

**SKRIPSI**

**PELABELAN *E-SUPER VERTEX MAGIC* PADA GRAF SAPU,  
GRAF LABA-LABA DAN GRAF MATAHARI LUKA**



**WAYAN SYAFI'I**

**13610042**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UIN SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2018**

**PELABELAN *E-SUPER VERTEX MAGIC* PADA GRAF SAPU,  
GRAF LABA-LABA DAN GRAF MATAHARI LUKA**

**SKRIPSI**

Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



**WAYAN SYAFI'I**

**13610042**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UIN SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2018**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas Akhir

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Wayan Syafi'i

NIM : 13610042

Judul Skripsi : Pelabelan *E-super Vertex Magic* pada Graf Sapu, Graf Laba-laba dan Graf Matahari Luka

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 4 April 2018

Pembimbing

M. Abrori, S.Si., M.Kom.

NIP. 19720423 199903 1 003



## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-2007/Un.02/DST/PP.00.9/05/2018

Tugas Akhir dengan judul : Pelabelan E-super Vertex Magic pada Graf Sapu, Graf Laba-Laba dan Graf Matahari Luka

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : WAYAN SYAFI  
Nomor Induk Mahasiswa : 13610042  
Telah diujikan pada : Selasa, 17 April 2018  
Nilai ujian Tugas Akhir : A-

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom  
NIP. 19720423 199903 1 003

Penguji I

Malahayati, S.Si., M.Sc  
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.  
NIP. 19840113 201503 1 001

Yogyakarta, 17 April 2018

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

DEKAN



Dr. Murtono, M.Si.

NIP. 19691212 200003 1 001

## HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Wayan Syafi'i

NIM : 13610042

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 4 April 2018

Yang Menyatakan



Wayan Syafi'i



*Dengan penuh syukur karya sederhana ini saya persembahkan untuk*

*Bapak, Ibu, Kakak dan Adik tersayang*

*Keluarga besar Matematika angka 2013*

*Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi*

*UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta*





*“Maka nikmat Tuhanmu manakah yang kau dustakan”. (QS. 55: 13)*

*“Kita punya seribu alasan untuk menyudahi, tetapi ingatlah kita masih punya  
sejuta alasan untuk melanjutkan”. (Fiersa Besari)*

## KATA PENGANTAR

Puji syukur alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penyusunan skripsi yang berjudul “*Pelabelan E-super Vertex Magic pada Graf Sapu, Graf Laba-laba dan Graf Matahari Luka*” dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang menjadi rahmat bagi seluruh alam.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini tidak lepas dari dukungan, bimbingan dan kerjasama dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis menyampaikan ucapan terimakasih kepada:

1. Dr. Murtono, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Muh. Wakhid Musthofa, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
3. M. Farhan Qudratullah, M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik.
4. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku pembimbing yang telah sabar, tulus dan ikhlas meluangkan waktu, tenaga dan pikiran memberikan bimbingan, motivasi, arahan serta saran yang sangat berharga kepada penulis selama menyusun skripsi.
5. Segenap Dosen dan Staff Program Studi Matematika.
6. Kedua orang tua, Kakak serta adikku yang tidak henti memberikan dukungan, doa, dan kasih sayang kepada penulis.



7. Sahabat-sahabatku tersayang Dodo, Iim, Sinta yang memberikan dukungan, masukan, semangat, dan menjadi sahabat yang sangat berarti bagi penulis.
8. Teman-temanku Aal, Aufar, Dita, Dwiki, Linda, Lisda, Hilal, Ryan terimakasih tumpangan, dukungan, semangat serta saran-sarannya.
9. Teman-teman Matematika 2013, sahabat-sahabati Frekuensi, teman-teman KKN angkatan 93 Gedali, yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, yang menemani penulis selama menempuh pendidikan di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
10. Segenap pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Semoga Allah SWT memberikan balasan kepada mereka sebaik-baiknya balasan. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan saran dan kritik ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, 2 April 2018

