A) + \text{nulitas}(A) = n. \quad \blacksquare$$

Contoh 2.3.4.5.

Tentukan rank dan ruang nul dari matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Menggunakan operasi baris elementer diperoleh bentuk eselon baris tereduksi pada matriks A di atas sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Terdapat dua baris tak nol maka ruang baris dan ruang kolom matriks A berdimensi 2 sehingga $\text{rank}(A) = 2$ sedangkan ruang nul dari A adalah banyaknya variabel bebas dari matriks A yaitu 3. Jadi menurut Teorema 2.3.4.4. diperoleh

$$\text{rank}(A) + \text{nulitas}(A) = 5.$$

2.3.5 Nilai Eigen

Definisi 2.3.5.1. (Santosa, 2009, hal. 159) Jika A adalah sebuah matriks berukuran $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol $\vec{x}$ di $\mathbb{R}^n$ dinamakan vektor eigen dari A jika $A\vec{x}$ adalah kelipatan skalar dari $\vec{x}$, yaitu:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A , sedangkan $\vec{x}$ dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Contoh 2.3.5.2.

Vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$ karena

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} \\ &= 2\vec{x}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.3.5.1., untuk mencari nilai eigen dari matriks A yang berukuran $n \times n$, maka

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$A\vec{x} = \lambda I\vec{x}$$

$$(A - \lambda I)\vec{x} = 0 \text{ atau } (\lambda I - A)\vec{x} = 0.$$

Persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika $\det(A - \lambda I) = 0$ atau $\det(\lambda I - A) = 0$. Persamaan ini disebut persamaan karakteristik matriks A . Skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini disebut nilai eigen. Apabila diperluas $\det(A - \lambda I)$ adalah sebuah polinomial p dalam variabel λ yang disebut sebagai polinomial karakteristik matriks A . Pada matriks A berukuran $n \times n$ maka polinomial karakteristik A memiliki derajat n dan koefisien variabel λ^n adalah 1. Bentuk umum polinomial karakteristik A adalah

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots \pm c_1\lambda \mp c_0.$$

Berdasarkan Teorema Dasar Aljabar, persamaan karakteristik

$$\lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots \pm c_1\lambda \mp c_0 = 0$$

memiliki sebanyak-banyaknya n solusi yang berbeda.

Contoh 2.3.5.3.

Carilah nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda - 8 \end{bmatrix}$$

Maka polinomial karakteristik dari A adalah

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda - 8 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 8) + 6 \\ &= \lambda^2 - 9\lambda + 14\end{aligned}$$

dan persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0.$$

Faktor dari persamaan di atas adalah $\lambda = 2$ dan $\lambda = 7$. Jadi diperoleh nilai eigen dari A adalah 2 dan 7.

Berdasarkan penjelasan di atas dapat disimpulkan tentang nilai eigen dalam teorema berikut.

Teorema 2.3.5.4. (Anton, 1987, hal. 282) Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen satu sama lain.

- λ adalah nilai eigen dari A.
- Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai solusi tak trivial.
- Ada sebuah vektor tak nol x di dalam R^n sehingga $Ax = \lambda x$.
- λ adalah solusi real dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow a$.

$a \Rightarrow b)$ λ merupakan nilai eigen dari matriks A sehingga menurut Definisi 2.3.5.1.

berlaku $Ax = \lambda x$ dengan x adalah vektor tak nol maka

$$Ax - \lambda Ix = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Karena x tak nol maka sistem persamaan linear homogen

$(A - \lambda I)x = 0$ harus memenuhi penyelesaian non trivial.

$b \Rightarrow c)$ Karena $(A - \lambda I)x = 0$ maka

$$Ax = \lambda Ix$$

$$Ax = \lambda x.$$

$c \Rightarrow d)$ Karena $Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda Ix$$

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Karena ada x tak nol, maka sistem persamaan linear homogen $(A - \lambda I)x = 0$ maka memiliki $\det(A - \lambda I)x = 0$ dengan λ adalah suatu solusi real.

$d \Rightarrow a)$ Karena λ adalah penyelesaian real dari persamaan $\det(A - \lambda I)x = 0$, maka

λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I)x = 0$ atau

dengan kata lain λ adalah nilai eigen dari matriks A . ■

Vektor eigen dari A bersesuaian dengan sebuah nilai eigen λ adalah vektor tak nol yang memenuhi $Ax = \lambda x$. Secara ekuivalen maka vektor eigen yang

bersesuaian dengan λ adalah vektor tak nol di dalam ruang solusi dari $(\lambda I - A)x = 0$. Ruang solusi ini disebut ruang eigen dari A yang bersesuaian dengan λ . Dimensi dari ruang eigen merupakan banyaknya solusi dengan variabel bebas. Oleh karena itu dimensi ruang eigen juga merupakan dimensi ruang nul atau kernel dari A . Dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan λ disebut juga multiplisitas dari λ .

Contoh 2.3.5.5.

Carilah ruang eigen dan dimensi ruang eigen dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} (\lambda I - A) &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

Polinomial karakteristik dari A adalah

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4. \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari A yaitu $\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1, \lambda = -2$ dan $\lambda = 2$.

Menurut Teorema 2.3.5.4., terdapat vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen dari

A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah solusi tak trivial dari $(\lambda I - A)x = 0$ yaitu

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -2 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Jika $\lambda = 1$, maka persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan $-x_1 = 0$, $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$ dan $-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$.

Jadi solusi sistem ini adalah $x_1 = 0$, $x_2 = s$ dan $x_3 = s$. Solusi sistem tersebut merupakan ruang eigen dari $\lambda = 1$ dan dimensi ruang eigen dari A adalah 1.

Jika $\lambda = -2$, maka persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4x_1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan $-4x_1 = 0$, $-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$ dan $-x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$.

Jadi solusi sistem ini adalah $x_1 = 0$, $x_2 = -2s$ dan $x_3 = s$. Solusi sistem tersebut merupakan ruang eigen dari $\lambda = -2$ dan dimensi ruang eigen dari A adalah 1.

Jika $\lambda = 2$, maka persamaan (2.3) menjadi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh persamaan $-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$ dan $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$. Jadi solusi sistem ini adalah $x_1 = s$, $x_2 = t$ dan $x_3 = t$. Solusi sistem tersebut merupakan ruang eigen dari $\lambda = 2$ dan dimensi ruang eigen dari A adalah 2.

2.4 Matriks pada Graf

Sub bab ini menjelaskan tentang graf pada matriks yang akan digunakan untuk menghitung banyaknya pohon rentangan dan pembuktian teorema pohon matriks.

Definisi 2.4.1. (Aldous & Wilson, 2003, hal. 113) Misalkan G adalah graf dengan n titik berlabel $1, 2, \dots, n$. Matriks ketetanggaan (*adjacency*) dari graf G dinotasikan dengan $A(G)$ adalah matriks $n \times n$ yang entri pada baris ke- i dan kolom ke- j adalah banyaknya sisi yang menghubungkan titik i dan j .

Definisi 2.4.2. (Aldous & Wilson, 2003, hal. 123) Misalkan G adalah graf tanpa loop memiliki n titik berlabel $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan m sisi berlabel $e_1, e_2, \dots, e_m$ maka

matriks keterkaitan (*incidency*) dari graf G dinotasikan dengan $M(G)$ adalah matriks $n \times m$ yang entri pada baris ke- i dan kolom ke- j dinyatakan dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika titik } i \text{ terkait langsung dengan sisi } j \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

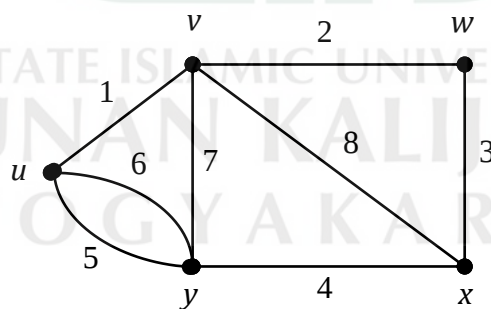
Jika G merupakan graf berarah, maka entri pada matriks $M(G)$ didefinisikan dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika sisi ke- } j \text{ menuju vertex } i \\ -1 & \text{jika sisi ke- } j \text{ menjauhi vertex } i \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases}$$

Definisi 2.4.3. (Ocansey, 2011, hal. 7) Misalkan G adalah sebuah graf, maka matriks derajat dari G yang berukuran $n \times n$ dan dinotasikan dengan $D(G)$ dapat dinyatakan dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} \deg(v) & \text{jika } i = j \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Contoh 2.4.4.



Gambar 2. 12 Matriks pada Graf

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(G) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4.5. (Ocansey, 2011, hal. 7) Diberikan G merupakan sebuah graf sederhana dengan matriks ketetangaan A dan matriks derajat D , maka matriks laplacian L didefinisikan sebagai selisih antara matriks derajat dan matriks ketetangaan ($L = D - A$). Dengan kata lain, elemen dari matriks L dinyatakan dengan

$$L(G) = \begin{cases} \deg(v_i) & \text{diagonal} \\ -1 & \text{adjacent} \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

2.5 Teorema Pohon Matriks

Sebelum membuktikan teorema pohon matriks pada graf multipartit lengkap pada bab pembahasan akan dibuktikan terlebih dahulu teorema pohon matriks umum berikut ini. Pada sub bab ini akan dijelaskan dengan rinci langkah-langkah pembuktian teorema pohon matriks.

