MENCARI AKAR KEILMUAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Mohammad Mukhlisin

Mahasiswa Program Pascasarjana Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta (UNY)

Abstract

The objective of this study is to explore the scientific roots of mathematics education as well as demonstrate how mathematics education can be classified as a discipline. A study can be classified as a discipline if it has (1) object(s) of study, (2) systematics, and (3) scientific methods. The object of study in mathematics education can be divided into three groups: (1) mathematics as the subject content with all its characteristics, (2) the subject of education (teacher and learner) and (3) the mathematics education technology. The interaction of the three objects of study will require as well as result in more advanced, systematic, precise as well as argumentative studies. Moreover, the dynamics of the study will also lead to the development of mathematics education in terms of its systematics, methods as well as object of studies. Thus, it can be seen that mathematics education has the required object(s) of study, systematics as well as scientific methods to be classified as a discipline.

Kata kunci: *Pendidikan matematika, teknologi pendidikan, transformasi diri.*

A. Pendahuluan

> *Didiklah anakmu (sesuai zamannnya)*
> *Karena mereka diciptakan untuk (hidup dalam tantangan) zamannya, bukan di zamanmu*
>
> Ali bin Abi Thalib

Sekilas, nasihat di atas tampak begitu sederhana. Namun jika dikaji lebih mendalam, akan ditemukan konsekuensi-konsekuensi yang begitu kompleks kaitannya dengan mendidik generasi penerus agar dapat menjadi manusia yang mampu berbuat yang terbaik bagi kehidupannya.

Berbeda dengan binatang lainnya, yang meskipun juga memiliki pengetahuan tetapi pengetahuan yang dimiliki binatang lain hanya sebatas untuk kelangsungan hidupnya (*survive*), manusia mengembangkan pengetahuannya untuk mengatasi kebutuhan kelangsungan hidup, memikirkan hal-hal baru, menjelajah ufuk baru, karena manusia hidup tidak sekedar untuk kelangsungan hidupnya, namun lebih dari itu. Manusia mengembangkan kebudayaan; manusia memberi makna pada kehidupan; manusia "memanusiakan" diri dalam kehidupannya. Dan untuk mewujudkan hal-hal yang disebut di atas, maka pendidikan merupakan sesuatu yang mutlak diperlukan.

Pendidikan adalah fenomena asasi dalam kehidupan manusia. Kita dapat mengatakan, bahwa dimana ada kehidupan manusia, bagaimanapun juga disitu pasti ada pendidikan.[1] Pendidikan merupakan gejala yang universal dan merupakan keharusan bagi manusia, karena pendidikan disamping sebagai *gejala* juga sekaligus sebagai *upaya* manusia untuk memanusiakan manusia.

Seiring perkembangan zaman dan kebudayaan manusia, timbul tuntutan akan adanya pendidikan yang terselenggara dengan lebih baik, lebih sistematis, didasarkan atas pemikiran yang matang serta mampu memprediksi kebutuhan-kebutuhan yang akan muncul di masa mendatang. Manusia ingin lebih mempertanggungjawabkan caranya mendidik generasi penerusnya agar lebih berhasil dalam melaksanakan hidupnya.[2] Disinilah muncul keharusan adanya pemikiran-pemikiran teoritis yang sistematis, analitis, cermat argumentatif dan metodologis yang selanjutnya teori-teori tersebut dapat diterapkan dalam dunia pendidikan. Setidaknya, tuntutan dan keharusan yang disebut di atas merupakan konsekuensi bagi nasihat yang telah diucapkan kurang lebih 15 abad yang lalu.

Pendidikan merupakan upaya sadar untuk mengembangkan potensi-potensi yang dimiliki manusia. Tiap manusia memiliki potensi yang berbeda dan bersifat unik. Hal ini memiliki pengaruh terhadap minat keilmuannya di masa depan. Ada anak yang memiliki potensi dan selanjutnya berminat tinggi terhadap bidang teknik, sosial, seni, biologi, fisika, matematika dan bidang-bidang lain.

---

[1] Driyarkara, *Driyarkara tentang Pendidikan*, (Yogyakarta: Kanisius, 1980), p. 32.

[2] Sumitro, dkk., *Pengantar Ilmu Pendidikan*, (Yogyakarta: UNY Press, 2006), p.26.

Tulisan ini mencoba untuk merangkai gambaran sosok pendidikan matematika agar dapat ditelusuri akar keilmuan pendidikan matematika. Mengapa pendidikan matematika? Salah satu alasannya adalah karena pada dunia inilah penulis sedang mentransformasikan diri untuk mengetahui apa yang disebut benar dan apa yang salah, mana yang dianggap baik dan mana yang buruk, serta apa yang termasuk indah dan apa yang termasuk jelek, yang selanjutnya dapat penulis jadikan sebagai bagian dari isi pendidikan.

Dunia pendidikan matematika cukup luas dan kompleks. Mengetahui dunia pendidikan matematika bisa dilakukan dengan cara menempatkan diri di luar dunia tersebut sehingga dapat dilihat keseluruhannya, atau berpijak dan menjelajah padanya sehingga dapat diamati setiap detilnya. Ibarat ingin mengetahui gunung Merapi, cara yang dapat dilakukan adalah melihatnya dari kejauhan sehingga terlihat keseluruhan bentuknya atau melakukan pendakian dan penjelajahan sehingga tahu detil hutan, binatang, sungai, jurang bahkan masyarakatnya.

Ketika berbicara mengenai pendidikan matematika, agar mendapatkan gambaran kesejatian identitasnya, maka harus dipandangnya sebagai suatu kesatuan yang utuh yang tiap komponennya saling berhubungan dan terjalin interaksi yang tidak terpisahkan.

Artikel ini mencoba untuk menelusuri apa saja komponen pendidikan matematika, bagaimana karakter komponen-komponennya, bagaimana interaksi-interaksi yang terjadi antar komponen dan apa saja yang menjadi konsekuensi dari interaksi antar komponen tersebut. Dari sudut pandang inilah, selanjutnya penulis mencoba menganalisa apa sebenarnya pendidikan matematika itu.

B. Komponen-komponen Pendidikan Matematika dan Karakteristiknya

Secara etimologis, frase "pendidikan matematika" merupakan gabungan dari dua kata, yakni pendidikan dan matematika. Pendidikan sendiri dapat dipandang dalam arti luas dan dalam arti teknis. Dalam arti yang luas pendidikan menunjuk pada suatu tindakan atau pengalaman yang mempunyai pengaruh yang berhubungan dengan pertumbuhan atau perkembangan jiwa (*mind*), watak (*character*), atau kemampuan fisik individu.[3] Pendidikan dalam artian ini berlangsung terus se-

[3] George F. Kneller, "Philosophy and Education", *Foundations of Education*, (New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967), p.63.

umur hidup (*life long education*). Dalam arti teknis, pendidikan adalah proses dimana masyarakat, melalui lembaga-lembaga pendidikan, dengan sengaja mentransformasikan warisan budayanya yang berupa pengetahuan, nilai-nilai dan keterampilan dari generasi ke generasi.

Dengan demikian, pendidikan matematika setidaknya dapat dimaknai sebagai proses dimana masyarakat, melalui lembaga-lembaga pendidikan, dengan sengaja mentransformasikan warisan budayanya dari generasi ke generasi dengan menjadikan matematika sebagai alat bagi terwujudnya transformasi tersebut.

Dari pemaknaan diatas, dapat dilihat komponen-komponen yang tercakup dalam pendidikan matematika, yaitu: *pertama*, adanya proses transformasi yang dengan proses tersebut, *input* akan "diubah" menjadi *output*. Istilah terkini memandang hal ini sebagai teknologi pendidikan; *kedua*, adanya subjek pendidikan yakni pendidik dan peserta didik; *ketiga*, adanya isi pendidikan yakni matematika sebagai suatu ilmu. Pembahasan selanjutnya akan dimulai dari yang terakhir menuju yang pertama.

1. Matematika sebagai Isi Pendidikan dan Karakteristiknya

"Apakah Matematika itu?" merupakan pertanyaan yang tidak dapat dengan mudah dijawab dengan satu atau dua kalimat saja. Jawaban dari pertanyaan di atas akan berbeda-beda tergantung bilamana pertanyaan itu dijawab, dimana dijawab, siapa yang menjawab, dan apa sajakah yang dipandang termasuk dalam matematika. Ada yang menyatakan matematika adalah ilmu mengenai pengukuran, kuantitas dan besaran; matematika adalah ilmu formal yang murni; matematika adalah ilmu yang mempelajari pola, bentuk dan struktur; ber-matematika adalah berpikir logis; matematika adalah bahasa simbol yang baru mempunyai arti setelah sebuah makna diberikan padanya, bahasa yang berusaha untuk menghilangkan sifat kabur, majemuk dan emosional dari bahasa verbal.

