METODE TRANSFORMASI LAPLACE MATRIKS

DAN PENERAPANNYA PADA SISTEM PEGAS MASSA

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

Disusun Oleh :

Syamsul Arifin

07610002

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2013

METODE TRANSFORMASI LAPLACE MATRIKS

DAN PENERAPANNYA PADA SISTEM PEGAS MASSA

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

Disusun Oleh :

Syamsul Arifin

07610002

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2013

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal :

Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Syamsul Arifin
NIM	: 07610002
Judul Skripsi	: Metode Transformasi Laplace Matriks dan Penerapannya pada Sistem Pegas Massa

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam keilmuan Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 5 Februari 2013
Pembimbing I

M. Wakhid Musthofa, M.Si.
NIP. 19800402 200501 1 003

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal :
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Syamsul Arifin
NIM	: 07610002
Judul Skripsi	: Metode Transformasi Laplace Matriks dan Penerapannya pada Sistem Pegas Massa

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam keilmuan Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 5 April 2013
Pembimbing II

Sugiyanto, S.T., M.Si.
NIP. 19800505 200801 1 028

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1381/2013

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul	:	Metode Transformasi Laplace Matriks dan Penerapannya pada Sistem Pegas Massa
Yang dipersiapkan dan disusun oleh	:	
Nama	:	Syamsul Arifin
NIM	:	07610002
Telah dimunaqasyahkan pada	:	08 Mei 2013
Nilai Munaqasyah	:	A-

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji I

Noor Saif Muh. Mussafi, M.Sc
NIP.19820617 200912 1 005

Penguji II

Sugiyanto, M.Si
NIP.19800505 200801 1 028

Yogyakarta, 16 Mei 2013
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN
YOGYAKARTA
UIN SUNAN KALIJAGA

Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

Nama : Syamsul Arifin

NIM : 07610002

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul :

Metode Transformasi Laplace Matriks dan Penerapannya pada Sistem Pegas Massa

merupakan hasil penelitian saya sendiri dan bukan duplikasi ataupun saduran dari karya orang lain kecuali bagian secara tertulis yang diacu dalam naskah ini dan diacu dalam daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terdapat penyimpangan dalam karya ini, maka tanggung jawab sepenuhnya ada pada penulis.

Yogyakarta, 15 April 2013

Penulis,

Syamsul Arifin
07610002

KATA PENGANTAR

السّلام عليكم ورحمة الله وبركاته

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT atas nikmat dan karunia-Nya sehingga akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tanpa halangan yang berarti. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah memberikan teladan yang baik lagi mulia bagi hambanya. Semoga esok kita mendapatkan syafaatnya di Hari Akhir.

Penelitian ini membahas tentang metode Transformasi Laplace Matriks untuk menyelesaikan sistem pegas massa. Semoga dengan adanya penelitian ini, dapat memberikan wawasan bagi pembaca pada umumnya, dan peneliti lain pada khususnya, dalam menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linier.

Selanjutnya, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan dalam penyelesaian tugas akhir ini, baik secara moral maupun material . Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak M. Abrori, M. Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak M. Wakhid Musthofa, M. Si., selaku dosen pembimbing akademik mahasiswa program studi matematika angkatan 2007 sekaligus pembimbing I,

yang senantiasa mendengarkan keluhan saat penelitian dan memberikan solusi penyelesaian kepada penulis sehingga penyusunan skripsi ini berjalan dengan baik.

4. Bapak Sugiyanto, ST., M.Si., selaku pembimbing II yang memberikan arahan, saran, dan bimbingan kepada penulis sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
5. Bapak Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, yang telah dengan ikhlas memberikan ilmu pengetahuan dan pengalaman berharga kepada penulis sehingga ilmu yang telah didapatkan dapat memudahkan dalam menyusun skripsi ini dan semoga menjadi amal jariyah beliau semua.
6. Segenap karyawan di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membantu dan memberikan berbagai fasilitasnya untuk memudahkan mahasiswa, khususnya penulis.
7. Pengasuh Pondok Pesantren Wahid Hasyim, K.H. Drs. Jalal Suyuti, S.H., atas kesediaan beliau menerima saya sebagai santri, atas ilmu-ilmu dan hikmah yang beliau berikan. Semoga dapat bermanfaat di masyarakat nanti. *Jazahullahu Ahsanal Jaza'*.
8. Ustadz-ustadz di Madin dan Ma'had 'Aly antara tahun 2007-2011 : pak Syatibi, pak Basith, pak Imam Khumaidi, pak Ihsan, pak Nashir, pak Be-I, pak Mukhtar, pak Rahmat, pak Mughits, pak Hadziq, pak Faiz, pak Tri Widodo, pak Aqib, pak Ismail dan lainnya.