Lemma 2.5.1. (Boomen, 2007, hal. 7) Diberikan graf G dengan n titik maka G terhubung jika dan hanya jika rank dari matriks keterkaitan $M(G)$ adalah $n - 1$.

Bukti:

$\Rightarrow$) Misal diambil sebarang bilangan positif r dengan $r < n$. Entri-entri baris r harus mengandung setidaknya satu elemen tidak nol. Hal ini karena ada sisi yang menghubungkan titik r dengan titik selain r sehingga tidak bertentangan dengan keterhubungan graf G . Oleh karena itu, tidak ada baris-baris r yang bergantung linear jika $r < n$. Menggunakan OBE diperoleh baris n bergantung linear sehingga rank dari $M(G)$ adalah $n - 1$.

$\Leftarrow$) Jika $\text{rank}(M(G)) = n - 1$, maka tidak ada baris-baris $r < n$ yang semua entrinya bernilai 0. Jadi tidak ada titik r yang tidak terhubung dengan titik $n - r$. Oleh karena itu G terhubung. ■

Jika orientasi arah sisi ke- j menjauhi titik i_1 dan menuju titik i_2 , maka $a_{i_1,j} = -1$, $a_{i_2,j} = 1$ dan entri kolom lainnya bernilai 0. Jadi, setiap kolom dari $M(G)$ terdiri dari tepat satu elemen -1 , satu elemen $+1$ dan lainnya 0. Jika dibentuk matriks baru yaitu $\tilde{M}(G)$ dengan menghapus sebarang baris ke- n pada matriks $M(G)$ maka ada beberapa kolom yang elemennya terdiri satu elemen -1 atau 1 dan

lainnya 0. Menggunakan OBE diperoleh bahwa setiap baris dari $\tilde{M}(G)$ tidak bergantung linear. Oleh karena itu, jelas bahwa $\text{rank } M(G) = \text{rank } \tilde{M}(G)$ sehingga Lemma 2.5.1., ini berakibat

$$G \text{ terhubung jika dan hanya jika } \text{rank } \tilde{M}(G) = n - 1$$

Apabila dibentuk submatriks bujursangkar nonsingular dari $M(G)$ maka pada submatriks tersebut berlaku sifat khusus untuk mencari determinan. Sebelum membahas tentang sifat khusus tersebut akan diberikan definisi tentang Total Unimodular (TU) dan lemma yang terkait dengan TU yang dapat digunakan untuk membuktikan sifat khusus determinan pada submatriks nonsingular dari $M(G)$.

Definisi 2.5.2. (Boomen, 2007, hal. 8) Diberikan M adalah matriks dengan entri $-1, 1$ atau 0 sedemikian sehingga setiap kolom mengandung paling banyak satu entri -1 dan satu entri 1 . Maka M adalah Total Unimodular (TU).

Lemma 2.5.3. (Boomen, 2007, hal. 8) Sebuah matriks M berukuran $r \times s$ disebut Total Unimodular (TU) jika setiap submatriks $k \times k$ memiliki determinan sama dengan $-1, 1$ atau 0 ($1 \leq k \leq \min\{r, s\}$).

Bukti:

Menggunakan induksi matematika akan dibuktikan bahwa setiap submatriks M memiliki determinan $-1, 1$ atau 0 .

Untuk $k = 1$ maka determinannya jelas yaitu $-1, 1$ atau 0 .

Asumsikan $k \geq 2$ dan M_k adalah submatriks M berukuran $k \times k$. Jika M_k memiliki sebuah kolom dengan satu elemen tak nol, maka $\det(M_k)$ dapat dicari

dengan memanfaatkan kolom tersebut sehingga diperoleh determinan $\det(M_k) = \pm \det(M_{k-1})$ dengan M_{k-1} adalah submatriks dari M_k yang berukuran $(k-1) \times (k-1)$, dan $\det(M_{k-1}) = -1, 1$ atau 0 dengan hipotesis induksi. Jadi $\det(M_k) = -1, 1$ atau 0 .

Jika M_k tidak memiliki kolom dengan tepat satu elemen tak nol, maka ada baris-baris dari M_k yang semua entrinya adalah 0 . Maka $\det(M_k) = 0$

Jadi $\det(M_k) = -1, 1$ atau 0 untuk semua nilai k . ■

Lemma 2.5.4. (Boomen, 2007, hal. 7) Jika B adalah submatriks nonsingular dari $M(G)$, maka determinan dari $B = \pm 1$.

Bukti:

Misalkan B adalah submatriks bujursangkar nonsingular dari $M(G)$ berukuran $k \times k$. Setiap kolom pada matriks $M(G)$ mengandung tepat satu entri -1 , satu entri 1 dan entri lainnya 0 . Berdasarkan Definisi 2.5.2., $M(G)$ adalah TU sehingga diperoleh bahwa $\det(B) = -1, 1$ atau 0 . Oleh sebab B nonsingular maka $\det(B) \neq 0$ sehingga $\det(B) = \pm 1$. ■

Teorema 2.5.5. Binet-Chaucy (Boomen, 2007, hal. 9) Diberikan R adalah matriks berukuran $m \times n$ dan S matriks berukuran $n \times m$, dengan $m \leq n$ maka,

$$\det(RS) = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \det(R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}) \cdot \det(S_{k_1}^T, S_{k_2}^T, \dots, S_{k_m}^T)$$

Bukti:

Elemen pada baris ke- i dan kolom ke- j dari RS dapat dituliskan dengan $\sum_{k=1}^n r_{ik} \cdot s_{kj}$, jadi kolom ke- j juga dapat ditulis $(RS)_j = \sum_{k=1}^n r_k \cdot s_{kj}$. Jadi,

$$\begin{aligned}
 \det(RS) &= \det(RS_1, RS_1, \dots, RS_p) \\
 &= \det\left(\sum_{k_1=1}^n R_{k_1} s_{k_1 1}, \sum_{k_2=1}^n R_{k_2} s_{k_2 2}, \dots, \sum_{k_m=1}^n R_{k_m} s_{k_m m}\right) \\
 &= \sum_{k_1=1}^n s_{k_1 1} \det(R_{k_1}, \sum_{k_2=1}^n R_{k_2} s_{k_2 2}, \dots, \sum_{k_m=1}^n R_{k_m} s_{k_m m}) \\
 &= \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \dots \sum_{k_p=1}^n s_{k_1 1} s_{k_2 2} \dots s_{k_m m} \det(R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}) \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Jelas bahwa $\det(R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}) = 0$ ketika $k_i = k_j$ untuk $i \neq j$. Oleh karena itu, akan dijumlahkan setiap k_i yang berbeda.

Pertama pilih banyaknya m sehingga $k_1, k_2, \dots, k_m$. Pilih m dari $1, \dots, n$ dengan $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ dan kemudin angka-angka tersebut akan dipermutasi dengan permutasi $\sigma \in S_m$. Fungsi $sgn(\sigma)$ akan menentukan nilai positif atau negatif dari hasil permutasi. Jika hasil permutasi genap maka bernilai +1 dan jika permutasi ganjil maka bernilai -1. Secara umum permutasi determinan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\det(B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \dots, B_{\sigma(n)}) = sgn(\sigma) \det(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

Apabila rumus permutasi determinan diterapkan dalam rumus leibniz maka diperoleh

$$\det(B) = \det(B_1, B_2, \dots, B_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \det(b_{11}e_1 + \dots + b_{1n}e_n, \dots, b_{n1}e_1 + \dots + b_{nn}e_n) \\
&= \sum_{\sigma} b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} \det(e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Kemudian aplikasikan persamaan (2.5) ke dalam persamaan (2.4) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\det(RS) &= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \sum_{\sigma \in S_m} s_{k_{\sigma(1)}1} s_{k_{\sigma(2)}2} \dots s_{k_{\sigma(m)}m} \det(R_{k_{\sigma(1)}}, R_{k_{\sigma(2)}}, \dots, R_{k_{\sigma(m)}}) \\
&= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \sum_{\sigma \in S_m} s_{k_{\sigma(1)}1} s_{k_{\sigma(2)}2} \dots s_{k_{\sigma(m)}m} \text{sgn}(\sigma) \det(R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}) \\
&= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \det(R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}) \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) s_{k_{\sigma(1)}1} s_{k_{\sigma(2)}2} \dots s_{k_{\sigma(m)}m} \\
&= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n} \det(R_{k_1}, R_{k_2}, \dots, R_{k_m}) \cdot \det(S_{k_1}^T, S_{k_2}^T, \dots, S_{k_m}^T) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Maka persamaan (2.6) dapat sederhana menjadi

$$\det(RS) = \sum_{P \in \binom{[n]}{m}} \det(R[[m]|P]) \cdot \det(S[P|[m]]) \quad \blacksquare$$

Teorema 2.5.6. (Ocansey, 2011, hal. 7) Diberikan $G(V, E)$ adalah sebuah graf berlabel terhubung dengan A adalah matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) dan D adalah matriks derajat (*degree matrix*), maka banyaknya pohon rentangan (*spanning tree*) dari G dinotasikan dengan $\tau(G)$ sama dengan nilai setiap kofaktor dari matriks laplacian $L = D - A$ dari G .

Bukti:

Diketahui terdapat graf berlabel terhubung $G(V, E)$ dengan A adalah matriks ketetanggaan dan D adalah matriks derajat maka L adalah matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan. Oleh karena G terhubung, misal m adalah jumlah sisi dan n jumlah titik maka $m \geq n - 1$.