Istilah *mathematics* (Inggris), *mathematic* (Jerman), *mathematique* (Perancis), *matematico* (Italia) berasal dari perkataan Latin *mathematica*, yang mulanya diambil dari perkataan Yunani, *mathematike*, yang berarti *"relating to learning"*, dikatakan demikian karena matematika berfungsi sebagai alat berpikir, lebih tepat lagi berpikir logis. Istilah *mathematike* ini mempunyai akar kata *mathema* yang berarti pengetahuan (knowledge) dan atau ilmu (*science*). Perkataan *mathematike* juga berhubungan erat dengan *mathanein* yang mengandung arti berpikir. Sehingga secara etimologis, matematika berarti "ilmu yang diperoleh/dibangun dengan bernalar."[4] Hal ini tidak dimaksudkan bahwa ilmu lain tidak melalui penalaran, akan tetapi dalam matematika lebih menekankan aktivitas dalam dunia penalaran (induktif-deduktif: artinya kebenaran dari penalaran induktif akan bernilai benar, dalam matematika, jika dapat dibuktikan kebenarannya secara deduktif). Sementara itu ilmu lain menekankan hasil observasi, eksperimen disamping penalaran (induktif).

Matematika sebagai ilmu tumbuh dan berkembang karena proses penalaran, oleh karena itu ada pendapat bahwa logika adalah dasar untuk terbentuknya matematika. Bahkan Bertrand Russell menyimpulkan "matematika adalah masa kedewasaan logika, sedangkan logika adalah masa kecil matematika".[5]

Sebelum mendiskusikan tentang objek-objek yang menjadi kajian matematika. Akan lebih membantu jika dilihat terlebih dahulu bagaimana sejarah perkembangan matematika. Bell membagi sejarah perkembangan matematika menjadi empat tahap. Tahap pertama dimulai dengan matematika yang berkembang pada peradaban Mesir Kuno dan daerah sekitarnya seperti Babylonia dan Mesopotamia. Pada masa itu aspek praktis dari matematika lebih menonjol dibanding aspek estetik. Aspek praktis yang dimaksud adalah matematika telah dipergunakan dalam perdagangan, pertanian, bangunan dan usaha mengontrol alam seperti banjir. Di samping aspek praktis dan estetik, matematika, pada masa itu, juga dikaitkan dengan aspek mistik.

Tahap berikutnya adalah perkembangan matematika dalam peradaban Yunani yang sangat memperhatikan aspek estetik. Pada fase inilah mulai diletakkan dasar matematika sebagai cara berpikir rasional dengan menetapkan berbagai langkah dan definisi tertentu. Sebagaimana peradaban Mesir Kuno, peradaban Yunani menaruh minat yang tinggi terhadap ilmu ukur atau geometri.

Babak perkembangan selanjutnya terjadi di Timur dimana sekitar tahun 1000 Masehi, bangsa Arab, India dan Cina mengembangkan ilmu hitung dan Aljabar. Mereka mendapatkan angka nol dan cara peng-

[4] Morris Kline, "Mathematics," *Adventure of the Mind*, (Vintage, 1961), hlm. 80.

[5] Bertrand Russel, *Human Knowledge: Its Scope and Limits*, (Simon Schuster, 1948), p. 142.

gunaan desimal serta mengembangkan kegunaan praktis dari ilmu hitung dan aljabar tersebut. Perkembangan matematika modern dimulai pada zaman *Renaissance*, dimana gagasan-gagasan orang Yunani dan penemuan ilmu hitung serta aljabar itu dikaji kembali hingga ditemukanlah diantaranya kalkulus diferensial yang selanjutnya berkembang hingga masa sekarang.[6]

Dari illustrasi mengenai sejarah perkembangan matematika di atas, selanjutnya dapat ditelusuri mengenai apa saja yang menjadi objek kajian matematika. Pada permulaannya, objek kajian matematika yang ditemukan adalah Aritmatika dan Geometri. Setelah itu dikembangkan aljabar dan ditemukan Kalkulus yang berfungsi sebagai tonggak penopang terbentuknya cabang matematika baru yang lebih kompleks, antara lain Aljabar Linear, Aljabar Abstrak, Himpunan, Geometri (Sistem Geometri Euclidean dan non-Euclidean, Geometri Linear, Geomateri Analitis), Analisis Numerik, Analisis Vektor, Matriks, Statistika, dan Topologi. Di masa mendatang sangat dimungkinkan berkembangnya cabang-cabang baru dalam matematika, baik sebagai akibat persinggungan antar cabang dalam matematika, maupun persinggungan cabang matematika dengan disiplin ilmu lain.

Secara umum objek kajian matematika senantiasa mengalami dinamika, bergantung pada aliran filsafat yang "mendekatinya". Aristoteles menyatakan bahwa objek kajian matematika adalah permukaan dan isi, garis-garis, titik-titik, dan angka-angka dari benda-benda dan gerak, yang pengkajiannya menghasilkan tatanan-tatanan yang diperoleh melalui abstraksi dalam pikiran. Pandangan Aristoteles tentang Matematika ini terus berkembang. Herbert Spencer mengklasifikasikan matematika dalam kelompok ilmu abstrak yang objek kajiannya meliputi "*hal abstrak yang berhubungan dengan objek*". Pemikiran filsafati terkini menghubungkan Matematika dengan **cara berpikir**; metode penalaran (*reasoning*), cara penyelesaian masalah.

Matematika mempelajari tentang pola keteraturan, tentang struktur yang terorganisir. Hal itu dimulai dari unsur-unsur yang tidak didefinisikan, kemudian pada unsur yang didefinisikan, ke aksioma/ postulat, dan akhirnya ke teorema. Konsep-konsep matematika tersusun secara hierarkis, terstruktur, logis, sistematis mulai dari konsep paling

---

[6] Eric T Bell, *Mathematics Queen and Servant of Science*, (Washington: Tempus Book of Microsoft Press, 1987). p. 75 - 85.

sederhana sampai konsep yang paling kompleks. Dalam matematika terdapat konsep prasyarat sebagai dasar untuk memahami konsep selanjutnya.[7]

Sebagaimana telah disebutkan diatas, bahwa matematika adalah pola berpikir, pola mengorganisasikan, pembuktian yang logis, bahkan matematika adalah bahasa,[8] maka sangat jelas bagaimana peran matematika dalam kehidupan manusia. Manusia adalah makhluk yang berpikir, makhluk yang membutuhkan pola hidup yang mendukung kelangsungan hidupnya. Kebutuhan-kebutuhan tersebut, secara langsung maupun tidak langsung, dapat dipenuhi dengan belajar matematika. Matematika telah menjadi bagian dari peradaban manusia, bahkan matematika juga turut membangun peradaban manusia.

Matematika sebagai sebuah ilmu dapat dipelajari, artinya matematika dapat menjadi bagian isi pendidikan. Pendidikan yang dimaksud di sini adalah pendidikan dalam sistem persekolahan, mulai dari pendidikan dasar hingga pendidikan tinggi. Matematika yang dipelajari di pendidikan dasar tentunya memiliki cakupan materi yang berbeda dengan matematika yang dipelajari di pendidikan menengah. Hal ini di samping karena tuntutan karakteristik matematika (yang tersusun secara hierarkis) itu sendiri, juga karena karateristik peserta didik dengan berbagai tingkatan perkembangan psikologisnya.

Dari tinjauan di atas, menjadi jelas bahwa diperlukan adanya pengaturan materi matematika yang akan dipelajari pada tiap-tiap jenjang pendidikan persekolahan. Materi apa saja yang akan dipelajari oleh anak usia pendidikan dasar, menengah dan tinggi. Dengan kata lain, materi keilmuan matematika perlu disusun dalam kurikulum yang terstruktur dan sistematis sesuai dengan hierarki matematika dan perkembangan peserta didik.

2. Subjek Pendidikan dan Karakteristiknya

Subjek pendidikan yang dimaksud di sini adalah pendidik (guru) dan peserta didik (siswa). Pendidikan adalah proses sekaligus sarana transformasi nilai, ilmu pengetahuan, bahkan budaya dari satu generasi ke generasi berikutnya. Sehingga orang yang terlibat di dalam pendidi-

---

[7] Morris Kline, "Mathematics," *Adventure of the Mind*, (Vintage, 1961), hlm. 89.

[8] Jujun S. Suriasumantri, *Ilmu dalam Perspektif*, (Jakarta: Yayasan Obor Indonesia, 1999), p. 174.

kan (sistem persekolahan), tentu saja, yang utama adalah guru dan siswa.