9. Teman-teman santri P.P. Wahid Hasyim Yogyakarta, terutama teman-teman eL-SiP *Washilatussa'adah*, dewan guru dan staf MI, MTs dan MA Wahid Hasyim, serta pengurus Madin dan Ma'had 'Aly.
10. Teman-teman Prodi Matematika angkatan 2007 yang telah memberikan motivasi, diskusi dan pengalaman yang sangat berguna dan berharga.
11. Kedua Orang tua penulis, Bapak Sungkono dan Ibu Parini, serta adik tersayang, Masfuatin, atas kasih sayang yang tak terbilang, atas do'a dan harapan yang memberikan suntikan *ghirah* dan motivasi kepada penulis.
12. Semua pihak yang memberikan dukungan dan do'a kepada penulis, serta pihak yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT menerima amal kebaikan beliau semua dan memberikan balasan pahala atas kebaikan dan segala yang telah beliau semua berikan kepada penulis dan semoga dapat menjadi pemberat amal kebaikan di akhir kelak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Maka, penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun demi kebaikan dan kesempurnaan skripsi ini. Semoga apa yang ada dalam skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

والسّلام عليكم ورحمة الله وبركاته

Yogyakarta, 15 April 2013

Penulis

MOTTO

الَّذِى عَلَّمَ بِالْقَلَمِ (٤) عَلَّمَ الْاِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ (٥)

“ (Dia-lah) yang mengajar (manusia) dengan perantaraan kalam. Dia mengajarkan kepada manusia apa yang tidak diketahuinya”.(Q.S. Al-Alaq : 4-5)

هو الذي جعل الشمس ضياء والقمر نورا وقدّره منازل لتعلموا عدد السنين والحساب

“Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu)”. (Q.S. Yunus : 5)

إذا ضاق الأمر اتّسع وإذا اتّسع الأمر ضاق

“Jika urusan sempit, maka (akan menjadi) luas (penyelesaiannya), dan jika urusan luas, maka (akan menjadi) sempit (penyelesaiannya)”

(Kaidah Fikih)

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ARTI SIMBOL

$=$	: sama dengan
$\neq$	: tidak sama dengan
$<$	: lebih kecil dari
$>$	: lebih besar dari
$\leq$	: lebih kecil sama dengan
$\geq$	: lebih besar sama dengan
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
$\in$	: anggota himpunan
ε	: epsilon
δ	: delta
∞	: takhingga
$\lvert x \rvert$	: harga mutlak untuk x
$f(x)$	: suatu fungsi f dengan domain x
$\lim_{x \to c} f(x)$	: limit fungsi x mendekati c dari $f(x)$
$\lim_{x \to c^-} f(x)$	: limit fungsi $f(x)$ didekati dari kiri (limit kiri)
$\lim_{x \to c^+} f(x)$	: limit fungsi $f(x)$ didekati dari kanan (limit kanan)
Δx	: perubahan nilai x
$\frac{d}{dx} f(x)$	: turunan pertama fungsi $f(x)$ terhadap x
$f'(x)$	: turunan pertama fungsi $f(x)$ terhadap x
$f''(x)$	: turunan kedua fungsi $f(x)$ terhadap x
D_x	: operator diferensial terhadap x
I	: interval