Dibentuk matriks keterkaitan (*incidency matrix*) dari graf G yaitu M . Diketahui G terhubung maka setiap sisi di G pasti bersisian dengan 2 titik di G sehingga untuk setiap kolom di M setidaknya terdapat dua angka 1 dan $n - 2$ angka 0. Menggunakan matriks M akan dibuat matriks baru yaitu N dengan ukuran dan elemen yang sama dengan matriks M tetapi untuk setiap elemen pada kolom matriks N akan diubah angka 1 paling atas dengan angka -1 . Kemudian dibentuk transpos dari N dinamakan N^T sehingga diperoleh

$$NN^T = L.$$

Jika matriks N berukuran $n \times m$ maka matriks N^T berukuran $m \times n$ sehingga hasil perkalian kedua matriks tersebut akan membentuk matriks bujursangkar berukuran $n \times n$. Berdasarkan aturan perkalian matriks didefinisikan perkalian NN^T sebagai perkalian elemen dari baris i pada $N = (N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{im})$ dan kolom j pada $N^T = (N_{1j}^T, N_{2j}^T, \dots, N_{mj}^T)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} [NN^T]_{ij} &= ([N]_{i1}, [N]_{i2}, \dots, [N]_{im}) \cdot ([N^T]_{1j}, [N^T]_{2j}, \dots, [N^T]_{mj}) \\ &= ([N]_{i1}, [N]_{i2}, \dots, [N]_{im}) \cdot ([N]_{j1}, [N]_{j2}, \dots, [N]_{jm}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^m [N]_{ik} [N]_{jk}.$$

Akan ditunjukkan bahwa setiap entri pada matriks NN^T sama dengan selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan.

Jika $i = j$ maka nilai $[NN^T]_{ij}$ sama dengan derajat dari v_i . Jika $i \neq j$ dengan $v_i v_j \notin E(G)$ maka nilai $[NN^T]_{ij}$ sama dengan 0 karena tidak ada sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j . Jika $i \neq j$ dengan $v_i v_j \in E(G)$ maka nilai $[NN^T]_{ij}$ tidak nol karena menunjukkan ada sisi yang menghubungkan antara titik v_i dan titik v_j sehingga nilai dari $[NN^T]_{ij}$ adalah -1 atau 1 . Kemudian dipilih hasil penjumlahan terkecil yaitu -1 . Oleh karena itu terbukti bahwa untuk setiap entri dari $[NN^T]_{ij}$ sama dengan entri matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan.

Kemudian akan diselidiki bahwa nilai kofaktor dari matrik laplacian (L) yang merupakan determinan dari submatriks L adalah banyaknya pohon rentangan dari G . Misal diberikan T adalah subgraf dari G dengan n titik dan $n - 1$ sisi. Jika r adalah sebarang bilangan bulat positif sedemikian sehingga $1 \leq r \leq n$ maka dapat dibentuk submatriks berukuran $(n - 1) \times (n - 1)$ yaitu N' dari matriks N dengan menghapus baris ke- r dan kolom yang tidak bersesuaian dengan sisi pada T .

Asumsikan bahwa jika T adalah pohon maka $\det(N') = 1$, jika bukan $\det(N') = 0$.

Akan dibuktikan jika T bukan pohon maka $\det(N') = 0$. Diketahui T memiliki n titik dan $n - 1$ sisi. Jika T bukan pohon maka T tidak terhubung sehingga T memiliki komponen terhubung yaitu $T = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Misal dipilih satu komponen terhubung yaitu $T_1 \in T$ sedemikian sehingga $v_r \notin V(T_1)$, maka terbentuk matriks baru N'' dengan ukuran $V(T_1) \times (n - 1)$ yang diperoleh dengan menghapus semua baris pada matriks N' yang tidak bersesuaian dengan himpunan titik $V(T_1)$. Oleh karena $V(T_1)$ terhubung maka entri setiap kolom pada N'' terdiri dari 2 elemen tak nol dan lainnya nol. Menggunakan OBE diperoleh bahwa terdapat vektor baris pada N'' yang semuanya entrinya bernilai 0 sehingga baris-baris pada N'' bergantung linear. Sebab baris-baris pada N'' juga merupakan baris pada N' maka baris-baris pada N' juga bergantung linear. Hal ini menyebabkan $\det(N') = 0$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa jika T pohon maka $\det(N') = 1$. Oleh karena T pohon maka T terhubung sehingga dapat dibentuk matriks N' berukuran $(n - 1) \times (n - 1)$. Menurut akibat dari Lemma 2.5.1., matriks N' memiliki rank $n - 1$. N' merupakan submatriks dari N sehingga entri setiap kolomnya terdiri dari 1, -1 dan 0. Berdasarkan Definisi 2.5.2., matriks N' adalah TU dan memenuhi Lemma 2.5.3 bahwa matriks N' memiliki determinan $-1, 1$ atau 0. Jelas N' adalah submatriks nonsingular dari N maka berdasarkan Lemma 2.5.4 $\det(N') = \pm 1$.

Kemudian akan diselidiki kofaktor dari $NN^T = L$. Dalam aljabar matriks, terdapat matriks bujursangkar katakan A yang memiliki invers yaitu A^{-1} sehingga diperoleh

$$AA^{-1} \quad (2.7)$$

Jika diketahui $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ maka persamaan (2.7) dapat ditulis

sebagai

$$A \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = I$$

$$A \text{adj}(A) = \det(A) I$$

$\text{Adj}(A)$ merupakan adjoin dari A yang didefinisikan sebagai trasnpos dari matriks kofaktor A dan I adalah matriks identitas. Pada matriks laplacian L berlaku

$$L \text{adj}(L) = 0.$$

Hal ini dikarenakan $\text{rank}(L) \leq n - 1$ sehingga $\det(L) = 0$.

Jika $\text{rank}(L) < n - 1$, maka determinan dari semua submatriks L yang berukuran $(n - 1) \times (n - 1)$ adalah 0 karena rank submatriks tersebut $< n - 1$. Oleh karena itu, semua kofaktor dari L bernilai 0.

Jika $\text{rank}(L) = n - 1$, maka $\dim(\ker L) = 1$. Jadi, $\ker L = \langle [1, \dots, 1]^T \rangle$ sehingga $\text{adj}(L)$ dapat dibentuk menjadi

$$\text{adj}(L) = c \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \text{ (dengan } c \text{ konstan).}$$

Hal ini mengakibatkan bahwa nilai setiap kofaktor L sama untuk $\forall i, j$ sehingga dapat dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ diperoleh

$$C_{11} = \det[NN^T(1,1)]$$

$$= \det(N_1 N_1^T).$$

Dalam hal ini N_1 adalah matriks yang diperoleh dengan menghapus baris pertama pada N dan N_1^T adalah matriks yang diperoleh dengan menghapus kolom pertama dari N^T . Menurut teorema Binet-Cauchy diketahui bahwa

$$\det(RS) = \sum_{P \in \binom{[n]}{m}} \det(R[[m]|P]) \cdot \det(S[P|[m]]),$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= \det(N_1 N_1^T) \\ &= \sum_{P \in \binom{[n]}{m}} \det(N_1[[m]|P]) \cdot \det(N_1^T[P|[m]])^T \\ &= \sum_{P \in \binom{[n]}{m}} \det(N_1[[m]|P])^2 \\ &= \sum_{N_1 \text{ nonsingular}} \det(N_1[[m]|P])^2 + \sum_{N_1 \text{ singular}} \det(N_1[[m]|P])^2 \\ &= \sum_{N_1 \text{ nonsingular}} \det(N_1[[m]|P])^2 \\ &= \sum_{N_1 \text{ nonsingular}} \pm 1 \\ &= \sum_{N_1 \text{ nonsingular}} 1 \end{aligned}$$

Oleh karena $\det(N')$ adalah submatriks nonsingular dari N dan pohon rentangan dari graf G dapat disimpulkan bahwa $C_{11} = \det(N_1 N_1^T)$ adalah banyaknya submatriks non-singular dari NN^T dan juga banyaknya pohon rentangan dari G dinotasikan dengan $\tau(G)$. Secara umum dapat dituliskan dengan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(NN^T(i, j)) = \tau(G).$$

Terbukti bahwa banyaknya pohon rentangan $\tau(G)$ adalah sama dengan nilai kofaktor dari matriks laplacian dan matriks laplacian merupakan selisih antara matriks derajat dan matriks ketetanggaan ($L = D - A$). ■

2.6. Pohon Rentangan dan Nilai Eigen

Pada sub bab sebelumnya dijelaskan tentang pembuktian teorema pohon matriks. Pada pembuktian tersebut diketahui bahwa banyaknya pohon rentangan pada suatu graf terhubung dapat dihitung dengan mencari nilai kofaktor dari suatu matriks laplacian. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(NN^T(i, j)) = \tau(G).$$

Sub bab ini akan menjelaskan tentang hubungan antara pohon rentangan dengan nilai eigen. Sebelumnya melalui Lemma 2.6.1 akan dijelaskan bahwa koefisien dari karakteristik polinomial matriks laplacian yaitu λ sama dengan jumlah semua nilai kofaktor dari diagonal utama matriks laplacian.

Lemma 2.6.1. (Liaghat & Saberi, 2015, hal 3) $\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i = \sum_{i=1}^n C_{ii}$.