Penulis

Wayan Syafi'i

NIM. 13610042

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR .....</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN .....</b>	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN .....</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN .....</b>	<b>v</b>
<b>HALAMAN MOTTO .....</b>	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR GAMBAR .....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR LAMBANG .....</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>xiv</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1.Latar Belakang Masalah .....	1
1.2.Rumusan Masalah .....	4
1.3.Batasan Masalah .....	4
1.4.Tujuan Penelitian .....	5
1.5. Manfaat Penelitian .....	5
1.6. Tinjauan Pustaka .....	6
1.7. Sistematika Penulisan .....	7
1.8. Metode Penelitian .....	8
<b>BAB II DASAR TEORI .....</b>	<b>10</b>
2.1. Graf .....	10
2.1.1. Definisi Graf .....	10

2.1.2. Terminologi Graf .....	11
2.1.3. Konsep Keterhubungan di dalam Graf .....	15
2.1.4. Jenis-jenis Graf .....	18
2.1.5. Pohon .....	27
2.2. Pemetaan .....	29
2.3. Pelabelan Graf .....	33
<b>BAB III PEMBAHASAN .....</b>	<b>37</b>
3.1. Teorema-teorema Pelabelan E-super Vertex Magic .....	37
3.2. Pelabelan E-super Vertex Magic pada Graf Sapu.....	49
3.3. Pelabelan E-super Vertex Magic pada Graf Laba-laba .....	52
3.4. Pelabelan E-super Vertex Magic pada Graf Matahari Luka .....	58
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>67</b>
4.1. Kesimpulan .....	67
4.2. Saran .....	68
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>69</b>

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. Diagram alir penelitian .....	9
Gambar 2.1. Graf $G_1$ .....	11
Gambar 2.2. Graf yang menunjukkan hubungan antara titik dan sisi .....	12
Gambar 2.3. Graf trivial dan tak trivial .....	13
Gambar 2.4. Graf yang mengandung <i>multiple</i> dan <i>loop</i> .....	14
Gambar 2.5. Derajat titik .....	15
Gambar 2.6. Graf $G_7$ .....	16
Gambar 2.7. Graf terhubung dan graf tidak terhubung .....	18
Gambar 2.8. Graf sederhana ( <i>Simple Graph</i> ) .....	19
Gambar 2.9. Graf tak sederhana ( <i>Unsimple Graph</i> ) .....	19
Gambar 2.10. Graf berhingga .....	20
Gambar 2.11. Graf tak berhingga .....	21
Gambar 2.12. Graf berarah ( <i>Directed graph / Digraph</i> ) .....	22
Gambar 2.13. Graf tak berarah ( <i>Undirected graph / Undigraph</i> ) .....	22
Gambar 2.14. Graf Lengkap .....	23
Gambar 2.15. Graf <i>Path</i> .....	24
Gambar 2.16. Graf <i>Cycle</i> .....	24
Gambar 2.17. Graf Matahari .....	25
Gambar 2.18. Graf Bipartite .....	26
Gambar 2.19. Graf Bipartite Lengkap .....	26
Gambar 2.20. Pohon .....	27
Gambar 2.21. Pemetaan dan bukan pemetaan .....	30
Gambar 2.22. Pemetaan injektif .....	31
Gambar 2.23. Pemetaan surjektif .....	32