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$	: fungsi x pertama, kedua sampai ke n dengan domain t
$\boldsymbol{X}$	: vektor kolom dari $x_1, x_2, \dots, x_n$
$\boldsymbol{X}''$	: turunan kedua dari vektor kolom $\boldsymbol{X}$
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$	: vektor kolom dari $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$
$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$	: matriks fungsi-fungsi ukuran $n \times n$ dengan domain t
$\boldsymbol{A}$	: matriks ukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya konstanta
λ	: lamda, nilai eigen, nilai karakteristik
$\boldsymbol{K}$	: vektor (kolom) eigen
$\int f(x)$	: integral taktentu $f(x)$ terhadap x
$\int_a^b f(x)$	: integral tentu $f(x)$ dari a ke b
$\mathcal{L}\{f(x)\}$	: Transformasi Laplace dari $f(x)$
$F(s)$	: Transformasi Laplace domain s
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	: Invers Transformasi Laplace
$\hat{x}$	: Transformasi Laplace dari x pada Metode Transformasi Laplace Matriks
$\widehat{\boldsymbol{X}}$	: vektor kolom Transformasi Laplace Matriks $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$
$\widehat{\boldsymbol{F}}$	: vektor kolom Transformasi Laplace Matriks $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_n$.

METODE TRANSFORMASI LAPLACE MATRIKS DAN PENERAPANNYA PADA SISTEM PEGAS MASSA

INTISARI

SYAMSUL ARIFIN
NIM. 07610002

Ada beberapa metode untuk menyelesaikan masalah nilai awal sistem persamaan diferensial linear homogen orde dua koefisien konstan. Diantaranya adalah metode eliminasi dan metode matriks. Sedangkan untuk sistem nonhomogen, ditambah metode koefisien tak tentu dan metode variasi parameter, yang tentunya menempuh proses yang cukup panjang dan rumit. Namun demikian, ada metode alternatif untuk menyelesaikan masalah nilai awal dari sistem menggunakan aturan-aturan aljabar yang cukup mudah. Metode tersebut adalah Metode Transformasi Laplace Matriks.

Penelitian ini bertujuan menjelaskan Metode Transformasi Laplace Matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial orde dua koefisien konstan berbentuk

$$\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) \qquad (1)$$

dimana $\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t})$ adalah turunan kedua dari $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ adalah vektor kolom dari $x_1(t)$, $x_2(t)$,…,$x_n(t)$. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ adalah matriks $n \times n$. Entri-entri dari matriks tersebut semuanya konstanta. Jika $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$ semua entrinya sama dengan nol, maka (1) dikatakan homogen. Jika tidak, maka disebut nonhomogen. Selanjutnya, jika nilai dari $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ dan $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t})$ pada saat awal diketahui atau $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X_0}$ dan $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X'_0}$, maka (1) merupakan masalah nilai awal dari sistem linear orde dua.

Hasil dari penelitian ini adalah didapatkannya solusi sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks berbentuk

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0})\right)\right\}.$$

Selanjutnya, metode tersebut digunakan untuk menyelesaikan sistem pegas massa, yakni sistem pegas massa gerak bebas tanpa redaman *(Undamped free motion)*, gerak bebas dengan redaman *(Free motion with damped)*, dan juga gerak paksa *(Forced motion)*.

Kata kunci : Metode Transformasi Laplace Matriks, masalah nilai awal, sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan, sistem pegas massa.

MATRIX LAPLACE TRANSFORM METHOD
AND IT APPLICATIONS ON SPRING-MASS SYSTEMS

ABSTRACT

SYAMSUL ARIFIN
NIM. 07610002

There are several methods to solve an initial value problem of second-order homogenous linear systems of differential equations with constant coefficients. That are elimination method and matrix method. Whereas to solve nonhomogenous systems, used undetermined coefficient method and variation of parameter method, that through some difficulties and complex procceses. But then, there is an alternative method to solve it. It is Matrix Laplace Transform Method.

The goals of the research are to explain Matrix Laplace Transform Method and use it to solve initial value problems of second-order homogenous linear systems of differential equations with constant coefficients that form

$$\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{t}) \qquad (1)$$

where $\boldsymbol{X}''(\boldsymbol{t})$ is second derivative from $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$. $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ is column vector from $x_1(t)$, $x_2(t)$,…,$x_n(t)$. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ is $n \times n$ matrices form. All of matrix entries are constant. If all entries of $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})$ equal zero, then (1) said homogenous. If not, it is called nonhomogenous. Hence, if value of $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})$ and $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t})$ as initial conditions are known, or $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X_0}$ and $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X'_0}$, then (1) is an initial value problem of second-order linear systems.