Bukti:

Diketahui L adalah matriks laplacian dengan karakteristik polinomial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(I\lambda - L) \\ &= \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots \pm c_1\lambda \mp c_0 \end{aligned}$$

Jika diperoleh faktor polinomial karakteristik dari L adalah $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, maka $p(\lambda)$ dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad \lambda_n = 0, \text{ karena } \det(L) = 0 = \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ &= \lambda(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{n-1}) \end{aligned}$$

$$= \lambda^n - \lambda^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \dots \pm \lambda \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

Diperoleh nilai koefisien dari λ adalah $(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$.

Akan dibuktikan bahwa nilai koefisien tersebut sama dengan $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n C_{ii}$. Jika terdapat dua matriks bujursangkar A dan B maka $\det(A+B)$ dapat ditulis

$$\det(A + B) = \sum_s \det(As, B\bar{s})$$

dengan s merupakan iterasi atas himpunan tak kosong dari $\{1, 2, \dots, n\}$. Dengan menerapkan rumus tersebut pada $\det(I\lambda - L)$ diperoleh

$$\det(I\lambda + (-L)) = \sum_s \det((I\lambda)s, (-L)\bar{s})$$

Diperoleh bahwa $\det(I\lambda + (-L)) = \alpha \lambda |s|$ untuk beberapa α konstan. Oleh karena itu koefisien dari λ^k pada $P(\lambda)$ adalah

$$(-1)^{n-k} \sum \det(\text{minor} - \text{minor utama dari } n - k).$$

Hal ini berakibat koefisien dari λ adalah $(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n C_{ii}$.

Lemma 2.6.1. terbukti benar sehingga untuk Teorema 2.5.6. berakibat sebagai berikut.

Akibat 2.6.2. (Ocansey, 2011, hal. 13) Diberikan G graf berlabel terhubung dengan himpunan titik $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan L adalah matriks laplacian dari G . Maka banyaknya pohon rentangan dari G , dinotasikan dengan $\tau(G)$ yaitu

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

dengan λ_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$ bukan nilai eigen yang bernilai 0.

Bukti:

Misal L adalah matriks laplacian dari graf terhubung G . Polinomial karakteristik dari L dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(I\lambda - L) \\ &= \lambda^n - c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots \pm c_1\lambda \mp c_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Berdasarkan Lemma 2.6.1 koefisien c_1 merupakan jumlah semua kofaktor diagonal utama dari matriks laplacian. Sebab kofaktor dari matriks laplacian merupakan banyaknya pohon rentangan pada suatu graf terhubung menurut Teorema 2.5.6, yang dilambangkan dengan $\tau(G)$, maka Teorema 2.5.6. berakibat

$$c_1 = n \times \tau(G). \quad (2.9)$$

Menurut Lemma 2.6.1. koefisien λ juga sama dengan $\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$ maka $c_1 = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$ sehingga diperoleh

$$n \times \tau(G) = \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$$

■



BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pembuktian teorema pohon matriks dan penerapannya dalam menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ dengan $n_i \leq 3$, $i = 1, 2, 3$, dan $n_i \in \mathbb{N}$.

3.1 Pembuktian Teorema Pohon Matriks pada Graf Multipartit Lengkap

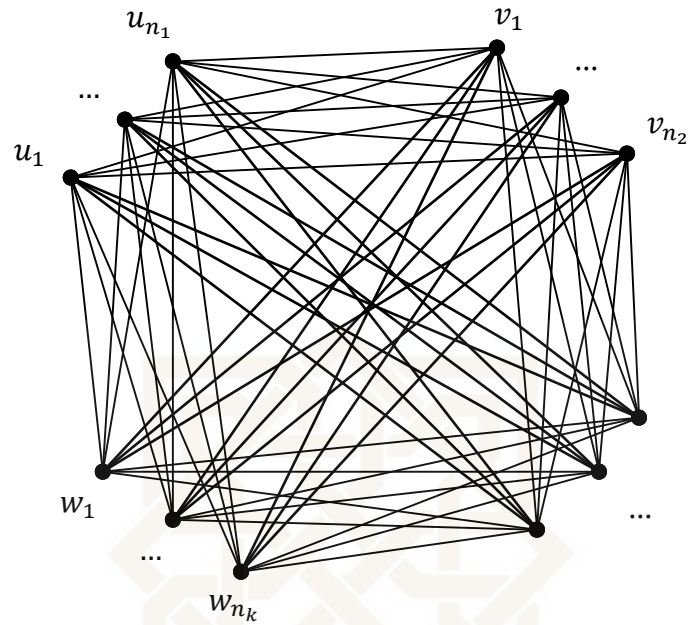
$(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$

Teorema 3.1.1. Misal $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ adalah graf multipartit lengkap dengan $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$, maka banyaknya pohon rentangan dari graf multipartit lengkap $(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ adalah

$$\tau(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = n^{k-2} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i-1}.$$

Bukti:

Diketahui $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ adalah graf multipartit lengkap dengan $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$. Misal $u_1, \dots, u_{n_1} \in V_{n_1}$, $v_1, \dots, v_{n_2} \in V_{n_2}$ dan seterusnya hingga $w_1, \dots, w_{n_k} \in V_{n_k}$ maka graf multipartit lengkap $(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ dengan $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, k$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 3. 1 Graf multipartit lengkap ($K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$)

Menggunakan langkah pada Teorema 2.5.6., akan dibuat matriks ketetanggaan dari graf multipartit lengkap ($K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$) berdasarkan Gambar 3.1 yaitu

$$A(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks derajat dari graf multipartit lengkap berdasarkan Gambar 3.1. yaitu

$$D(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} n-n_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n-n_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & n-n_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & n-n_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & n-n_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & n-n_k \end{array} \right)$$

Kemudian dicari matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dan matriks ketetanggaan yaitu

$$L = D(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) - A(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} n-n_1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & n-n_1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \hline -1 & \cdots & -1 & n-n_2 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & n-n_2 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & n-n_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & n-n_k \end{array} \right)$$

Matriks derajat dan matriks ketetanggaan merupakan matriks bujursangkar yang ordenya ditentukan berdasarkan banyaknya titik pada suatu graf. Oleh karena matriks laplacian merupakan selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan maka orde matriks laplacian sama dengan matriks derajat dan matriks ketetanggaan. Diketahui bahwa banyaknya titik pada graf multipartit lengkap

merupakan jumlah semua titik dari setiap partisinya atau dapat ditulis dengan $\sum_{i=1}^k n_i$. Jadi, orde dari matriks laplacian adalah $\sum_{i=1}^k n_i$ dengan banyaknya kolom dan banyaknya baris adalah $\sum_{i=1}^k n_i$.

Misal $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Berdasarkan Akibat 2.6.2., akan dicari nilai eigen dari matriks laplacian L . Misal $L_1 = L - nI$, dengan I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$ diperoleh

$$L_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -n_1 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -n_1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \hline -1 & \cdots & -1 & -n_2 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -n_2 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -n_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & -n_k \end{array} \right)$$

Berdasarkan Teorema 2.3.5.4., jelas n adalah nilai eigen dari matriks L . Kemudian akan dicari multiplisitas dari nilai eigen n . Multiplisitas dari n adalah dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen n . Sebab ruang eigen merupakan solusi tak trivial dari $(L - nI)x = 0$ maka diperoleh dimensi dari ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen n adalah $\geq k - 1$. Dimensi ruang eigen disebut juga dimensi ruang nul atau kernel dari $L - nI$ sehingga $\dim(\text{Ker } L_1) = \dim(\text{Ker } L - nI) \geq k - 1$. Maka multiplisitas dari n adalah $\geq k - 1$.

Kemudian akan dicari sisa nilai eigen dari matriks laplacian L. Misal

$L_2 = L - (n - n_1)I$, maka

$$L_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \hline -1 & \cdots & -1 & n - n_2 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & n - n_2 & \cdots & -1 & \cdots & -1 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & n - n_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & -1 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & n - n_k \end{array} \right)$$

Diperoleh nilai eigen dari L adalah $(n - n_1)$ dan menggunakan cara yang sama diperoleh $\dim(Ker L_2) \geq n_1 - 1$ sehingga multiplisitas dari $(n - n_1)$ adalah $\geq n_1 - 1$. Menggunakan langkah yang sama pada $V_{n_2} \dots V_{n_k}$, akan didapatkan bahwa $n - n_i$ juga merupakan nilai eigen dari L dengan multiplisitas $\geq n_i - 1$. Nilai eigen terakhir dari L adalah 0 dengan multiplisitas 1 karena matriks L merupakan matriks semidefinit positif. Setelah diketahui semua nilai eigen dari L yaitu $n, n - n_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) dan 0 dengan masing-masing multiplisitas $k - 1, n_i - 1$ dan 1, maka menggunakan Akibat 2.6.1 bahwa $\tau(G) = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$ diperoleh

$$\begin{aligned} \tau(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) &= \frac{1}{n} n^{k-1} (n - n_1)^{n_1-1} \dots (n - n_k)^{n_k-1} \\ &= \frac{n^{k-1}}{n} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i-1} \\ &= n^{k-2} \prod_{i=1}^k (n - n_i)^{n_i-1}. \end{aligned}$$

3.2 Penerapan Teorema Pohon Matriks pada Graf Multipartit Lengkap

$$(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$$

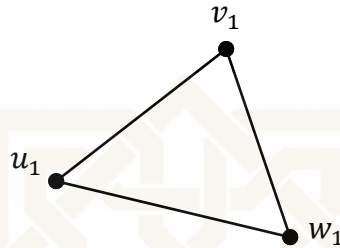
Setelah membuktikan teorema pohon matriks akan diterapkan teorema tersebut pada graf multipartit lengkap $(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$. Adapun langkah-langkah untuk menentukan banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ dengan $n_i \leq 3, i = 1, 2, 3$ dan $n_i \in \mathbb{N}$ menurut Teorema 2.5.6 yaitu

1. Gambarlah graf multipartit lengkap.
2. Tentukan matriks ketetanggaan dari graf multipartit lengkap yang telah digambar.
3. Tentukan matriks derajat dari graf multipartit lengkap yang telah digambar.
4. Cari matriks laplacian dengan mengurangkan matriks derajat dan matriks ketetanggaan.
5. Cari nilai kofaktor dari matriks laplacian sebab menurut Teorema 2.5.6. nilai kofaktor dari matriks laplacian merupakan banyaknya pohon rentangan pada suatu graf terhubung. Berdasarkan pembuktian Teorema 2.5.6. diperoleh bahwa nilai semua kofaktor dari matriks laplacian sama sehingga untuk perhitungan pada sub bab 3.2.1 akan dihitung nilai kofaktor pada C_{11} .
6. Bandingkan hasil perhitungan pada Teorema 2.5.6. dengan Teorema 3.1.1.