Gambar 2.24. Pemetaan bijektif .....	33
Gambar 2.25. Pelabelan titik, sisi dan total .....	34
Gambar 2.26. Pelabelan <i>vertex magic total</i> .....	35
Gambar 3.1. Graf yang <i>E-super vertex magic</i> .....	38
Gambar 3.2. Graf tak trivial .....	43
Gambar 3.3. Graf <i>Path</i> $P_{11}$ .....	46
Gambar 3.4. Graf sapu $B_{5,3}$ .....	49
Gambar 3.5. <i>E-super vertex magic</i> pada graf sapu $B_{5,3}$ .....	51
Gambar 3.6. Graf $K_{(1,1)}$ , $K_{(1,2)}$ , $K_{(1,3)}$ .....	52
Gambar 3.7. Graf $S^1$ , $S^2$ , $S^3$ .....	53
Gambar 3.8. Graf $K_{(1,2)}$ dan $K_{(1,4)}$ .....	55
Gambar 3.8. Graf laba-laba $S^5$ .....	57
Gambar 3.10. Pelabelan <i>E-super vertex magic</i> pada graf laba-laba .....	58
Gambar 3.11. Graf Matahari luka $C_{11}^+ - 3e$ .....	59
Gambar 3.12. Pelabelan <i>E-super vertex magic</i> graf matahari luka $C_{11}^+ - 3e$ .	64
Gambar 3.13. Flowchart algoritma pelabelan <i>E-super vertex magic</i> pada graf matahari luka $C_n^+ - 3e$ .....	66

## DAFTAR LAMBANG

$U$	: Gabungan
$u$	: Titik dalam graf
$v$	: Titik dalam graf
$e$	: Sisi dalam graf
$G$	: Graf
$E(G)$	: Himpunan sisi
$V(G)$	: Himpunan titik
$f(E(G))$	: Pelabelan sisi pada graf $G$
$f(V(G))$	: Pelabelan titik pada graf $G$
$k$	: Konstanta ajaib
$N(u)$	: Berdekatan / tetangga dengan $u$
$\geq$	: Lebih besar sama dengan
$\leq$	: Lebih kecil sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$T_n$	: Pohon dengan $n$ titik
$\epsilon$	: Anggota himpunan
$\Sigma$	: Jumlah
$B_{n,d}$	: Graf sapu dengan titik sebanyak $n$ dan <i>Path</i> sepanjang $d$
$S^n$	: Graf Laba-laba dengan kaki sebanyak $n$ .
$C_n^+$	: Graf matahari dengan titik sebanyak $2n$
$C_n^+ - me$	: Graf matahari luka dengan titik sebanyak $2n-m$ titik
■	: Akhir pembuktian



# PELABELAN *E-SUPER VERTEX MAGIC* PADA GRAF SAPU, GRAF LABA-LABA DAN GRAF MATAHARI LUKA

Oleh: Wayan Syafi'i

13610042

## ABSTRAK

Pelabelan *E-super vertex magic* merupakan salah satu pokok bahasan dalam teori graf. Pelabelan *E-super vertex magic* adalah pemetaan bijektif dari elemen sebuah graf berupa titik dan sisi ke dalam bilangan bulat yang disebut label, dengan ketentuan terdapat konstanta ajaib  $k = f(u) + \sum_{v \in N(u)} f(uv)$  dan pada label sisinya memenuhi  $f(E(G)) = \{1, 2, \dots, q\}$ . Dimana  $u$  dan  $v$  merupakan titik pada graf dengan ketentuan  $v$  adalah titik yang berdekatan dengan  $u$ .

Graf sapu  $B_{n,d}$  merupakan penggabungan dari ujung sebuah path  $P_d$  dengan  $n - d$  sisi sehingga terbentuk graf baru yang disebut sebagai graf sapu. Graf laba-laba  $S^n$  merupakan graf lebih lanjut dari sebuah graf bintang yang dihapus setiap sisinya, kemudian menambahkan titik diantara titik utama dan titik-titik ujungnya, selanjutnya menambahkan lagi sisi-sisi dari titik utama ke setiap titik baru dan dari titik-titik baru ke titik ujung. Graf Matahari luka merupakan Graf matahari yang dihapus beberapa titik ujungnya dan sisi yang berkaitan langsung dengan titik ujung tersebut.

Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan bahwa pada graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka dapat diberikan pelabelan yang *E-super vertex magic*. Sedangkan metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur.