Guru selaku pendidik masih merupakan sosok yang memiliki peranan penting dalam proses pembelajaran yang juga mempengaruhi mutu hasil pendidikan. Di zaman dulu, peranan guru sangat dominan dalam transformasi pengetahuan, bahkan guru adalah sumber ilmu pengetahuan. Hal ini dapat dipahami karena zaman itu "kondisi" memang menuntut demikian. Perkembangan zaman sekarang ini cenderung "mengurangi" dominasi guru dalam pembelajaran.[9] Guru tidak lagi dipandang sebagai sumber segala pengetahuan, karena memang keadaan sekarang sangat memungkinkan untuk hal tersebut.

Tingkat "penting" dan tidaknya peranan guru yang digambarkan di atas tampaknya dipengaruhi oleh ideologi pendidikan yang dianut oleh dunia pendidikan di tempat pendidikan itu diselenggarakan. Apakah ideologi pendidikan yang dianut itu *konservatisme, fundamentalisme, intelektualisme, liberalisme, liberasionisme* ataukah *anarkisme* pendidikan.[10]

Dunia pendidikan di Indonesia saat ini menuntut adanya spesialisasi tenaga pendidik (baca: guru). Hal ini berdampak pada munculnya berbagai spesialisasi bidang studi pada lembaga pendidikan calon guru (baca: LPTK), salah satunya adalah pendidikan matematika.

Disadari atau tidak, kenyataan di lapangan menunjukkan bahwa banyak orang tua siswa menganggap nilai pelajaran matematika sang anak merupakan tolok ukur berhasil atau tidaknya anaknya dalam belajar. Bahkan yang lebih ekstrim, para orang tua menganggap nilai matematika yang baik merupakan kebanggaan bagi orang tua. Hal ini semakin membuat tekanan yang berat sekaligus tuntutan bagi munculnya guru-guru matematika yang profesional dan memiliki kompetensi dalam menyelenggarakan pembelajaran matematika yang efektif di kelas. Tuntutan bagi munculnya guru yang profesional tersebut juga menjadi tanggung jawab bagi LPTK yang merupakan tempat dimana para calon guru menimba ilmu sekaligus pengalaman yang berkaitan dengan pembelajaran matematika.

Peserta didik berstatus sebagai subjek didik. Pandangan modern cenderung menyebut demikian oleh karena peserta didik, tanpa

---

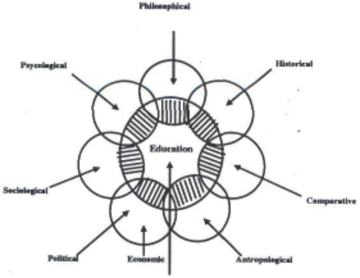
[9] Mastuhu, *Menata Ulang Pemikiran Sistem Pendidikan Nasional dalam Abad 21*, (Yogyakarta : Safiria Insania Press, 2003), p. 140.

[10] William F. O'neil. *Ideologi-ideologi Pendidikan.*, (Yogyakarta: Pustaka Pelajar, 2002). p. 498 – 521.

pandang usia, adalah subjek atau pribadi yang otonom, yang ingin diakui keberadaannya. Selaku pribadi yang memiliki ciri khas dan otonomi, ia ingin mengembangkan diri, mendidik diri, secara terus menerus guna memecahkan masalah-masalah yang dijumpai sepanjang hidupnya.[11]

Subjek didik merupakan pribadi yang memiliki potensi fisik dan psikis yang khas, sehingga merupakan insan yang unik dan dapat dipastikan tidak ada dua subjek didik yang sama persis. Hal ini dikarenakan subjek didik sebagai pribadi merupakan sosok yang multidimensi. Ke-multidimensi-an subjek didik dan interaksi antar dimensi ini selanjutnya memberikan pengaruh terhadap fondasi-fondasi pendidikan. Ke-multidimensi-an subjek didik yang dimaksud antara lain subjek didik sebagai sosok psikologis, sosiologis, antropologis, historis, ekonomis, politis dan bahkan filosofis.

Subjek didik sebagai sosok psikologis telah mendorong munculnya berbagai teori-teori psikologis tentang subjek didik. Teori-teori tersebut selanjutnya dapat diklasifikasi dalam aliran-aliran psikologi, di antaranya: aliran Psikologi Tingkah Laku (*behaviourist*), *Neo-behaviourists, Gestaltists,* aliran Psikologi Kognitif (*cognitivists*) serta *Humanists*.[12]



Gambar 1. Struktur Fondasi Pendidikan[13]

[11] Sumitro, dkk., *Pengantar Ilmu Pendidikan*, (Yogyakarta: UNY Press, 2006), p. 68.

[12] Ian Reece dan Stephen Walker, *Teaching, Training and Learning: a Practical Guide*, (Sunderland: Business Education Publishers, 1997), p. 101.

[13] Sumitro, dkk., *Pengantar Ilmu Pendidikan*, (Yogyakarta: UNY Press, 2006), p. 36.

Teori-teori psikologi pada tiap aliran di atas selanjutnya membawa implikasi dalam kegiatan: pembelajaran sehari-hari. Misal teori Thorndike yang masuk dalam aliran psikologi *behaviourist* membawa implikasi sebagai berikut:

a. Dalam menjelaskan suatu konsep tertentu, guru sebaiknya mengambil contoh yang sekiranya sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Alat peraga dari alam sekitar akan lebih dihayati.
b. Metode pemberian tugas, metode latihan akan lebih cocok untuk penguatan dan hafalan. Dalam penerapan metode tersebut subjek didik akan lebih banyak mendapatkan stimulus sehingga respons yang diberikan pun akan lebih banyak.
c. Dalam kurikulum, materi disusun dari materi yang mudah, sedang dan sukar sesuai dengan tingkatan kelas, dan tingkat sekolah. Penguasaan materi yang lebih mudah sebagai syarat untuk dapat menguasai materi yang lebih sukar.

Dimensi psikologis subjek didik, dengan beragam teori psikologis yang berkembang, tampaknya telah memberikan andil yang begitu "sempurna" bagi pengoptimalan proses pendidikan. Namun sekali lagi, subjek didik adalah sosok yang multidimensi. Masih ada dimensi filosofis, historis, sosiologis, antropologis, ekonomis dst. Dimensi-dimensi yang disebut di akhir ini pun memberikan sumbangan teori bagi pendidikan yang tidak kalah penting dengan teori-teori dimensi psikologis. Sehingga dikenal kajian-kajian seperti: *philosophy of education, history of education, sosiology of education..*

Kajian sosiologi pendidikan, setidaknya, memberikan pandangan bahwa hubungan antar sesama subjek didik, antara subjek didik dan pendidik dalam lingkungan pendidikan (sekolah) memuat interaksi sosial sebagaimana interaksi sosial suatu masyarakat, yakni masyarakat sekolah. Interaksi sosial yang terjadi di masyarakat sekolah hendaknya dipahami dengan baik oleh pendidik dan subjek didik sehingga tidak terjadi konflik sosial yang dapat mengancam kelangsungan pendidikan di sekolah.

Dalam masyarakat sekolah juga terdapat budaya yang berkembang. Dinamika budaya ini di satu sisi begitu spesifik, di sisi lain memuat kompleksitas karena tiap subjek didik merupakan manusia yang berbudaya, yang sangat dimungkinkan, berbeda antara subjek didik yang satu dengan subjek didik yang lain. Dan di sinilah pentingnya peran pemahaman terhadap dan sentuhan kajian antropologi pendidikan.

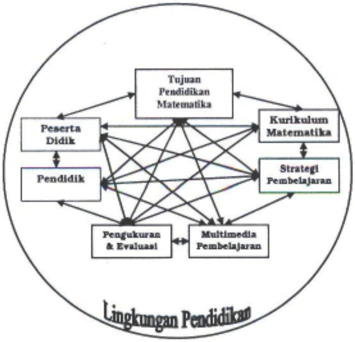
Fenomena pendidikan bukan hanya merupakan gejala yang melekat pada manusia, melainkan juga sekaligus merupakan upaya untuk memanusiakan manusia agar menjadi sebenar-benarnya manusia (insan), yang hal ini secara integratif diperlukan adanya berbagai kajian yang sistematis, analitis, cermat argumentatif tentang pendidikan (kajian filosofis, psikologis, sosiologis, antropologis, dan historis)

3. Teknologi Pendidikan Matematika dan Karakteristiknya

Pendidikan sebagai sarana transformasi nilai, pengetahuan dan budaya memiliki arti bahwa pendidikan dapat dipandang dari sisi teknologi. Teknologi yang dimaksud di sini tentu saja bentuknya berbeda dengan teknologi pada umumnya, namun prinsip-prinsip ke-teknologiannya tetap sama, yaitu dalam teknologi terdapat: *input – proses – output.*

Dalam pandangan teknologi, proses pendidikan memuat komponen-komponen yang dapat merupakan "alat" dan sarana bagi terprosesnya *input* menjadi *output.* Diantara komponen yang dimaksud adalah: adanya kurikulum, strategi perencanaan dan pelaksanaan pembelajaran, metode dan media pembelajaran, metode pengukuran dan evaluasi.