3.2.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,n_3})$

3.2.1.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,1,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 2 Graf Multiparti Lengkap $(K_{1,1,1})$

Berdasarkan Gambar 3.2., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,1,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,1,1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,1,1}) = D(K_{1,1,1}) - A(K_{1,1,1})$.

$$L(K_{1,1,1}) = D(K_{1,1,1}) - A(K_{1,1,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

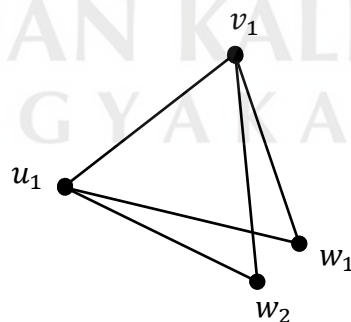
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6., bahwa semua nilai kofaktor sama maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,1})$ adalah 3.

3.2.1.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,1,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 3 Graf multipartit lengkap $(K_{1,1,2})$

Berdasarkan Gambar 3.3., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,1,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,1,2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,1,2}) = D(K_{1,1,2}) - A(K_{1,1,2})$.

$$L(K_{1,1,2}) = D(K_{1,1,2}) - A(K_{1,1,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6., bahwa semua nilai kofaktor sama maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

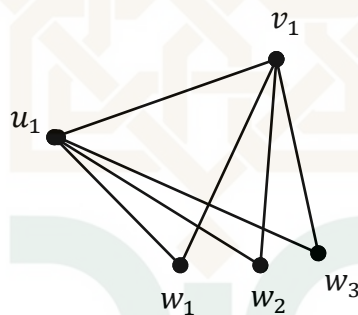
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,2})$ adalah 8.

3.2.1.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,1,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 4 Graf multipartit lengkap $(K_{1,1,3})$

Berdasarkan Gambar 3.4., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,1,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,1,3}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,1,3}) = D(K_{1,1,3}) - A(K_{1,1,3})$.

$$L(K_{1,1,3}) = D(K_{1,1,3}) - A(K_{1,1,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6., bahwa semua nilai kofaktor sama maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 20$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,3})$ adalah 20.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 1 Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,1,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,1,n_3})$	$\tau(G) (K_{1,1,n_3})$
1.	$(K_{1,1,1})$	$3 = 3^{3-2}(3-1)^{1-1}(3-1)^{1-1}(3-1)^{1-1}$
2.	$(K_{1,1,2})$	$8 = 4^{3-2}(4-1)^{1-1}(4-1)^{1-1}(4-2)^{2-1}$
3.	$(K_{1,1,3})$	$20 = 5^{3-2}(5-1)^{1-1}(5-1)^{1-1}(5-3)^{3-1}$

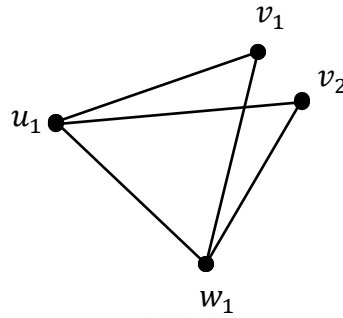
Berdasarkan Tabel 3.1., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,1,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{1,1,n_3}) = n^{k-2}(n-1)^{1-1}(n-1)^{1-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,n_3})$

3.2.2.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,2,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 5 Graf Multipartit Lengkap ($K_{1,2,1}$)

Berdasarkan Gambar 3.5., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,2,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,2,1}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,2,1}) = D(K_{1,2,1}) - A(K_{1,2,1})$.

$$L(K_{1,2,1}) = D(K_{1,2,1}) - A(K_{1,2,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

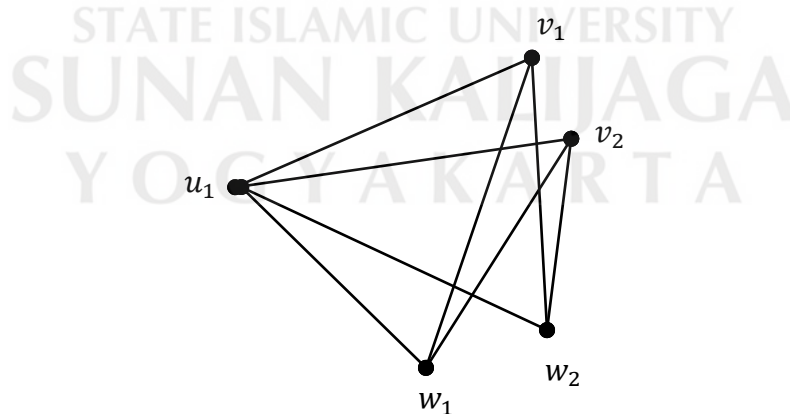
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6., bahwa semua nilai kofaktor sama maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 8 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,1})$ adalah 8.

3.2.2.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,2,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 6 Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,2,2})$

Berdasarkan Gambar 3.6., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,2,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,2,2}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,2,2}) = D(K_{1,2,2}) - A(K_{1,2,2})$.

$$\begin{aligned} L(K_{1,2,2}) &= D(K_{1,2,2}) - A(K_{1,2,2}) \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

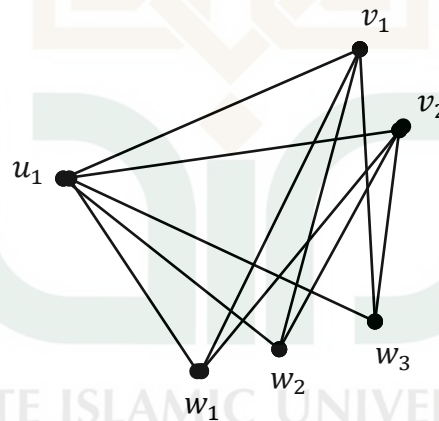
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\
 &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
 &= 45
 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,2})$ adalah 45.

3.2.2.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,2,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 7 Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,2,3})$

Berdasarkan Gambar 3.7., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,2,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,2,3}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,2,3}) = D(K_{1,2,3}) - A(K_{1,2,3})$.

$$\begin{aligned} L(K_{1,2,3}) &= D(K_{1,2,3}) - A(K_{1,2,3}) \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 216$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,3})$ adalah 216.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 2 Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,2,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,2,n_3})$	$\tau(G) (K_{1,2,n_3})$
1.	$(K_{1,2,1})$	$8 = 4^{3-2}(4-1)^{1-1}(4-2)^{2-1}(4-1)^{1-1}$
2.	$(K_{1,2,2})$	$45 = 5^{3-2}(5-1)^{1-1}(5-2)^{2-1}(5-2)^{2-1}$
3.	$(K_{1,2,3})$	$216 = 6^{3-2}(6-1)^{1-1}(6-2)^{2-1}(6-3)^{3-1}$

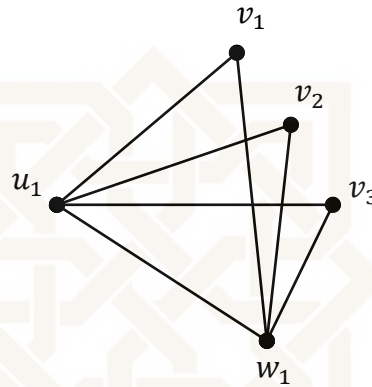
Berdasarkan Tabel 3.2., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,2,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{1,2,n_3}) = n^{k-2}(n-1)^{1-1}(n-2)^{2-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,n_3})$

3.2.3.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,3,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 8 Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,3,1})$

Berdasarkan Gambar 3.8., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,3,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,3,1}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,3,1}) = D(K_{1,3,1}) - A(K_{1,3,1})$.

$$L(K_{1,3,1}) = D(K_{1,3,1}) - A(K_{1,3,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

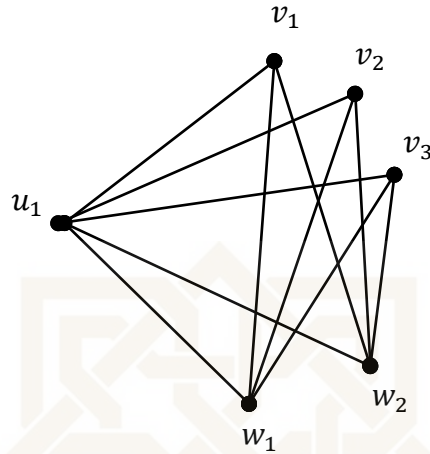
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 20$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,1})$ adalah 20.