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh bahwa pelabelan *E-super vertex magic* pada graf sapu  $B_{n,n-2}$  dengan  $n$  adalah ganjil, terdapat konstanta ajaib  $k = 2n - 2 + \frac{n+2}{2}$ . Untuk graf Laba-laba  $S^n$  dengan  $n \leq 4$ , terdapat konstanta ajaib  $k = 5n + 1$ . Sedangkan pada graf Matahari luka  $C_n^+ - 3e$  dengan  $n \geq 3$ , terdapat konstanta ajaib  $k = 5n - 6$ .

Kata kunci : *E-super vertex magic*, Graf sapu, Graf Laba-laba, Graf Matahari Luka.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang digunakan untuk mempermudah menyelesaikan suatu permasalahan. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler untuk memecahkan masalah jembatan Konigsberg pada tahun 1736. Perkembangan teori graf saat ini menjadi sangat pesat, karena teori graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari maupun berbagai bidang ilmu yang lain.

Salah satu kajian dalam teori graf adalah pelabelan graf. Pelabelan graf merupakan sebuah pemetaan injektif dari elemen sebuah graf yaitu himpunan titik (*vertex*) atau himpunan sisi (*edge*) mungkin bahkan keduanya (titik dan sisi) ke dalam bilangan bulat yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963, dilanjutkan dan dikembangkan oleh Stewart di tahun 1966, serta Kotzig dan Rosa pada tahun 1967. Perkembangan pelabelan graf saat ini sangat pesat, dapat dijumpai pada kriptografi, x-ray, radar astronomi, sistem biometrik sidik jari serta desain jaringan komunikasi.

Menurut Wallis (2001), berdasarkan domain pemetaannya pelabelan graf dapat dibedakan menjadi tiga. Pertama jika pelabelan graf domain pemetaannya adalah himpunan titik disebut sebagai pelabelan titik (*vertex labelling*), kedua jika

pelabelan graf domain pemetaannya adalah himpunan sisi disebut sebagai pelabelan sisi (*edge labelling*), ketiga jika domain pelabelan graf adalah keduanya yaitu titik dan sisi maka pelabelan tersebut disebut sebagai pelabelan total (*total labelling*).

Terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang dikenal hingga saat ini, antara lain pelabelan *graceful* (*graceful labelling*), pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan (*irregular total labelling*), pelabelan ajaib (*magic labelling*), serta pelabelan antiajaib (*antimagic labelling*). Pelabelan ajaib (*magic labelling*) bisa dibedakan menjadi beberapa kategori menurut domainnya, antara lain pelabelan titik ajaib total (*vertex magic total labelling*), pelabelan sisi ajaib total (*edge magic total labelling*) dan pelabelan total ajaib (*totally magic labelling*).

Pelabelan *E-super vertex magic* merupakan penelitian lanjutan dari pelabelan *vertex magic total*, kajian terhadap masalah tersebut masih belum terlalu banyak dilakukan pada saat ini. Oleh karena itu, peneliti ingin melakukan kajian terhadap masalah tersebut. Sebelum membahas pelabelan *E-super vertex magic*, terlebih dahulu dijelaskan pelabelan *vertex magic total*. Pelabelan *vertex magic total* adalah pelabelan titik yang terdapat konstanta ajaib  $k$  dan label pada setiap titik serta sisinya memenuhi  $f(V \cup E) = \{1, 2, \dots, p + q\}$ . Konstanta ajaib  $k$  merupakan penjumlahan dari sebarang titik  $u_n$  dengan setiap sisi yang terkait langsung dengan titik tersebut.

Pada tahun 2004, MacDougall dkk memperkenalkan *super vertex magic total labelling*, mereka menganggap bahwa pelabelan *vertex magic total* akan menjadi *super* jika  $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ , akan tetapi pada tahun 2003 ternyata Swaminathan dan Jeyanthi telah lebih dahulu memperkenalkan pelabelan *super*

*vertex magic* dengan notasi yang berbeda. Swaminathan dan Jeyanthi menganggap bahwa pelabelan *vertex magic total* akan menjadi *super* apabila  $f(E(G)) = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ . Untuk menghindari kebingungan tersebut, pada tahun 2012 Marimuthu dan Balakrishnan menamakan sebuah pelabelan total akan menjadi pelabelan yang *E-super vertex magic* jika  $f(E(G)) = \{1, 2, 3, \dots, q\}$ .