Agar dihasilkan output yang sesuai tujuan pendidikan, setiap komponen yang terlibat hendaknya dipandang sebagai satu kesatuan sistem yang terpadu. Menurut konsep teknologi pendidikan, pendidikan (termasuk di dalamnya pendidikan Matematika) adalah ilmu. Pendidikan adalah cabang dari teknologi ilmiah. Dengan pengembangan desain program, pendidikan menjadi sangat efisien. Efisiensi merupakan salah satu karakter utama teknologi pendidikan. Karakteristik lainnya adalah pembentukan dan penguasaan kompetensi lebih diutamakan dari pada pengawetan dan pemeliharaan budaya lama.



Gambar 2. Dinamika Pendidikan Matematika dalam Pandangan Teknologi Pendidikan

Kurikulum mempunyai hubungan yang sangat erat dengan teori pendidikan. Suatu kurikulum disusun dengan mengacu pada satu atau beberapa teori kurikulum, dan suatu teori kurikulum diturunkan dari teori pendidikan tertentu.[14] Kurikulum dipandang dari konsep teknologi pendidikan memiliki karakteristik mengutamakan segi-segi empiris, informasi objektif yang dapat diamati dan diukur serta dihitung secara statistik.

Kurikulum memiliki kedudukan sentral dalam seluruh proses pendidikan. Kurikulum mengarahkan segala bentuk aktivitas pendidikan demi tercapainya tujuan-tujuan pendidikan. Kurikulum juga memberikan pedoman dan pegangan tentang tujuan, lingkup, urutan isi, proses serta penilaian pendidikan.

Dalam pandangan konsep teknologi pendidikan, materi bidang studi yang termuat dalam kurikulum disusun terjalin dalam kemampuan atau kompetensi. Penyusunan kurikulum dilakukan oleh para ahli dan atau guru-guru yang mempunyai kemampuan mengembangkan kurikulum.

---

[14] Ella Yulaelawati, *Kurikulum dan Pembelajaran: Filosofi, Teori dan Aplikasi*, (Bandung: Pakar Raya, 2004), p. 4 – 7.

Kurikulum yang dikembangkan dari konsep teknologi pendidikan memiliki beberapa ciri khusus, yaitu:[15]

1. Tujuan diarahkan pada penguasaan kompetensi, yang dirumuskan dalam bentuk perilaku.
2. Pengalaman belajar yang dapat mencapai tujuan pembelajaran pada berbagai tingkatan. Agar pengalaman belajardapat mencapai tujuan pembelajaran, maka perlu disusun terlebih dahulu tentang kriteria penentuan pengalaman belajar. Di antara hal-hal yang perlu dicermati adalah: validitas, kelayakan, terbuka terhadap hal baru, membangun motivasi dan minat serta mengembangkan keutuhan pengembangan ranah kognitif, afektif, psikomotor, sosial, emosional, dan spiritual peserta didik.
3. Pengalaman belajar selalu mengandung materi kurikulum. Materi kurikulum ditentukan dalam bahan kajian dan atau mata pelajaran.
4. Pengelolaan pengalaman belajar dapat dilakukan berdasarkan berbagai pertimbangan, yaitu pengembangan vertikal dan horisontal.
5. Penilaian pembelajaran merupakan suatu proses pengumpulan, pelaporan, dan penggunaan informasi tentang hasil belajar peserta didik. Pengumpulan informasi dilakukan dengan menerapkan asas-asas penilaian, keberlanjutan dan kesinambungan, pengumpulan bukti-bukti autentik, akurat, dan konsisten.

Pembelajaran matematika akan berjalan baik dan lancar apabila direncakanan dengan baik dan dilaksanakan sesuai dengan rencana. Dari pandangan ini, muncul strategi pembelajaran, pendekatan dan metode pembelajaran. Kajian mengenai bagaimana menyusun strategi pembelajaran matematika, memilih pendekatan dan metode ini masih senantiasa mengalami dinamika dan perkembangan. Hal ini dikarenakan tidak setiap strategi dan metode itu efektif untuk setiap kompetensi, kondisi dan sepanjang waktu. Dalam konteks pembelajaran, satu strategi atau metode mungkin efektif untuk satu pencapaian kompetensi, kondisi di suatu waktu, tetapi bisa jadi tidak efektif untuk kondisi lain dan waktu yang berbeda. Dalam hal ini saja, telah muncul berbagai macam strategi, pendekatan dan metode yang ditawarkan oleh para pakar pendidikan matematika. Sehingga dikenal adanya pendekatan

[15] *Ibid*, 24 – 29.

kontekstual, pendekatan *open-ended,* metode *cooperative leraning*, dan sebagainya.

Untuk mengetahui tercapai tidaknya tujuan pendidikan diperlukan adanya kegiatan pengukuran, penilaian dan evaluasi pembelajaran. Berbagai teori dan teknik evaluasi telah mewarnai dunia pendidikan dengan perkembangannya yang senantiasa menuntut adanya perbaikan. Evaluasi pembelajaran tidak sekedar mengetahui tercapai tidaknya tujuan pembelajaran, tetapi juga mengkaji tentang bagaimana dan apa yang hendaknya dilakukan manakala tujuan tersebut tidak tercapai.[16] Teori-teori pengukuran juga telah menggunakan statistik sebagai alatnya. Sehingga semakin kompleks komponen yang termuat dalam teknologi pendidikan ini. Dan menjadi tugas pendidik untuk memiliki kemampuan mengurai dan menggunakan setiap komponen tersebut dengan baik.

C. Interaksi antar Komponen Pendidikan Matematika dan Konsekuensinya

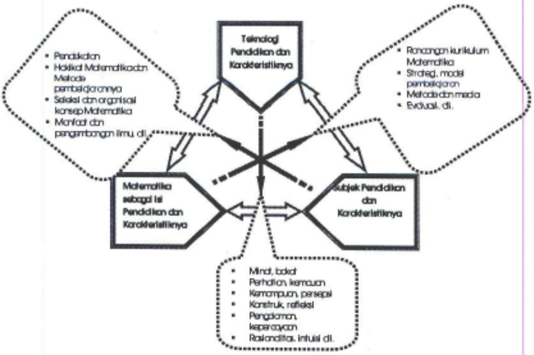
Dari rangkaian penjabaran di atas, mulai dari Matematika dan karakteristiknya, subjek pendidikan hingga teknologi pendidikan, terdapat benang merah yang dimiliki oleh ketiga komponen pembentuk pendidikan matematika, diantaranya: *pertama*, ketiga komponen tersebut membutuhkan dan memberikan kajian-kajian ilmiah (sistematis, analitis, cermat argumentatif dan metodologis) berdasarkan ruang lingkupnya masing-masing, namun selanjutnya dalam penerapan di dunia pendidikan terjadi persinggungan antar ruang lingkup tersebut. Misal kajian mengenai materi belajar yang akan diberikan kepada subjek didik (termuat dalam kurikulum) perlu mempertimbangkan perkembangan subjek didik (sebagai sosok multidimensi) dan susunan hierarki materi dalam Matematika. *Kedua,* interaksi ketiga komponen di atas membentuk suatu sistem, yang disebut sistem pendidikan, yang akan selalu berkembang dinamis dan responsif terhadap perubahan-perubahan serta kecenderungan-kecenderungan yang sedang berlangsung. Sehingga di manapun dan sampai kapanpun kajian ilmiah dalam konteks pendidikan matematika, secara khusus, dan pendidikan, secara umum,

[16] Djemari Mardapi, *Teknik Penyusunan Instrumen Tes dan Non Tes,* (Yogyakarta: Mitra Cendikia Press, 2008), p. 9 – 11.

akan senantiasa membentuk dinamika keilmuan yang menjadi tantangan bagi para ahli pendidikan.

Secara lebih terperinci, interaksi-interaksi tersebut dapat dijelaskan melalui illustrasi gambar di bawah. Interaksi antara subjek pendidikan dilihat dari sudut pandang teknologi pendidikan, setidaknya, menghasilkan kajian-kajian diantaranya tentang: minat dan bakat subjek didik terhadap matematika; perhatian subjek didik terhadap pembelajaran matematika; kemauan, kemampuan, persepsi, konstruk, refleksi dari peserta didik; pengalaman, kepercayaan, rasionalitas, intuisi.