The result of the research is be obtained solutions of second-order linear systems of differential equations with constant coefficients use Matrix Laplace Transform Method is

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0})\right)\right\}.$$

Then, appliying this method to solve initial value problems on spring-mass systems. That are *undamped free motion* of spring-mass systems*, free motion with damped* and *forced motion* of spring-mass systems.

Keyword : Matrix Laplace Transform Method, initial value problems, second-order systems of linear differential equations with constant coefficients, spring-mass systems.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari, terdapat banyak sekali permasalahan yang melibatkan matematika, baik dalam bidang ekonomi, sosial, politik maupun masalah yang berkaitan langsung dengan ilmu eksakta semisal fisika, kimia, *engineering* dan yang lainnya. Objek (masalah) tersebut diidentifikasi, dirumuskan dan dimodelkan untuk kemudian dicari solusinya. Pemodelan yang menggunakan lambang-lambang matematika dan logika untuk menyajikan perilaku objek disebut pemodelan simbolik atau pemodelan matematika.[1]

Pemodelan matematika adalah penyelesaian masalah nyata dengan cara menyederhanakan masalah tersebut dengan menggunakan asumsi-asumsi. Tujuan dari pemodelan matematika adalah untuk memberikan gambaran mengenai keadaan, sifat maupun perilaku objek agar lebih mudah dikenali , dipelajari dan dimanipulasi lebih lanjut.[2]

Adapun langkah-langkah dalam membangun model matematika adalah sebagai berikut.[3]

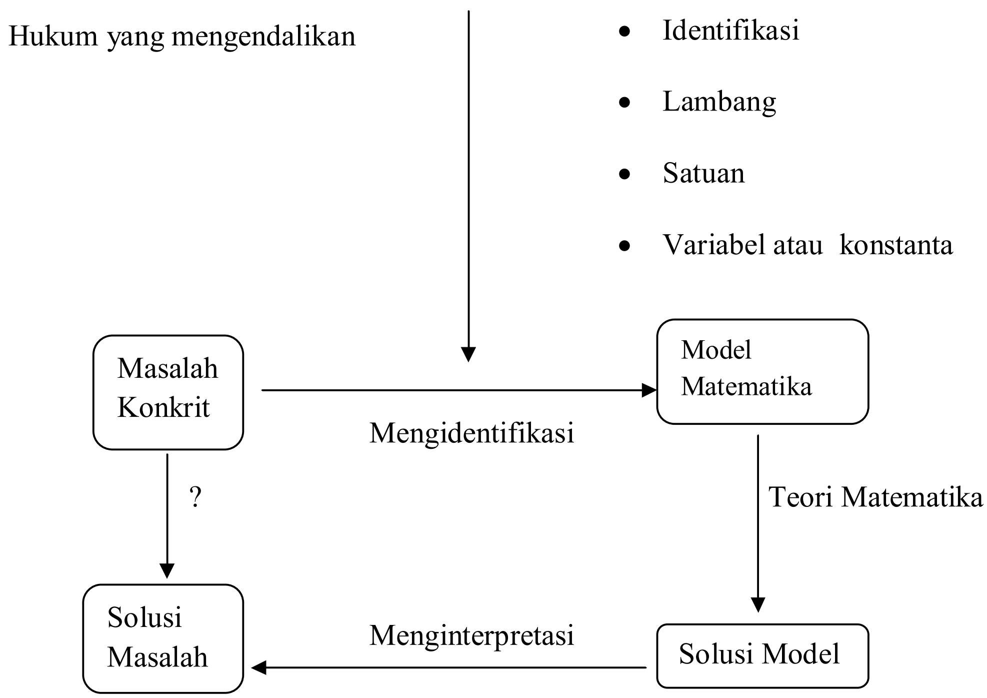
1. Mengidentifikasi semua besaran yang terlibat dalam masalah tersebut.
2. Memberi lambang pada semua besaran.
3. Menentukan satuan untuk semua besaran.
4. Menentukan besaran mana yang merupakan konstanta dan mana yang merupakan variabel.