Dalam pelabelan suatu graf, tidak semua graf dapat memenuhi teorema pelabelan *E-super vertex magic*, hanya graf tertentu yang dapat dikatakan *E-super vertex magic*. Oleh karena itu peneliti tertarik untuk mengkaji beberapa graf yang mampu memenuhi teorema *E-super vertex magic* antara lain adalah graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka.

Graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka merupakan bentuk perkembangan dari suatu jenis graf. Graf sapu  $B_{n,d}$  merupakan graf yang terbentuk dengan menempelkan ujung dari *path*  $P_d$  dengan suatu ujung dari  $n-d$  sisi sehingga akan terbentuk graf baru. Kemudian graf laba-laba merupakan graf yang dihasilkan dari penghapusan suatu sisi pada graf bintang, menambahkan titik di antara titik ujung dan titik utamanya dan menambahkan lagi satu sisi dari titik ujung ke setiap titik baru dan satu sisi baru dari titik utama ke titik baru. Terakhir graf matahari luka merupakan modifikasi dari graf matahari. Graf matahari yaitu graf *cycle* yang pada setiap titiknya dilampirkan sebuah sisi yang berujung pada titik dengan derajat satu. Selanjutnya graf matahari dihapus beberapa titik ujung dan sisi yang terhubung dengannya.

Penelitian ini akan menjelaskan tentang pelabelan yang *E-super vertex magic*. Pada graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka merupakan pelabelan yang *E-super vertex magic* apabila memenuhi keadaan tertentu. Sumber utama

karya ilmiah ini adalah jurnal yang ditulis oleh G. Marimuthu, B. Suganya, S. Kalaivani dan M. Balakrishnan pada tahun 2015 yang berjudul “*E-super vertex magic labelling of graphs and some open problems*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu.

1. Bagaimana pembuktian teorema pelabelan *E-Super Vertex Magic*?
2. Bagaimana mencari konstanta ajaib pada pelabelan *E-super vertex magic*?
3. Bagaimana pembuktian teorema dari suatu pelabelan *E-super vertex magic* pada graf sapu?
4. Bagaimana pembuktian teorema dari suatu pelabelan *E-super vertex magic* pada graf laba-laba?
5. Bagaimana pembuktian teorema dari suatu pelabelan *E-super vertex magic* pada graf matahari luka?

## 1.3 Batasan masalah

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Definisi dan teorema-teorema pelabelan *E-super vertex magic*.
2. Definisi graf sapu serta pelabelan *E-super vertex magic* pada graf sapu  $B_{n,n-2}$  dengan  $n$  adalah ganjil.

3. Definisi graf laba-laba serta pelabelan *E-super vertex magic* pada graf laba-laba  $S^n$  dimana  $n \leq 4$ .
4. Definisi graf matahari terluka serta pelabelan *E-super vertex magic* pada graf matahari luka  $C_n^+ - 3e$  dimana  $n \geq 3$ .

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Membuktikan teorema-teorema pelabelan *E-Super Vertex Magic*.
2. Membuktikan bahwa graf sapu  $B_{n,n-2}$  dimana  $n$  adalah ganjil dapat diberikan pelabelan *E-Super Vertex Magic*.
3. Membuktikan bahwa graf laba-laba  $S^n$  dimana  $n \leq 4$  dapat diberikan pelabelan *E-Super Vertex Magic* pada.
4. Membuktikan bahwa graf matahari luka  $C_n^+ - 3e$  dimana  $n \geq 3$  dapat diberikan pelabelan *E-super vertex magic*.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan pengetahuan tambahan tentang salah satu kajian dalam teori graf yaitu pelabelan *E-super vertex magic*.
2. Memberikan pengetahuan bahwa pelabelan yang *E-super vertex magic* dapat dilakukan pada graf sapu  $B_{n,n-2}$  dimana  $n$  adalah ganjil, graf



laba-laba  $S^n$  dimana  $n \leq 4$  dan pada graf matahari luka  $C_n^+ - 3e$  dimana  $n \geq 3$ .