Interaksi antara teknologi pendidikan dan subjek pendidikan dilihat dari sudut pandang Matematika, setidaknya, membutuhkan kajian-kajian yang mendalam dan sistematis mengenai: rancangan kurikulum; strategi, model pembelajaran, metode dan media, evaluasi (proses, hasil, dan indikator keberhasilan). Di antara komponen ini sendiri juga terjalin interaksi, misal antara materi dalam kurikulum dengan strategi, metode, pendekatan dan media terjalin satu hubungan yang menuntut adanya kesinergian demi tercapainya tujuan pembelajaran.



Gambar 3. Interaksi antar Komponen Pendidikan Matematika dan Konsekuensinya

Interaksi antara Matematika dan teknologi pendidikan dilihat dari sudut pandang subjek pendidikan membutuhkan kajian-kajian, diantaranya: pendekatan hakikat matematika dan metode pembelajarannya materi matematika yang sesuai, seleksi dan organisasi konsep, tujuan belajar matematika yang hendak dicapai siswa, manfaat dan pengembangan matematika.

Segenap interaksi tersebut di atas menuntut adanya pemikiran-pemikiran teoritis yang sistematis, analitis, cermat argumentatif dan metodologis. Dari tinjauan ini, selanjutnya dapat ditelusuri akar keilmuan pendidikan matematika karena suatu kawasan studi dapat tampil atau menampilkan diri sebagai disiplin ilmu, bila memenuhi setidak-tidaknya tiga syarat, yaitu: (1) memiliki objek studi (objek material dan objek formal), (2) memiliki sistematika dan (3) memiliki metode.[17]

D. Penutup

Dengan mengetahui akan kompleksitas tantangan yang melingkupi pendidikan matematika dan adanya usaha untuk mengurai kompleksitas tersebut, penulis berharap, setidaknya pada diri sendiri, agar apa yang telah dilakukan di atas dapat menjadi bekal bagi terwujudnya transformasi diri menuju sosok pendidik yang profesional dan memiliki kompetensi, khususnya dalam pendidikan matematika. Proses transformasi diri, setidaknya, diawali dengan mengetahui terlebih dahulu: (1) dimana posisi dalam dinamika persoalan pendidikan matematika, (2) apa peran yang telah dimainkan dengan posisi kita saat ini, (3) apakah peran di masa mendatang akan tetap sama ataukah dapat berperan lebih baik, (4) langkah-langkah apa yang akan ditempuh agar dapat menjalankan peran yang lebih baik di masa mendatang. Semoga refleksi yang sederhana ini dapat menjadi penunjuk arah serta memberikan secercah cahaya yang menerangi jalan menuju upaya transformasi diri.

---

[17] Sumitro, dkk., *Pengantar Ilmu Pendidikan*, (Yogyakarta: UNY Press, 2006), p. 29)

DAFTAR PUSTAKA

Bell, Eric T, *Mathematics Queen and Servant of Science*, Washington: Tempus Book of Microsoft Press, 1987.

Brezinka, Wolfgang, *Philosophy of Educational Knowledge*, Dordrecht: Kluwer Academic,1992.

Driyarkara, *Driyarkara tentang Pendidikan*, Yogyakarta: Kanisius, 1980.

Kattsoff, Louis O, *Pengantar Filsafat*, terj. Soejono Soemargono, Yogyakarta: Tiara Wacana Yogya, 2004.

Kline, Morris, "Mathematics," *Adventure of the Mind*, Vintage, 1961.

Kneller, George, F., "Philosophy and Education", *Foundations of Education*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1967.

Mardapi, Djemari, *Teknik Penyusunan Instrumen Tes dan Non Tes*, Yogyakarta: Mitra Cendikia Press, 2008.

Mastuhu, *Menata Ulang Pemikiran Sistem Pendidikan Nasional dalam Abad 21*, Yogyakarta: Safiria Insania Press, 2003.

O'neil, William F, *Ideologi-ideologi Pendidikan*, terj. Omi Intan Naomi, California: Goodyear Publishing, 2002.

Redja Mudyahardjo, *Filsafat Ilmu Pendidikan Suatu Pengantar*, Bandung: Remaja Rosdakarya, 2002.

Reece, I., dan Walker, S., *Teaching, Training and Learning: A Practical Guide*, Sunderland: Business Education Publishers, 1997.

Soetopo, Hendyat, *Pendidikan dan Pembelajaran: Teori, Permasalahan dan Praktek*, Malang: UMM Press, 2005.

Sumitro, dkk., *Pengantar Ilmu Pendidikan*, Yogyakarta: UNY Press, 2006.

Suriasumantri, Jujun S, *Filsafat Ilmu Sebuah Pengantar Populer*, Jakarta: Sinar Harapan, 1985.

Ulich, Robert, *Philosophy of Education*, New York: American Book, 1961.

Yulaelawati, Ella, *Kurikulum dan Pembelajaran: Filosofi, Teori dan Aplikasi*, Bandung: Pakar Raya, 2004.

KEKONVERGENAN BARISAN *ALTERNATING PROJECTION* PADA HIMPUNAN YANG TAK SEMUANYA KONVEKS

Muhammad Wakhid Musthofa

Staf Pengajar Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Abstract

Many problems in applied mathematics can be formulated into finding a common point of a finite collection of sets. If all the sets are closed and convex, there is a powerful numerical method to solve the problem called the alternating projection method. In this method the sequence of alternating projection can be showed to converge to a point in the intersection of the sets. But these assumptions are not applicable all problems. In this paper, we generalize the alternating projection method to the collection of closed but only partially convex. In this case only local convergence is guaranteed.

Kata kunci: *alternating projection method, convergence, set-valued projections*

A. Pendahuluan

Banyak permasalahan dalam bidang matematika terapan yang dapat diformulasikan menjadi mencari titik yang berada di suatu irisan beberapa himpunan yang tutup. Salah satu metode untuk mencari titik tersebut adalah dengan cara melakukan proyeksi berturut-turut pada setiap himpunan tersebut. Jika himpunan-himpunan tersebut berupa himpunan yang semuanya konveks, maka metode proyeksi bertutur-turut pada setiap himpunan tersebut akan konvergen ke sebuah titik yang berada pada irisan semua himpunan tersebut.[1] Dalam istilah

[1] Gubin., L.G, B.T. Polyak., E.V. Raik, "The Method of Projections for Finding The Common

matematika metode ini dikenal dengan metode *alternating projection*. Sehingga metode *alternating projection* dapat didefinisikan sebagai prosedur proyeksi iteratif untuk mencari titik yang berada di suatu irisan beberapa himpunan yang konveks dan tutup.[2] Barisan proyeksi yang dihasilkan dari metode ini disebut dengan barisan *alternating projection*. Beberapa kasus telah berhasil diselesaikan dengan menggunakan metode *alternating projection*, diantaranya adalah *image recontruction*, *statistical estimation*, *covariance control*, desain pengontrol berorde tetap, dan masalah reduksi orde model norm H_∞.[34]

Namun pada kenyataannya masalah yang dihadapi tidaklah selalu menjamin bahwa semua himpunan yang akan diproyeksikan berupa himpunan konveks. Sehinggga dalam hal ini kita dihadapkan dengan masalah mencari titik yang berada di suatu irisan beberapa himpunan yang tutup tetapi tidak semuanya konveks. Pada tulisan ini metode *alternating projection* akan diperumum sehingga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah tersebut.

B. Konstruksi Barisan *Alternating Projection*

Diberikan H ruang Hilbert berdimensi hingga, dengan $\| \cdot \|$ adalah norm dari H yang diinduksi dari hasil kali dalam $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Fokus perhatian dalam makalah ini adalah masalah *feasibility* sebagai berikut.

Diberikan keluarga himpunan-himpunan tutup $Q_\alpha \in H$, dengan $\alpha \in \Im$ untuk sebuah himpunan indeks $\Im$. Akan dicari titik $x^* \in H$ sedemikian sehingga $x^* \in Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$.

Untuk suatu vektor $\hat{x} \in H$, operator proyeksi P_{Q_α} pada himpunan Q_α didefinisikan sebagai $P_{Q_\alpha}(\hat{x}) := x \in Q_\alpha$, sedemikian sehingga

Point of Convex Sets", dalam *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 145*, 1966, p.1.

[2] Wu, F.," Induced L_2 -norm Model Reduction of Polytopic Uncertain Linear Systems", dalam *Automatica 32*,1996,p.1417-1426.

[3] *ibid*, p.1417-1426.