3.2.3.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,3,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 9 Graf Multipartit Lengkap ($K_{1,3,2}$)

Berdasarkan Gambar 3.9., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,3,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,3,2}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,3,2}) = D(K_{1,3,2}) - A(K_{1,3,2})$.

$$L(K_{1,3,2}) = D(K_{1,3,2}) - A(K_{1,3,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

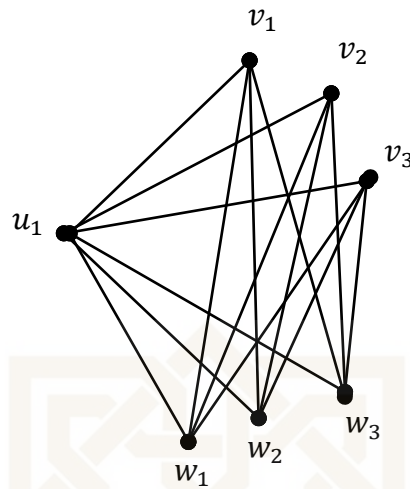
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 216$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,2})$ adalah 216.

3.2.3.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{1,3,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 10 Graf Mulipartit Lengkap ($K_{1,3,3}$)

Berdasarkan Gambar 3.10., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{1,3,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{1,3,3}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{1,3,3}) = D(K_{1,3,3}) - A(K_{1,3,3})$.

$$L(K_{1,3,3}) = D(K_{1,3,3}) - A(K_{1,3,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1792$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,3})$ adalah 1792.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,n_3})$

dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 3 Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,3,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{1,3,n_3})$	$\tau(G) (K_{1,3,n_3})$
1.	$(K_{1,3,1})$	$20 = 5^{3-2}(5-1)^{1-1}(5-3)^{3-1}(5-1)^{1-1}$
2.	$(K_{1,3,2})$	$216 = 6^{3-2}(6-1)^{1-1}(6-3)^{3-1}(6-2)^{2-1}$
3.	$(K_{1,3,3})$	$1792 = 7^{3-2}(7-1)^{1-1}(7-3)^{3-1}(7-3)^{3-1}$

Berdasarkan Tabel 3.3., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon

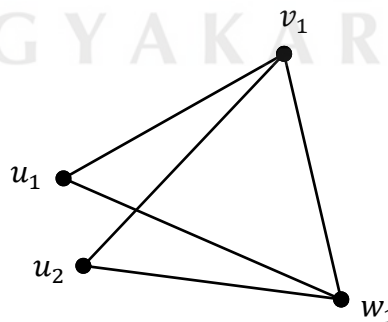
rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{1,3,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{1,3,n_3}) = n^{k-2}(n-1)^{1-1}(n-3)^{3-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.4 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,n_3})$

3.2.4.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,1,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 11 Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,1,1})$

Berdasarkan Gambar 3.11., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,1,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,1,1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,1,1}) = D(K_{2,1,1}) - A(K_{2,1,1})$.

$$\begin{aligned} L(K_{2,1,1}) &= D(K_{2,1,1}) - A(K_{2,1,1}) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

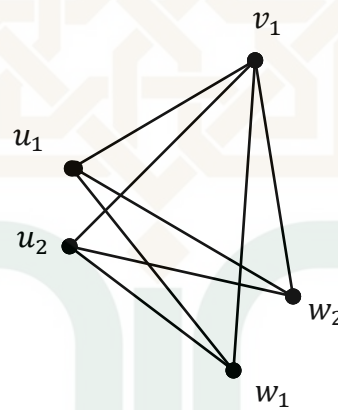
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,1})$ adalah 8.

3.2.4.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,1,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 12 Graf multipartit lengkap $(K_{2,1,2})$

Berdasarkan Gambar 3.12., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,1,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,1,2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,1,2}) = D(K_{2,1,2}) - A(K_{2,1,2})$.

$$\begin{aligned} L(K_{2,1,2}) &= D(K_{2,1,2}) - A(K_{2,1,2}) \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

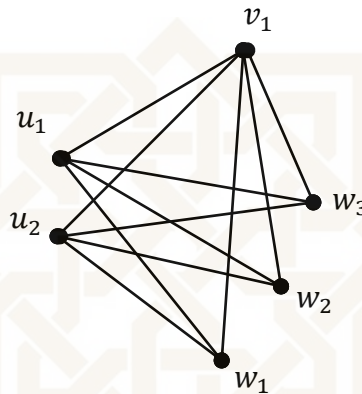
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 45 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,2})$ adalah 45.

3.2.4.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,1,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 13 Graf multipartit lengkap $(K_{2,1,3})$

Berdasarkan Gambar 3.13., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,1,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,1,3}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,1,3}) = D(K_{2,1,3}) - A(K_{2,1,3})$.

$$L(K_{2,1,3}) = D(K_{2,1,3}) - A(K_{2,1,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 216 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,3})$ adalah 216.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,n_3})$

dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 4 Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,1,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,1,n_3})$	$\tau(G) (K_{2,1,n_3})$
1.	$(K_{2,1,1})$	$8 = 4^{3-2}(4-2)^{2-1}(4-1)^{1-1}(4-1)^{1-1}$
2.	$(K_{2,1,2})$	$45 = 5^{3-2}(5-2)^{2-1}(5-1)^{1-1}(5-2)^{2-1}$
3.	$(K_{2,1,3})$	$216 = 6^{3-2}(6-2)^{2-1}(6-1)^{1-1}(6-3)^{3-1}$

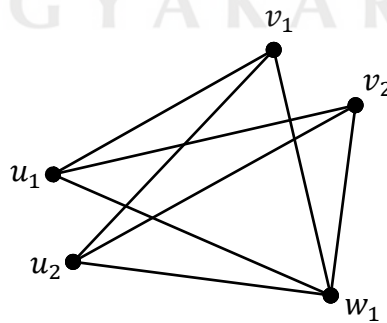
Berdasarkan Tabel 3.4., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,1,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{2,1,n_3}) = n^{k-2}(n-2)^{2-1}(n-1)^{1-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.5 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,n_3})$

3.2.5.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,2,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 14 Graf multipartit lengkap $(K_{2,2,1})$

Berdasarkan Gambar 3.14., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,2,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,2,1}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,2,1}) = D(K_{2,2,1}) - A(K_{2,2,1})$.

$$L(K_{2,2,1}) = D(K_{2,2,1}) - A(K_{2,2,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

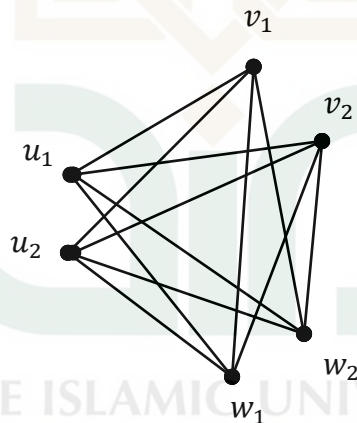
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\
 &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 45
 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,1})$ adalah 45.

3.2.5.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,2,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 15 Graf multipartit lengkap $(K_{2,2,2})$

Berdasarkan Gambar 3.15., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,2,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,2,2}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,2,2}) = D(K_{2,2,2}) - A(K_{2,2,2})$.

$$L(K_{2,2,2}) = D(K_{2,2,2}) - A(K_{2,2,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

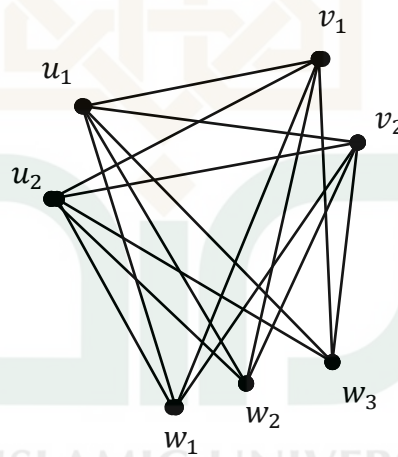
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 384$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,2})$ adalah 384.