## 1.6 Tinjauan Pustaka

Pelabelan *E-super vertex magic* pertama kali diperkenalkan dengan nama *super vertex magic labelling* yaitu pelabelan bijektif dari  $V(G) \cup E(G)$  ke suatu bilangan bulat  $1, 2, \dots, p + q$  dimana terdapat konstanta ajaib  $k$  yaitu jumlah bobot (label) pada sebarang titik  $u_n$  ditambah sisi yang terkait langsung adalah konstan, serta memenuhi  $f(E(G)) = \{1, 2, \dots, q\}$  dan  $f(V(G)) = \{q + 1, q + 2, \dots, q + p\}$ . Konsep *super vertex magic labelling* diperkenalkan dalam jurnal yang ditulis oleh Swaminathan dan Jeyanthi (2003).

Dalam penelitiannya Swaminathan dan Jeyanthi menjelaskan teorema *super vertex magic labelling* pada graf *path*, *cycle*, graf bintang dan juga *disjoint union* sebanyak  $m$  *cycle* dengan sisi sebanyak  $n$ . Kemudian pada tahun 2013 Rahmalia Yuliarni membuat skripsi dengan meneliti jurnal dari Swaminathan dan Jeyanthi. Dalam skripsinya Rahmalia menjelaskan secara rinci jurnal tersebut.

Sebelumnya pada tahun 2004 terdapat penamaan yang sama yaitu *super vertex magic* akan tetapi dengan konsep yang berbeda yaitu pelabelan *vertex magic total* akan menjadi super jika labelnya memenuhi  $f(V(G)) = \{1, 2, \dots, p\}$  oleh MacDougall dkk (2004). Karena alasan perbedaan tersebut, Marimuthu dan Balakrishnan menamakan *super vertex magic labelling* dengan nama *E-super vertex magic labelling* jika pelabelannya memenuhi  $f(E(G)) = \{1, 2, \dots, q\}$  Marimuthu dan Balakrishnan (2012). Pada jurnalnya, Marimuthu dan Balakrishnan menjelaskan teorema *E-super vertex magic* pada graf kipas.

Pada tahun 2015 Marimuthu dkk melakukan penelitian lanjutan teorema *E-super vertex magic labelling*. Berbeda dengan penelitian sebelumnya, dalam penelitian ini mereka membahas *E-super vertex magic labelling* pada graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka. Jurnal karya Marimuthu dkk (2015) merupakan jurnal yang dijadikan acuan utama oleh penulis dalam menulis tugas akhir ini. Dalam tugas akhir ini penulis akan menjelaskan lagi secara rinci mengenai pelabelan *E-super vertex magic* serta memberikan contoh dalam setiap pembahasannya.

### **1.7 Sistematika Penulisan**

Penulisan skripsi ini terdiri dari 4 bab dengan sistematika sebagai berikut

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang latar belakang rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan serta metode penelitian.

#### **BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini berisi tentang dasar-dasar teori yang melandasi penulisan skripsi agar lebih mudah dalam memahami pembahasan yang akan dikaji dalam bab selanjutnya. Dasar teori yang ditulis seperti dasar teori graf, definisi pohon, definisi pemetaan dan jenisnya, definisi pelabelan dan pembuktian teorema pelabelan *vertex total magic*.

#### **BAB III PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang pembuktian teorema *E-super vertex magic labelling*, pelabelan pada graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka.