[4] Grigoriadis, K.M., R.E Skelton, "Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods", dalam *Automatica 32*,1995,p.1117-1125.

$$\left\|\hat{x}-P_{Q_\alpha}(\hat{x})\right\| = \inf_{y\in Q_\alpha}\|\hat{x}-y\| = \rho(\hat{x},Q_\alpha). \tag{1}$$

Proyeksi pada himpunan konveks adalah tunggal. $\{P_\alpha\}$ dengan $\alpha\in\Im$ disebut dengan putaran proyeksi. Barisan *alternating projection* $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ diberikan oleh

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n\left(P_{\alpha(n)}\left(x^n\right)-x^n\right), \qquad 0\le\lambda_n\le 2, \tag{2}$$

dengan $P_{\alpha(n)}\left(x^n\right)=P_{Q_{\alpha(n)}}\left(x^n\right)$.

Khususnya untuk $\lambda_n=1$ didapat

$$x^{n+1} = P_{\alpha(n)}\left(x^n\right). \tag{3}$$

Urutan putaran himpunan indeks $\Im$ dalam barisan *alternating projection* (2) diatur dengan urutan sebagai berikut. Misalkan $\Im=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$, maka

$$\alpha(n)=\alpha_{n(\mathrm{mod}\, m)+1}\ , \tag{4}$$

dengan $n(\mathrm{mod}\, m)$ adalah sisa yang didapat dari membagi n dengan m. Terkait dengan (1), didefinisikan

$$\rho\left(x^n,Q_{\alpha(n)}\right)=\sup_{\alpha\in A}\rho\left(x^n,Q_\alpha\right)=\Phi\left(x^n\right). \qquad 5)$$

C. Kekonvergenan Barisan *Alternating Projection*

Berikut ini disajikan sebuah teorema yang akan menjamin kekonvergenan barisan *alternating projection* (2).[5]

[5] Gubin., L.G, B.T. Polyak., E.V. Raik., "The Method of Projections for Finding The Common Point of Convex Sets", dalam *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 145*,1966, p.5.

Teorema 1 Diberikan himpunan Q_α tutup dan konveks dengan $Q=\bigcap_{\alpha\in A} Q_\alpha$ tak kosong dan $0\le\varepsilon_1\le\lambda_n\le 2-\varepsilon_2$, dengan $\varepsilon_2>0$. Misalkan kondisi-kondisi berikut dipenuhi :

(a) $Q_{\bar\alpha}\cap\left(\bigcap_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\ne\bar\alpha}} Q_\alpha\right)^0$ tak kosong, dengan $\left(\bigcap_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\ne\bar\alpha}} Q_\alpha\right)^0$ menotasikan

himpunan titik-titik interior dari $\left(\bigcap_{\substack{\alpha\in A\\ \alpha\ne\bar\alpha}} Q_\alpha\right)$.

(b) Q_α konveks seragam untuk semua dengan, yaitu terdapat fungsi dengan sedemikian sehingga untuk berakibat untuk semua z dengan

$$\left\| z-\frac{x+y}{2}\right\| \le \phi\left(\|x-y\|\right).$$

(c) H berdimensi hingga.

(d) $\Im=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\}$ berhingga, dan semua Q_α memenuhi

$$Q_\alpha=\left\{x \middle| \langle c_i,x\rangle\le\beta_i\right\}.$$

Maka, untuk sembarang nilai awal x^0, barisan *alternating projection* $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergen ke sebuah titik $x^*\in Q=\bigcap_{\alpha\in A} Q_\alpha$.

Untuk membuktikan Teorema 1 diatas, terlebih dahulu dipaparkan lemma-lemma berikut yang akan digunakan dalam pembuktian.[6]

Lemma 1 Diberikan titik $x\in H$ dengan proyeksi x pada himpunan Q dinotasikan dengan $P(x)$, maka vektor $x-P(x)$ memenuhi

[6] *ibid*, p.3.

$$\langle x-P(x), y-P(x)\rangle \leq 0, \tag{6}$$

untuk semua $y \in Q$.

Lemma 2 Diberikan titik $x, y \in H$ dengan proyeksi x dan y pada himpunan Q berturut-turut dinotasikan dengan $P(x)$ dan $P(y)$. Maka, operator proyeksi P memenuhi

$$\|P(x)-P(y)\| \leq \|x-y\|. \tag{7}$$

Lemma 3 Diberikan barisan *alternating projection* $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$, dengan

$$x^{n+1} = x^n + \lambda_n\left(P_{\alpha(n)}\left(x^n\right)-x^n\right), \qquad 0 \leq \lambda_n \leq 2.$$

Untuk sembarang pemilihan $\alpha(n)$, untuk setiap titik kekonvergenan $x \in Q = \bigcap_{\alpha \in A} Q_\alpha$, dan untuk semua n berlaku

$$\left\|x^{n+1}-x\right\| \leq \left\|x^n - x\right\|. \tag{8}$$

Lemma 4 Diberikan barisan *alternating projection* $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ dengan $x^{n+1} = x^n + \lambda_n\left(P_{\alpha(n)}\left(x^n\right)-x^n\right),\ 0 \leq \lambda_n \leq 2 \quad \alpha(n) = \alpha_{n(\mathrm{mod}\, m)+1}$ dan $0 \leq \varepsilon_1 \leq \lambda_n \leq 2-\varepsilon_2$, dengan $\varepsilon_2 > 0$. Maka, berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \Phi\left(x^n\right) = 0 \text{ dengan } \Phi\left(x^n\right) = \sup_{\alpha \in A} \rho\left(x^n, Q_\alpha\right). \tag{9}$$

Lemma 5 Jika syarat-syarat (a) – (d) dalam Teorema 1 dipenuhi, maka untuk suatu barisan terbatas $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ yang memenuhi Lemma 4, kondisi berikut dipenuhi

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x^n, Q\right) = 0. \tag{10}$$

Lemma 6 Untuk suatu himpunan tutup dan konveks Q dan x^n untuk suatu x^n yang memenuhi (7) dan (9), x^n konvergen ke $x^* \in Q$.

Bukti Teorema 1

Berdasarkan Lemma 4, dengan asumsi kondisi (4) dipenuhi, maka metode *alternating projection* memenuhi

$$\lim_{n\to\infty} \Phi\left(x^n\right)=0, \quad \text{dengan } \Phi\left(x^n\right)=\sup_{\alpha\in A}\rho\left(x^n,Q_\alpha\right). \tag{11}$$

Dan berdasarkan Lemma 5, karena kondisi (a) – (d) dipenuhi, maka untuk sembarang barisan terbatas yang memenuhi (11) berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x^n,Q\right)=0. \tag{12}$$

Selanjutnya berdasarkan Lemma 3, maka dalam metode *alternating projection* untuk suatu pemilihan dan untuk setiap titik kekonvergenan $x\in Q=\bigcap_{\alpha\in A} Q_\alpha$ serta untuk semua *n* dipenuhi

$$\left\|x^{n+1}-x\right\|\le\left\|x^n-x\right\|. \tag{13}$$

Maka, dari (11), (12), (13) dan berdasarkan Lemma 6, x^n konvergen ke $x\in Q$.

D. Kekonvergenan Barisan *Alternating Projection* pada Himpunan yang Tak Semuanya Konveks

Pada bagian ini metode *alternating projection* akan diperumum agar dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan menentukan titik yang berada pada irisan beberapa himpunan yang tidak semuanya konveks.

1. Pemetaan *Set-Valued* dan Pemetaan Proyeksi Siklik

Untuk memulai pembahasan pada bagian ini, berikut diberikan beberapa definisi himpunan yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.[7]

[7] Bourbaki, N, *Elemens de MatematiqueTopological Generale*, (Paris: Hermann Press, 1974), p.34

Definisi 1. Diberikan ruang Hilbert $(H, \| \|)$, $Q \subset H$ tak kosong.

a. Himpunan Q dikatakan *proximinal* jika setiap titik di H mempunyai paling sedikit satu proyeksi pada Q.
b. Himpunan Q dikatakan himpunan Chebyshev jika setiap titik di H mempunyai tepat satu proyeksi di Q.
c. Himpunan Q dikatakan kompak terbatas (*boundedly compact*) jika irisannya dengan sembarang bola tertutup adalah kompak.
d. Himpunan Q dikatakan *approximately compact* jika untuk setiap $x \in H$ dan setiap barisan $\{y^n\}_{n\geq 0}$ dari titik-titik di Q sedemikian sehingga $\{\|x - y^n\|\}_{n\geq 0}$ konvergen ke $P_Q(x)$, memiliki subbarisan yang konvergen ke sebuah titik di Q.

Selanjutnya akan didefinisikan pemetaan *set-valued* dan pemetaan proyeksi siklik yang mempunyai peran besar dalam pembahasan ini.[8]

Definisi 2. Diberikan H_1 dan H_2 ruang Hilbert. Kelas dari sub himpunan tak kosong tutup dari H_i dinotasikan dengan 2^{H_i}. Pemetaan *set-valued* dari H_1 ke 2^{H_2} adalah fungsi T yang mengawankan setiap titik $x \in H_1$ dengan himpunan $T(x)$ di 2^{H_2}.