---

[1] B. Susanta. *Pemodelan Matematis* (Jakarta : Universitas Terbuka, 2008), hlm. 1.6.
[2] *Ibid*, hlm. 1.4.
[3] Woro Raharjanti, Skripsi Jurusan Matematika Universitas Negeri Semarang, 2005.

5. Menentukan hubungan antara variabel dan konstanta sehingga dapat disusun menjadi suatu model matematika.
6. Mencari solusi model berdasarkan teori-teori dalam matematika.
7. Menginterpretasikan solusi model yang memunculkan solusi masalah.

Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1. Langkah-langkah membangun model matematika.

Salah satu model matematika yang banyak digunakan dalam berbagai permasalahan di bidang lain adalah berbentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial dibagi menjadi dua macam, yaitu Persamaan Diferensial Biasa *(Ordinary Differential Equation)* dan Persamaan Diferensial Parsial *(Partial Differential Equation)*. Dalam penelitian ini, penulis membahas yang pertama, yang selanjutnya disebut persamaan diferensial. Salah satu penggunaan persamaan diferensial adalah dalam masalah sistem linear. Dalam ilmu aljabar biasa disebut sebagai Sistem Persamaan Linear (SPL). Dalam menyelesaikan sistem persamaan linear, biasanya dibentuk matriks terlebih dahulu sebelum mencari solusinya . Begitu pula dalam sistem persamaan diferensial linear, dapat digunakan matriks untuk menyelesaikannya.

Metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear maupun menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linear adalah menggunakan metode koefisien tak-tentu, metode variasi parameter, metode eliminasi atau metode operator[4], metode matriks[5], yakni dengan mencari nilai karakteristik *(eigen values)* dan vektor eigen *(eigen vector)*, atau dengan menggunakan matriks eksponensial[6] dan yang lainnya. Dalam tulisan ini penulis akan menjelaskan suatu metode lain untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linear. Metode tersebut adalah Metode Transformasi Laplace Matriks.

Metode Transformasi Laplace Matriks pada dasarnya merupakan metode gabungan antara Metode Transformasi Laplace dengan Metode Matriks. Metode Transformasi Laplace (*Laplace Transform*) merupakan suatu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial linear koefisien konstan dengan cara mengubah domain t dengan domain s

---

[4] Shepley L Ross, *Differential Equations* (New York : John Wiley & Sons, Inc, 1984), p. 270.
[5] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Fourth Edition* (USA : Pearson Adison Wesley, 2004), p. 305.
[6] Dennis G.Zill, Michael R. Cullen. *Differential Equations with Boundary Value Problems* (USA : Brook/Cole Cengage Learning, 2009), p. 334.

menggunakan persamaan aljabar[7] atau menggunakan tabel yang memuat Transformasi Laplace. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh *Pierre Simon Marquas De Laplace* (1749 – 1827), seorang matematikawan Perancis dan seorang guru besar di Paris.[8] Keunggulan Transformasi Laplace adalah bahwa masalah nilai awal persamaan diferensial linear dapat diselesaikan secara langsung tanpa terlebih dahulu menentukan solusi umumnya atau persamaan-persamaan nonhomogen dapat diselesaikan tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan homogennya.[9] Dalam sistem persamaan diferensial linear, Transformasi Laplace dan Inversinya digunakan dengan terlebih dahulu mengubah koefisien-koefisien pada sistem tersebut kedalam bentuk matriks. Oleh karena itu, metode ini disebut Metode Transformasi Laplace Matriks.

Metode Transformasi Laplace Matriks, seperti halnya metode lain dalam menyelesaikan masalah nilai awal, juga dapat diterapkan pada masalah-masalah yang melibatkan sistem persamaan diferensial, terutama di bidang fisika. Dalam tulisan ini, penulis akan menerapkan Metode Transformasi Laplace Matriks untuk mencari solusi pada Sistem Pegas Massa *(Spring-Mass Systems)*.

1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks.

[7] R. Kent Nagle, Edward B. Saff, Arthur David Snider. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Fourth Edition* (USA : Pearson Adison Wesley, 2004), p. 349.
[8] Abdul Halim Fathani. *Ensiklopedi Matematika* (Yogyakarta : Ar-Ruzz Media, 2008), hlm. 432.
[9] Kartono. *Persamaan Diferensial Biasa* (Yogyakarta : Graha Ilmu, 2012), hlm. 80.

2. Menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks untuk mencari solusi pada Sistem Pegas Massa.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah di atas, maka dapat dirumuskan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana menyelesaikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks?
2. Bagaimana penerapan Metode Transformasi Laplace Matriks pada Sistem Pegas Massa?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah :

1. Menjelaskan Metode Transformasi Laplace Matriks dan penggunaannya pada sistem persamaan diferensial linear orde dua koefisien konstan.
2. Menerapkan Metode Transformasi Laplace Matriks pada Sistem Pegas Massa.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penulisan skripsi ini, antara lain :

1. Memberikan wawasan dan pengetahuan mengenai Metode Transfomasi Laplace Matriks.
2. Menambah khasanah ilmu pengetahuan di bidang matematika pada khususnya dan di bidang lain pada umumnya.
3. Mendorong kepada pembaca untuk lebih mengembangkannya dengan menggunakan metode lain dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial

dan menerapkannya pada keilmuan – keilmuan lain yang terkait sehingga dapat berguna bagi perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi.

1.6. Tinjauan Pustaka

Dalam pengerjaan skripsi ini, ada beberapa sumber yang penulis gunakan sebagai bahan acuan, antara lain :

1. Skripsi berjudul *"Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Matriks Orde Dua"* yang ditulis oleh Indri Hapsari tahun 2005, mahasiswi jurusan matematika fakultas MIPA Universitas Gajah Mada Yogyakarta. Skripsi ini menjelaskan persamaan diferensial matriks orde dua ukuran $n \times n$ (matriks bujursangkar) yang diselesaikan dengan pendekatan teori matriks dan pendekatan ruang vektor.
2. Skripsi berjudul *"Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial"* yang ditulis oleh Meyriska Aulia Harini tahun 2005, mahasiswa jurusan matematika fakultas MIPA Universitas Negeri Semarang. Skripsi ini menjelaskan penggunaan Transformasi Laplace pada masalah nilai batas persamaan konduksi panas dimensi satu untuk interval terbatas dan tak terbatas pada kasus parabolik.
3. Skripsi berjudul "*Aplikasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik*" yang ditulis oleh Arifin tahun 2011, mahasiswa jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan kalijaga Yogyakarta. Skripsi ini menjelaskan Transformasi Laplace dan penerapannya pada rangkaian listrik.

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial linear orde dua, kemudian menggunakan metode tersebut untuk menyelesaikan sistem pegas massa.

1.7. Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian kualitatif, yaitu studi literatur. Literatur utama yang penulis gunakan adalah buku yang berjudul *"Fundamental of Differential Equations and Boundary Value Problems"* yang ditulis oleh R. Kent Nagle, Erdward B. Saff dan Arthur David Snider tahun 2004, diterbitkan oleh Pearson Adison Wesley, Amerika Serikat. Di dalam buku tersebut dijelaskan secara singkat mengenai Metode Transformasi Laplace Matriks atau *Matrix Laplace Transform Method* (hlm. 572). Selanjutnya penulis kembangkan dengan menggunakan literatur lain, semisal buku-buku, skripsi atau yang lainnya sebagai bahan penunjang, kemudian menerapkan metode ini pada sistem pegas massa, yang contoh-contohnya diambil dari literatur utama.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

1. Diberikan masalah nilai awal pada sistem persamaan diferensial orde dua koefisien konstan berbentuk matriks

$$\boldsymbol{X}'' = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F} \; ; \qquad \boldsymbol{X}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X_0} \, , \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}} \tag{1}$$

dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Transformasi Laplace Matriks melalui langkah-langkah sebagai berikut :

a. Mengubah sistem (1) ke dalam bentuk Transformasi Laplace

$$\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}''\} = \mathcal{L}\{\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{F}\}.$$

Menggunakan sifat linearitas,

$$\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}''(t)\} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mathcal{L}}\{\boldsymbol{X}\} + \mathcal{L}\{\boldsymbol{F}\}.$$