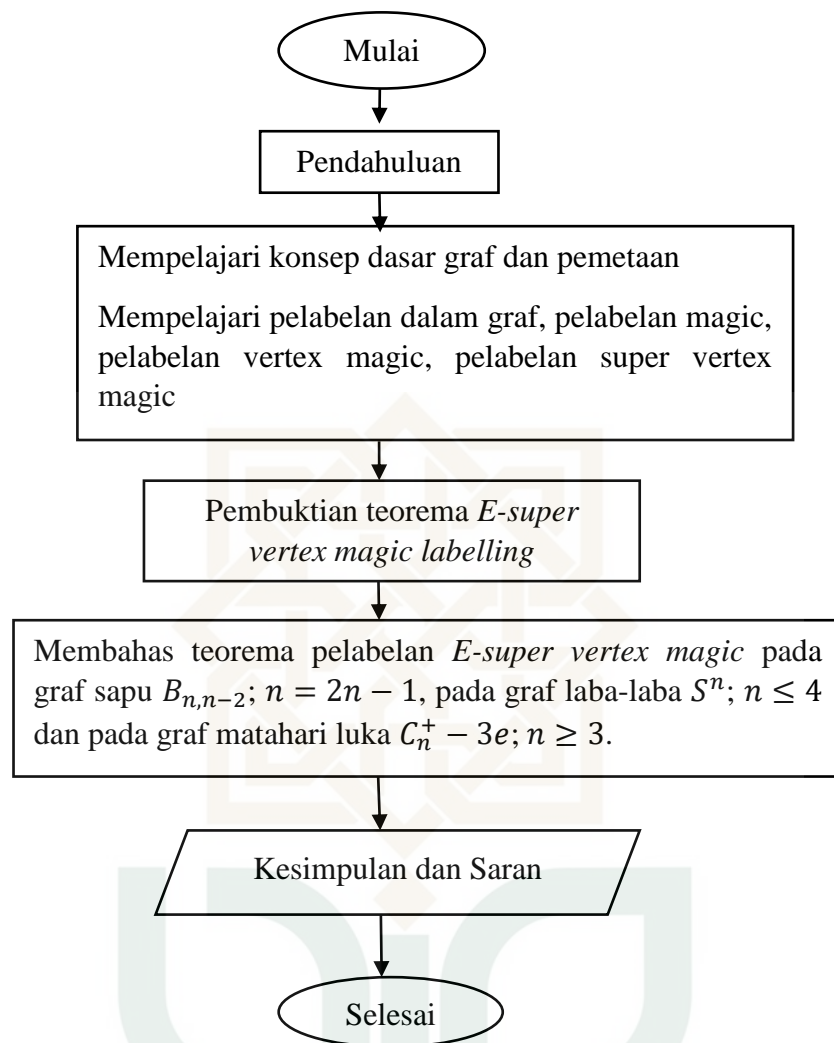
#### BAB IV PENUTUP

Bab penutup ini berisi tentang kesimpulan dan saran yang diambil berdasarkan materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

#### 1.8 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur. Studi literatur adalah penelitian yang dilakukan dengan mengkaji sumber-sumber tertulis seperti jurnal penelitian, buku ilmiah, buku ajar dan lainnya. Penelitian menggunakan metode studi literatur termasuk jenis penelitian kualitatif.

Rujukan utama yang digunakan dalam penelitian ini adalah jurnal yang berjudul "*E-Super Vertex Magic Labelling of Graph and Some Open Problems*" yang ditulis oleh G. Marimuthu, B. Suganya, S. Kalaivani dan M. Balakrishnan (2015). Penelitian ini dimulai dengan mempelajari konsep-konsep dasar teori graf. Selanjutnya dipelajari konsep pelabelan dalam graf, pelabelan magic, pelabelan vertex magic, pelabelan super vertex magic, serta pelabelan *E-super vertex magic*. Objek pada penelitian ini adalah graf sapu, graf laba-laba dan graf matahari luka. Secara singkat dijelaskan alur penelitian dalam diagram alir sebagai berikut.