Definisi 3. Pemetaan *set-valued* T dikatakan *upper semicontinous* pada titik x^0 di H_1 jika untuk setiap lingkungan buka V dari $T(x^0)$ terdapat lingkungan buka U dari sedemikian sehingga $T(x) \subset V$ untuk semua $x \in U$.
Pemetaan *set-valued* T dikatakan *upper semicontinous* jika T *upper semicontinous* pada setiap $x \in H_1$.

Jika T *upper semicontinous* maka himpunan $\{(x, y) \in H_1 \times H_2 \mid y \in T(x)\}$

[8] Combettes, P.L., H.J. Trussell., "Method of Successive Projections for Finding a Common Point of Sets in Metric Spaces", dalam *Journal of Optimization Theory and Applications 67*, 1990,p.487-507.

adalah tutup pada ruang hasil kali ruang Hilbert $H_1 \times H_2$.

Definisi 4.

a. Operator proyeksi pada himpunan Chebyshev $Q \subset H$ adalah fungsi π_Q dari H ke Q yang memetakan semua titik x ke hasil proyeksi tunggal di Q.

b. Operator proyeksi pada himpunan *proximinal* $Q \subset H$ adalah pemetaan *set-valued* Π_Q yang didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \Pi_Q : X &\rightarrow 2^Q \\ x &\mapsto \left\{ y \in Q \middle| y = P_Q(x) \right\} \end{aligned} \tag{14}$$

Pemetaan proyeksi akan memenuhi sifat *upper semicontinous* jika memenuhi lemma berikut ini.[9]

Lemma 7. Pemetaan Proyeksi pada sub himpunan *approximately compact* yang tak kosong $Q \subset H$ adalah *upper semicontinous* dari H ke 2^Q.

Definisi 5. Diberikan $\Gamma = \{Q_1, ..., Q_m\}$ koleksi terurut dari himpunan *proximinal* di ruang Hilbert H. Untuk semua $i \in \{1, ..., m\}$, didefinisikan Π_i adalah pemetaan proyeksi pada yang didefinisikan sebagai pemetaan *set-valued* dari H ke 2^H. Maka, pemetaan komposisi $\Pi = \Pi_1 \circ ... \circ \Pi_m$ disebut pemetaan proyeksi siklik dari Γ.

Teorema 2. Pemetaan proyeksi siklik dari sembarang koleksi terurut yang berhingga dari himpunan *approximately compact* yang tak kosong dalam ruang Hilbert H adalah pemetaan yang *upper semicontinous* dari H ke 2^H.

Bukti :

Hal ini berdasarkan pada hasil yang diperoleh pada lemma 7 dan fakta bahwa jika Π_1 pemetaan *set-valued* yang *upper semicontinous* dari H_1 ke

[9] Singer I, "Some Remarks on Approximative Compactness', dalam *Revue Roumanie de Mathematiques Pures et Appliquees 9*, 1964,p. 167-177.

2^{H_2} dan pemetaan *set-valued* yang *upper semicontinous* dari H_2 ke 2^{H_3}, maka pemetaan komposisi dari Π_1 dan Π_2 yaitu $\Pi = \Pi_1 \circ \Pi_2$ juga pemetaan *set-valued* yang *upper semicontinous* dari ke 2^{H_3}.

2. Kekonvergenan Lokal Barisan *Alternating Projection*

Setelah didefinisikan pemetaan *set-valued* dan pemetaan proyeksi siklik pada bagian sebelumnya, pada bagian ini metode *alternating projection* akan diperluas dengan berbasiskan dua pemetaan tersebut.

Definisi 6. Diberikan Π pemetaan proyeksi siklik dari koleksi terurut himpunan *proximately* $\Gamma = \{Q_1, ..., Q_m\}$ di ruang Hilbert *H*. Maka, untuk setiap titik $x^0 \in H$ barisan *alternating projection* (relatif terhadap Γ dan x^0) adalah barisan $\{x^n\}_{n \geq 0}$ dengan $x^{n+1} \in \Pi(x^n)$ untuk semua $n \in N$.

Dengan kata lain, untuk y^m proyeksi dari x^0 pada Q_m, maka y^{m-1} adalah proyeksi dari y^m pada Q_{m-1}, dan seterusnya dan proyeksi dari y^2 pada Q_1 adalah x^1.

Selanjutnya teorema berikut ini mempunyai posisi yang cukup penting untuk mengawali bahasan kekonvergenan barisan *alternating projection* pada himpunan yang *approximately compact.*[10]

Teorema 3

Diberikan Π pemetaan proyeksi siklik dari koleksi terurut yang berhingga dari himpunan *approximately compact* yang tak kosong pada ruang Hilbert *H*. Maka, jika suatu barisan *alternating projection* konvergen maka barisan tersebut konvergen ke sebuah titik dari Π.

[10] Combettes, P.L., H.J. Trussell., "Method of Successive Projections for Finding a Common Point of Sets in Metric Spaces", dalam *Journal of Optimization Theory and Applications 67*, 1990, p.493.

Bukti :

Misalkan $\{x^n\}_{n\geq 0}$ adalah barisan *alternating projection* yang konvergen ke titik x. Maka, $\{x^{n+1}\}_{n\geq 0}$ juga konvergen ke x dan $x^{n+1} \in \Pi(x^n)$, $\forall n \in \mathrm{N}$. Sehingga menurut teorema 2 pemetaan adalah pemetaan yang *upper semicontinous* yang berakibat $x \in \Pi(x)$.

Namun demikian teorema diatas tidaklah menjamin bahwa limit dari kekonvergenan barisan *alternating projection* adalah titik solusi yang diinginkan, yaitu titik yang berada pada irisan himpunan *approximately compact* pada teorema diatas.

Definisi 7. Diberikan $\Gamma = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$ koleksi terurut himpunan *proximinal* di ruang Hilbert H dengan $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ tak kosong. Misalkan Π adalah pemetaan proyeksi siklik dari Γ dan Y adalah himpunan titik-titik di $Q_1 - Q$ sedemikian sehingga langkah iterasi dimungkinkan gagal utuk mereduksi $P_Q(x)$, yaitu

$$Y = \left\{ x \in Q_1 - Q \,\middle|\, \exists x^{'} \in \Pi(x) \ni P_Q(x^{'}) \geq P_Q(x) \right\}. \tag{15}$$

Radius atraksi dari Γ didefinisikan sebagai

$$\delta = \begin{cases} \inf\{P_Q(x) | x \in Y\} & \text{jika} Y \neq \varnothing \\ +\infty & \text{untuk yang lain} \end{cases} \tag{16}$$

Region atraksi dari Γ didefinisikan sebagai

$$R = Q \cup \left\{ x \in Q_1 \,\middle|\, P_Q(x) < \delta \right\} \tag{17}$$

Dari definisi diatas, diperoleh dua akibat berikut :

a. $P_Q(x') < P_Q(x), \quad \forall x \in R - Q, \quad \forall x' \in \Pi(x)$ (18)

b. $\Pi(x) \subset R, \quad \forall x \in R$ (19)

Berdasarkan asumsi yang dimiliki oleh himpunan , dapat disimpulkan bahwa radius atraksi berada pada interval .

Definisi 8. Diberikan $\Gamma = \{Q_1, ..., Q_m\}$ koleksi terurut dari himpunan *proximinal* di ruang Hilbert H dengan $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ tak kosong. Misalkan R adalah region atraksi dari Γ dan Π adalah pemetaan proyeksi siklik dari Γ. Titik $x^0 \in H$ disebut titik atraksi dari Γ jika untuk setiap barisan *alternating projection* $\{x^n\}_{n\geq 0}$ terdapat bilangan bulat nonnegatif v sedemikian sehingga $x^v \in R$. Bilangan bulat nonnegatif terkecil v yang memenuhi hal diatas disebut indeks atraksi dari barisan *alternating projection* yang berkaitan.

Berdasarkan definisi 8, ketaksamaan (18) dan (19) didapat jika x^0 titik atraksi dan $\{x^n\}_{n\geq 0}$ adalah barisan *alternating projection* dengan indeks atraksi v, maka barisan $\{P_Q(x)\}_{n\geq v}$ adalah barisan tak naik dan

$$x^{v+n} \in \{x \in Q_1 \,|P_Q(x) \leq |P_Q(x^v)\} \subset R, \forall n \in N \qquad (20)$$

Dengan kata lain, ekor dari setiap barisan *alternating projection* yang dimulai dari titik atraksi terletak pada region atraksi. Lebih lanjut, dari (18) berakibat bahwa semua titik tetap dari di R menjadi himpunan solusi. Jadi, jika semua himpunan adalah himpunan *approximately compact* dalam definisi 8, limit dari setiap barisan *alternating projection* yang konvergen yang dimulai dari titik atraksi adalah titik solusi menurut teorema 2. Berdasarkan fakta diatas, maka sampailah kita pada teorema utama dalam makalah ini yang disajikan sebagai berikut.[11]

[11] *Ibid*, p. 496.