3.2.5.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,2,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 16 Graf multipartit lengkap $(K_{2,2,3})$

Berdasarkan Gambar 3.16., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,2,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,2,3}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,2,3}) = D(K_{2,2,3}) - A(K_{2,2,3})$.

$$L(K_{2,2,3}) = D(K_{2,2,3}) - A(K_{2,2,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2800$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,3})$ adalah 2800.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 5 Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,2,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,2,n_3})$	$\tau(G) (K_{2,2,n_3})$
1.	$(K_{2,2,1})$	$45 = 5^{3-2}(5-2)^{2-1}(5-2)^{2-1}(5-1)^{1-1}$
2.	$(K_{2,2,2})$	$384 = 6^{3-2}(6-2)^{2-1}(6-2)^{2-1}(6-2)^{2-1}$
3.	$(K_{2,2,3})$	$2800 = 7^{3-2}(7-2)^{2-1}(7-2)^{2-1}(7-3)^{3-1}$

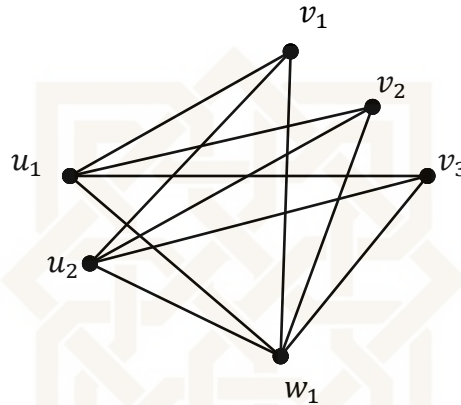
Berdasarkan Tabel 3.4., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,2,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{2,2,n_3}) = n^{k-2}(n-2)^{2-1}(n-2)^{2-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.6 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,n_3})$

3.2.6.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,3,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 17 Graf multipartit lengkap $(K_{2,3,1})$

Berdasarkan Gambar 3.17., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,3,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,3,1}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,3,1}) = D(K_{2,3,1}) - A(K_{2,3,1})$.

$$L(K_{2,3,1}) = D(K_{2,3,1}) - A(K_{2,3,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

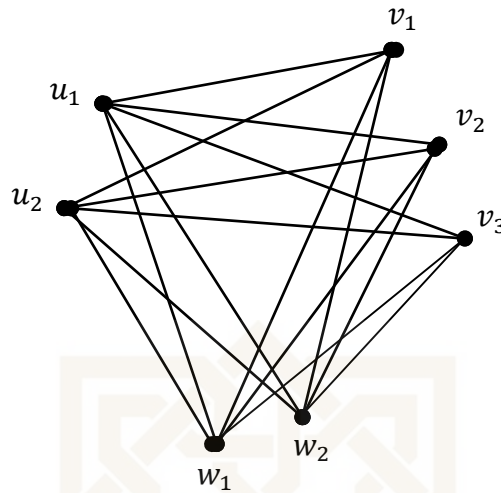
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 216 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,1})$ adalah 216.

3.2.6.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,3,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 18 Graf multipartit lengkap ($K_{2,3,2}$)

Berdasarkan Gambar 3.18., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,3,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,3,2}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,3,2}) = D(K_{2,3,2}) - A(K_{2,3,2})$.

$$L(K_{2,3,2}) = D(K_{2,3,2}) - A(K_{2,3,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

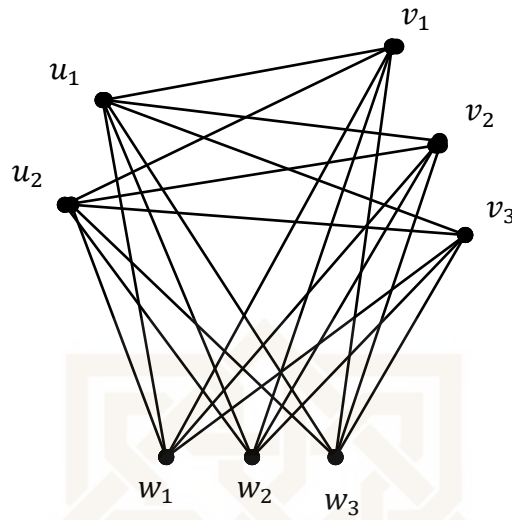
Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2800 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,2})$ adalah 2800.

3.2.6.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{2,3,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 19 Graf multipartit lengkap ($K_{2,3,3}$)

Berdasarkan Gambar 3.19., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{2,3,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{2,3,3}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{2,3,3}) = D(K_{2,3,3}) - A(K_{2,3,3})$

$$L(K_{2,3,3}) = D(K_{2,3,3}) - A(K_{2,3,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 30000$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,3})$ adalah 30000.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 6 Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,3,n_3})$		
No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{2,3,n_3})$	$\tau(G) (K_{2,3,n_3})$
1.	$(K_{2,3,1})$	$216 = 6^{3-2}(6-2)^{2-1}(6-3)^{3-1}(6-1)^{1-1}$
2.	$(K_{2,3,2})$	$2800 = 7^{3-2}(7-2)^{2-1}(7-3)^{3-1}(7-2)^{2-1}$

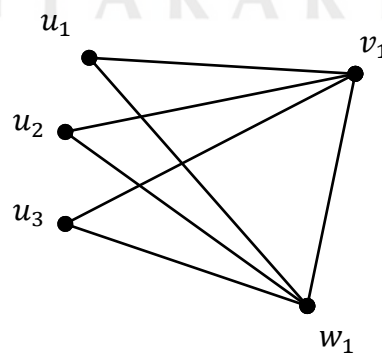
Berdasarkan Tabel 3.6., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{2,3,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{2,3,n_3}) = n^{k-2}(n-2)^{2-1}(n-3)^{3-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.7 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,n_3})$

3.2.7.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,1,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 20 Graf multipartit lengkap $(K_{3,1,1})$

Berdasarkan Gambar 3.20., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,1,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,1,1}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,1,1}) = D(K_{3,1,1}) - A(K_{3,1,1})$.

$$\begin{aligned} L(K_{3,1,1}) &= D(K_{3,1,1}) - A(K_{3,1,1}) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

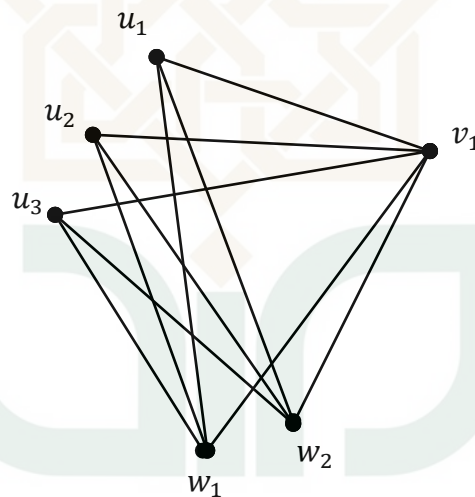
$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 20
\end{aligned}$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,1})$ adalah 20.

3.2.7.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,2})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,1,2})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 21 Graf multipartit lengkap $(K_{3,1,2})$

Berdasarkan Gambar 3.21., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,1,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,1,2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,1,2}) = D(K_{3,1,2}) - A(K_{3,1,2})$.

$$L(K_{3,1,2}) = D(K_{3,1,2}) - A(K_{3,1,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

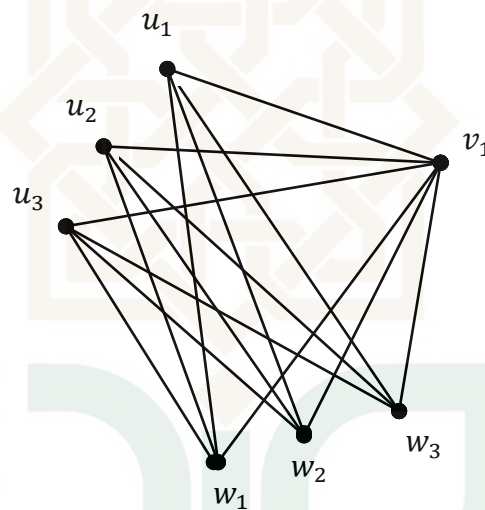
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 216$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,2})$ adalah 216.

3.2.7.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,1,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 22 Graf multipartit lengkap $(K_{3,1,3})$

Berdasarkan Gambar 3.22., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,1,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,1,3}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,1,3}) = D(K_{3,1,3}) - A(K_{3,1,3})$.

$$L(K_{3,1,3}) = D(K_{3,1,3}) - A(K_{3,1,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1791$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,3})$ adalah 1792.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 7 Graf Multipartit Lengkap $(K_{3,1,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{3,1,n_3})$	$\tau(G) (K_{3,1,n_3})$
1.	$(K_{3,1,1})$	$20 = 5^{3-2}(5-3)^{3-1}(5-1)^{1-1}(5-1)^{1-1}$
2.	$(K_{3,1,2})$	$216 = 6^{3-2}(6-3)^{3-1}(6-1)^{1-1}(6-2)^{2-1}$
3.	$(K_{3,1,3})$	$1792 = 7^{3-2}(7-3)^{3-1}(7-1)^{1-1}(7-3)^{3-1}$

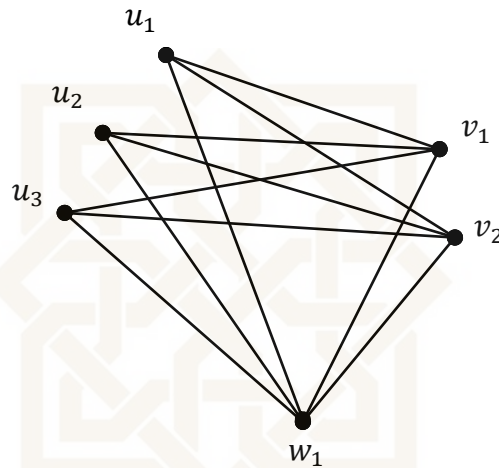
Berdasarkan Tabel 3.7., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,1,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{3,1,n_3}) = n^{k-2}(n-3)^{3-1}(n-1)^{1-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.8 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,n_3})$

3.2.8.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,2,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 23 Graf multipartit lengkap $(K_{3,2,1})$

Berdasarkan Gambar 3.23., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,2,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,2,1}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,2,1}) = D(K_{3,2,1}) - A(K_{3,2,1})$.

$$L(K_{3,2,1}) = D(K_{3,2,1}) - A(K_{3,2,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

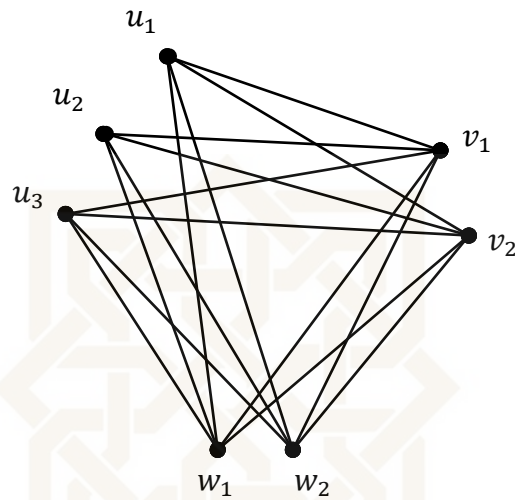
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 216$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,1})$ adalah 216.