**Gambar 1.1 Diagram Alir Penelitian**

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Pembuktian teorema pelabelan *E-super vertex magic* adalah dengan cara melihat labelnya. Setiap sisinya harus memuat himpunan bilangan bulat dari 1 hingga  $q$  dan terdapat konstanta ajaib  $k$ , dengan  $k = q + \frac{(p+1)}{2} + \frac{q(q+1)}{p}$ .
2. Konstanta ajaib  $k$  diperoleh dengan cara menjumlahkan sebarang titik  $u_n$  dengan sisi yang terkait langsung terhadap titik  $u_n$ .
3. Pembuktian teorema pelabelan *E-super vertex magic* pada graf sapu  $B_{n,n-2}$  dengan  $n$  ganjil adalah dengan cara melihat labelnya. Pada setiap sisi graf sapu harus memuat himpunan bilangan bulat dari 1 hingga  $q$  dan terdapat konstanta ajaib  $k = 2n - 2 + \frac{n+2}{2}$ .
4. Pembuktian teorema pelabelan *E-super vertex magic* pada graf labalaba  $S^n$  dengan  $n$  kurang dari sama dengan 4 adalah dengan cara melihat labelnya. Setiap sisinya harus memuat himpunan bilangan bulat dari 1 hingga  $q$  dan terdapat konstanta ajaib  $k = 5n + 1$ .
5. Pembuktian teorema pelabelan *E-super vertex magic* pada matahari luka  $C_n^+ - 3e$  dengan  $n$  lebih dari sama dengan 3 adalah dengan cara

melihat labelnya. Pada setiap sisinya harus memuat himpunan bilangan bulat dari 1 hingga  $q$  dan terdapat konstanta ajaib  $k = 5n - 6$ .

#### 4.2. Saran

Pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat:

1. Melakukan penambahan berupa program aplikasi pelabelan *E-super vertex magic* pada ketiga graf yang telah dibahas.
2. Melakukan pembuktian pelabelan *E-super vertex magic* pada graf-graf lainnya misalnya graf kipas, graf hamiltonian dan disjoint union  $mC_n$  yang belum dibahas sebelumnya.
3. Melakukan penelitian pada jenis pelabelan yang lain seperti pelabelan *V-super vertex magic* dan pelabelan *Super edge magic*.





## DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, Azizah N.N, dan Nofandika, F.F. (2009). *Teori Graf*. Malang : UIN-Malang Press.
- Bala, S., Thirusangu, K., and Suresh, D. (2017). Edge Magic Labelling in Triplication of Graphs, *IJAR.*, 3: 220-223.
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2015). *Graphs and Digraphs* (6th ed.). California: CRC Press.
- Gallian, J.A. (2016). A Dynamic Survey of Graph Labelling, *Electron. J. Combin.* 18:#DS6
- MacDougall, J.A, Miller, M, Slamin, and Wallis, W.D. (2002). Vertex magic total labelling of graphs, *Util. Math.*, 61: 3-21.
- MacDougall, J.A, Miller, M, Sugeng, K.A. (2004). Super vertex magic total labelling of graphs, Proc. Of the 16th Australian Workshop on Combinatorial Algorithms, pp. 222-229.
- Marimuthu, G and Balakrishnan, M. (2012). E-super Vertex Magic Labelling of Graphs, *Discrete Appl. Math.*, 160 : 1766-1774.
- Marimuthu, G., Suganya, S., Kalaivani., and Balakrishnan, M. (2015). E-super Vertex Magic Labelling of Graphs and Some Open Problems, *AAM: Intern. J.*, 10 : 536-543.
- Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung : Informatika Bandung.
- Swaminathan, V and Jeyanthi, P. (2003). Super Vertex Magic Labelling, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 34 (6): 935-939.
- Tao-Ming Wang and Guang-Hui Zhang, (2014). Note on E-super Vertex Magic Graphs, *Discrete Appl. Math.*, 178: 160-162.
- Wallis W.D. (2001). *Magic Graphs*. New York : Springer Science Business Media.
- Wilson, R. J. (1996). *Introductions to Graph Theory*. England : Longman Group Ltd.
- Wilson, R.J., Watkins, J.J. (1990). *Graphs an Introductory approach*. Singapore : John Wiley & Sons, Inc.