Teorema 4. Diberikan $\Gamma = \{Q_1, ..., Q_m\}$ koleksi terurut dari himpunan *approximately compact* di ruang Hilbert H dengan $Q = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i$ tak kosong dan terbatas dan kompak terbatas. Misalkan adalah titik atraksi dari , sembarang barisan *alternating projection.* Maka, konvergen ke sebuah titik di Q.

Bukti :

Misalkan $\Pi = \Pi_1 \circ ... \circ \Pi_m$ adalah pemetaan proyeksi siklik dari Γ dan misalkan R adalah region atraksi dari Γ. Karena x^0 adalah titik attraksi dari Γ, maka barisan *alternating projection* $\{x^n\}_{n\geq 0}$ memiliki indeks atraksi v. Berdasarkan (20) barisan $\{x^n\}_{n\geq v}$ terletak pada himpunan

$$A = \left\{x \in Q_1 \middle| P_Q(x) \leq P_Q(x^v)\right\} \tag{21}$$

yang merupakan himpunan kompak. Sehingga barisan $\{x^n\}_{n\geq 0}$ memuat titik limit y. Karena P_Q kontinu, maka $P_Q(y)$ merupakan titik limit dari barisan $\{P_Q(x^n)\}_{n\geq 0}$. Kemudian dikarenakan barisan $\{P_Q(x^n)\}_{n\geq v}$ adalah barisan tak naik dan terbatas maka $\{P_Q(x^n)\}_{n\geq v}$ harus konvergen ke $P_Q(y)$. Lebih lanjut

$$P_Q(x^{v+n}) \geq P_Q(y), \qquad \forall n \in N \tag{22}$$

Selanjutnya, andaikan $y \notin Q$, maka karena $y \in A \subset R$ berakibat

$$P_Q(y') < P_Q(y), \quad \forall y' \in \Pi(y) \tag{23}$$

Diberikan lingkungan buka dari $\Pi(y)$

$$V = \left\{z \in H \middle| P_Q(z) < \middle| P_Q(y)\right\} \tag{24}$$

Berdasarkan lemma 7. pemetaan Π adalah pemetaan yang *upper semicontinous*, sehingga terdapat lingkungan buka U dari y sedemikian sehingga $\Pi(x) \subset V$, $\forall x \in U$. Karena y titik limit dari barisan $\{x^n\}_{n \geq v}$ maka terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $x^{v+n-1} \in U$. Dengan demikian maka titik hasil proyeksi setelah x^{v+n-1} yaitu x^{v+n} pada barisan *alternating projection* terdapat dalam $\Pi\left(x^{v+n-1}\right)$, yang berarti terdapat dalam V. Sehingga $P_Q\left(x^{v+n}\right) < P_Q(y)$ yang kontradiksi dengan (24). Oleh karena itu haruslah $y \in Q$. Jadi $\left\{P_Q\left(x^n\right)\right\}_{n \geq 0}$ konvergen ke nol dan $Q \neq \varnothing$.

Selanjutnya misalkan n bilangan asli tertentu sedemikian sehingga $y^0 = x^n$. Untuk setiap $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, didefinisikan y^{j+1} adalah proyeksi dari y^j pada Q_{m-j}, dengan Q_{m-j} dipilih berdasarkan proses untuk mendapatkan x^{n+1}. Maka, $x^{n+1} = y^m$. Karena Q adalah himpunan kompak terbatas dan juga merupakan himpunan bagian dari Q_1 yang tutup, maka terdapat titik $z \in Q$ yang merupakan proyeksi dari y^0 pada Q. Karena $z \in Q_{m-j}$ didapat

$$\left\|y^{j+1} - y^j\right\| = \inf\left\{\left\|y^j - y\right\| \middle| y \in Q_{m-j}\right\} \leq \left\|y^j - z\right\|, \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\}. \quad (25)$$

Misalkan $a = \left\|y^0 - z\right\|$, dengan induksi matematika dapat dibuktikan bahwa

$$\left\|y^j - z\right\| \leq 2^j a, \quad \forall j \in \{0, \ldots, m-1\}. \quad (26)$$

Berdasarkan (25) dan (26) didapat

$$\left\|x^{n+1} - x^n\right\| \leq \sum_{j=0}^{m-1}\left\|y^{j+1} - y^j\right\| \leq \sum_{j=0}^{m-1}\left\|y^j - z\right\| \leq \sum_{j=0}^{m-1} 2^j a = \left(2^m - 1\right)a, \quad (27)$$

sehingga $a = P_Q\left(x^n\right)$. Dengan demikian maka

$$\left\|x^{n+1} - x^n\right\| \leq \left(2^m - 1\right) P_Q\left(x^n\right), \quad \forall n \in N \tag{28}$$

Karena $\left\{P_Q\left(x^n\right)\right\}_{n\geq 0}$ konvergen ke nol, maka $\left\{\left\|x^{n+1} - x^n\right\|\right\}_{n\geq 0}$ juga konvergen ke nol. Sehingga $\left\{x^n\right\}_{n\geq 0}$ konvergen ke titik di himpunan Q.

Berdasarkan teorema 4 diatas, terlihat bahwa kekonvergenan barisan *alternating projection* pada koleksi himpunan yang tidak semuanya konveks bersifat lokal. Dengan demikian maka agar konvergen ke titik solusi yang diinginkan, nilai awal dari barisan *alternating projection* harus diambil pada region atraksi Γ.

E. Penutup

Dalam tulisan ini telah dikaji sebuah metode untuk mendapatkan titik yang berada pada irisan himpunan yang tutup yang tidak harus konveks, yaitu dengan melakukan proyeksi berturut-turut pada masing-masing himpunan tersebut. Metode ini dikembangkan dari metode *alternating projection* yang hanya berlaku pada koleksi himpunan konveks. Barisan *alternating projection* pada metode perluasan ini dibentuk berdasarkan pemetaan *set-valued* pada masing-masing himpunan. Telah ditunjukkan bahwa jika nilai awal dari barisan *alternating projection* diambil dari suatu titik yang berada pada region atraksi himpunan , maka barisan tersebut akan konvergen ke sebuah titik pada irisan himpunan-himpunan tersebut. Sehingga kekonvergenan yang dihasilkan dengan metode ini adalah kekonvergenan yang bersifat lokal. Namun demikian, dikarenakan metode ini mendasarkan pada proyeksi yang berturut-turut pada tiap himpunan, maka untuk beberapa bentuk himpunan metode ini akan menghasilkan kekonvergenannya yang lambat jika dibandingkan dengan metode yang lain. Sehingga pengembangan metode yang lebih efektif dan yang menghasilkan kekonvergenan yang lebih cepat menjadi permasalahan yang masih harus dikaji lebih lanjut. Masalah mempercepat kekonvergenan barisan *alternating projection* dapat dilakukan dengan cara membuat rumusan proyeksi barisan *alternating projection* yang mempercepat kekonvergenan ke irisan dari himpunan-himpunan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Bourbaki, N, *Elemens de Matematique Topological Generale*, Paris: Hermann Press, 1974.

Boyd, S., J. Dattorro., *Alternating Projections*, Autumn: Stanford University Press, 2003.

Combettes, P.L., H.J. Trussell., "Method of Successive Projections for Finding a Common Point of Sets in Metric Spaces", dalam *Journal of Optimization Theory and Applications 67*, 1990:487-507.

Grigoriadis, K.M., R.E Skelton, "Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods", dalam *Automatica 32*, 1995:1117-1125.

Gubin., L.G, B.T. Polyak., E.V. Raik., "The Method of Projections for Finding The Common Point of Convex Sets", dalam *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 145*, 1966:1-24.

Musthofa, M.W, *Reduksi Orde Model Sistem Linear Parameter Varying Melalui Linear Matrix Inequalities*, Tesis Institut Teknologi Bandung, 2007.

Singer I, *"Some Remarks on Approximative Compactness"*, dalam *Revue Roumanie de Mathematiques Pures et Appliquees 9*, 1964:167-177.

Skelton, R.E., T. Iwasaki, K.M. Grigoriadis., *A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design*, Paris:Taylor and Francis Press, 1998.

Wu, F., "Induced -norm Model Reduction of Polytopic Uncertain Linear Systems", dalam *Automatica 32*,1996:1417-1426.