3.2.8.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap ($K_{3,2,2}$)

Graf multipartit lengkap ($K_{3,2,2}$) dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 24 Graf multipartit lengkap ($K_{3,2,2}$)

Berdasarkan Gambar 3.24., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,2,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,2,2}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks adjacency dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks adjacency $L(K_{3,2,2}) = D(K_{3,2,2}) - A(K_{3,2,2})$.

$$L(K_{3,2,2}) = D(K_{3,2,2}) - A(K_{3,2,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

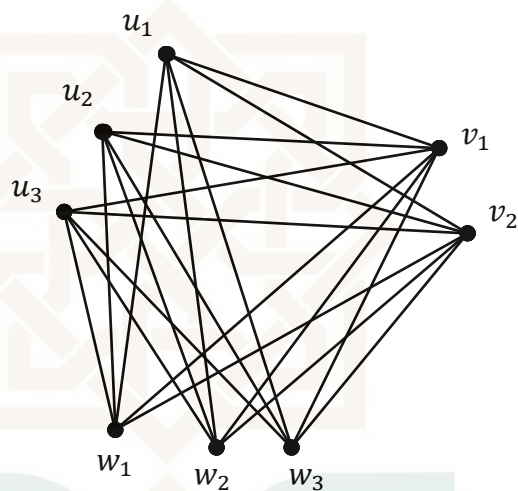
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2800$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,2})$ adalah 2800.

3.2.8.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,2,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 25 Graf multipartit lengkap $(K_{3,2,3})$

Berdasarkan Gambar 3.25., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,2,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,2,3}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,2,3}) = D(K_{3,2,3}) - A(K_{3,2,3})$.

$$L(K_{3,2,3}) = D(K_{3,2,3}) - A(K_{3,2,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 30000$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,3})$ adalah 30000.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 8 Graf Multipartit Lengkap $(K_{3,2,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{3,2,n_3})$	$\tau(G) (K_{3,2,n_3})$
1.	$(K_{3,2,1})$	$216 = 6^{3-2}(6-3)^{3-1}(6-2)^{2-1}(6-1)^{1-1}$
2.	$(K_{3,2,2})$	$2800 = 7^{3-2}(7-3)^{3-1}(7-2)^{2-1}(7-2)^{2-1}$
3.	$(K_{3,2,3})$	$30000 = 8^{3-2}(8-3)^{3-1}(8-2)^{2-1}(8-3)^{3-1}$

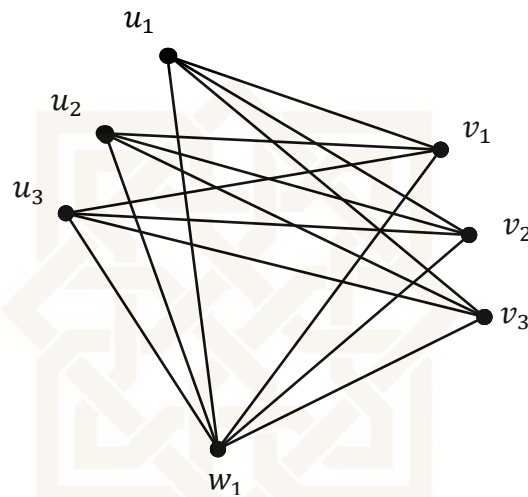
Berdasarkan Tabel 3.8., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,2,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{3,2,n_3}) = n^{k-2}(n-3)^{2-1}(n-2)^{2-1}(n-n_3)^{n_3-1}$$

3.2.9 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,n_3})$

3.2.9.1 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,1})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,3,1})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 26 Graf multipartit lengkap $(K_{3,3,1})$

Berdasarkan Gambar 3.26., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,3,1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,3,1}) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,3,1}) = D(K_{3,3,1}) - A(K_{3,3,1})$.

$$L(K_{3,3,1}) = D(K_{3,3,1}) - A(K_{3,3,1})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

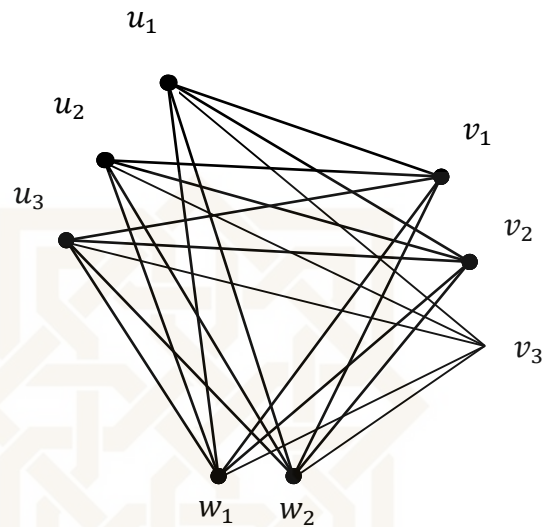
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1792$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,1})$ adalah 1792.

3.2.9.2 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap ($K_{3,3,2}$)

Graf multipartit lengkap ($K_{3,3,2}$) dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 27 Graf multipartit lengkap ($K_{3,3,2}$)

Berdasarkan Gambar 3.27., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,3,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,3,2}) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetangaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetangaan $L(K_{3,3,2}) = D(K_{3,3,2}) - A(K_{3,3,2})$.

$$L(K_{3,3,2}) = D(K_{3,3,2}) - A(K_{3,3,2})$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

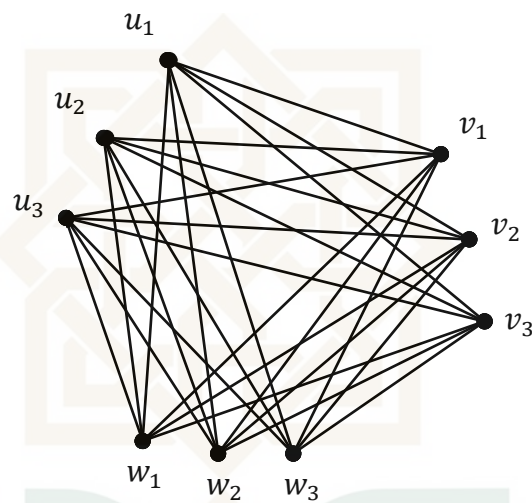
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 30000$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,2})$ adalah 30000.

3.2.9.3 Banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,3})$

Graf multipartit lengkap $(K_{3,3,3})$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3. 28 Graf multipartit lengkap $(K_{3,3,3})$

Berdasarkan Gambar 3.28., diperoleh matriks ketetanggaan sebagai berikut

$$A(K_{3,3,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan matriks derajat sebagai berikut

$$D(K_{3,3,3}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks ketetanggaan dan matriks derajat, akan dihitung matriks laplacian yang diperoleh dari selisih antara matriks derajat dengan matriks ketetanggaan $L(K_{3,3,3}) = D(K_{3,3,3}) - A(K_{3,3,3})$.

$$L(K_{3,3,3}) = D(K_{3,3,3}) - A(K_{3,3,3})$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai kofaktor dari matriks laplacian di atas. Sebab menurut Teorema 2.5.6. semua nilai kofaktor sama, maka dipilih $i = 1$ dan $j = 1$ sehingga diperoleh

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11}$$

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 6 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 419904$$

Jadi banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,3})$ adalah 419904.

Setelah mencari banyaknya pohon rentangan menggunakan Teorema 2.5.6., akan dicari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,n_3})$ dengan $n_3 \leq 3, n_3 \in \mathbb{N}$ menggunakan Teorema 3.1.1., disajikan pada tabel sebagai berikut

Tabel 3. 9 Graf Multipartit Lengkap $(K_{3,3,n_3})$

No.	Graf Multipartit Lengkap $(K_{3,3,n_3})$	$\tau(G) (K_{3,3,n_3})$
1.	$(K_{3,3,1})$	$1792 = 7^{3-2}(7-3)^{3-1}(7-3)^{3-1}(7-1)^{1-1}$
2.	$(K_{3,3,2})$	$30000 = 8^{3-2}(8-3)^{3-1}(8-3)^{3-1}(8-2)^{2-1}$
3.	$(K_{3,3,3})$	$419904 = 9^{3-2}(9-3)^{3-1}(9-3)^{3-1}(9-3)^{3-1}$

Berdasarkan Tabel 3.9., terlihat bahwa pola dari banyaknya pohon rentangan pada graf multipartit lengkap $(K_{3,3,n_3})$ adalah

$$\tau(K_{3,3,n_3}) = n^{k-2}(n-3)^{3-1}(n-3)^{3-1}(n-n_3)^{n_3-1}.$$