Menggunakan notasi fungsi Transformasi Laplace Matriks,

$$\mathcal{L}\{\boldsymbol{X}''(t)\} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)$$

Menggunakan sifat derivatif Transformasi Laplace,

$$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - s\boldsymbol{X_0} - \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)$$

dengan $\boldsymbol{X_0}$ dan $\boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$ berturut-turut posisi awal dan kecepatan awal dari massa.

b. Mengelompokkan notasi fungsi Transformasi Laplace Matriks ke sisi kiri persamaan

$s^2\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$. Karena s skalar, maka

$s^2\boldsymbol{I}\widehat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$ atau

$(s^2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\widehat{\boldsymbol{X}} = \widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X}'_{\boldsymbol{0}}$. $\boldsymbol{I}$ adalah matriks identitas.

c. Mencari nilai $\widehat{\boldsymbol{X}}$, yakni dengan mengalikan kedua sisi dengan invers dari $(s^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})$ atau $(s^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$, menjadi

$$\widehat{\boldsymbol{X}} = (s^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X_0} + \boldsymbol{X'_0}\right)$$

d. Menggunakan metode pecahan parsial untuk mendapatkan faktor-faktor penyebut dari determinan $(s^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$.

e. Terakhir, mencari nilai $\boldsymbol{X}$, yakni dengan menentukan Invers Transformasi Laplace dari $\widehat{\boldsymbol{X}}$, didapatkan

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{L}^{-1}\{\widehat{\boldsymbol{X}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s^2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{F}}(s) + s\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) + \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{0})\right)\right\}$$

Menggunakan metode ini, sistem persamaan diferensial linear dapat ditentukan solusi khususnya secara langsung.

2. Diberikan sistem pegas massa berbentuk

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

dengan syarat awal

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ x_2'(t_0) \end{bmatrix}$$

atau bentuk perluasannya (lebih dari dua pegas dan massa), juga dapat diselesaikan dengan rumus di atas, baik pada gerak bebas redam *(damped free motion)*, gerak bebas tak-redam *(undamped free motion)* maupun gerak paksa *(forced motion)*.

5.2 Kritik dan Saran

a. Kritik

✓ Metode ini masih terbatas pada penyelesaian sistem yang memiliki syarat awal

- ✓ Dalam penelitian ini, penggunaan metode masih terbatas pada sistem linear orde dua koefisien konstan
- ✓ Bentuk matriks dari sistem harus berukuran $n \times n$
- ✓ Penyelesaian semakin rumit seiring bertambahnya ukuran matriks
- ✓ Penyelesaian sistem mengalami kendala ketika menemukan determinan matriks sistem yang tidak dapat difaktorkan dengan cara biasa, sehingga harus menggunakan program.

b. Saran

- Peneliti lain dapat lebih mengembangkan terapan dari metode ini, tidak hanya pada sistem pegas massa. Misalnya, digunakan pada rangkaian listrik, tangki terhubung *(interconnected tank)* atau yang lainnya, serta memberi contoh pada sistem yang ukuran matriksnya lebih besar.
- Peneliti lain dapat menggunakan metode lain dalam menyelesaikan sistem sebagai pembanding metode ini (studi komparasi), untuk mengukur efektifitas metode ataupun hanya sekedar perbandingan.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin. 2011. *Aplikasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik*. Yogyakarta : Skripsi Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Boyce, William E. and Richard C. DiPrima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems Seventh Edition*. New York : John Wiley & Sons.

Bronson, Richard dan Gabriel Costa. 2007. *Schaum's Outline Persamaan Diferensial Edisi Ketiga*. Jakarta : Erlangga.

Edward, C. Henry and David E. Penney. 2005. *Differential Equations & Linear Algebra Second Edition*. USA : Pearson Education International.

Fathani, Abdul Halim. 2008. *Ensiklopedi Matematika*. Yogyakarta : Ar-Ruzz Media.

Gazali, Wikaria. 2006. *Kalkulus Lanjut*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Hapsari, Indri. 2005. *Metode Penyelesaian Persamaan Diferensial Matriks Orde Dua*. Yogyakarta : Skripsi Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gajah Mada Yogyakarta.

Harini, Meyriska Aulia. 2005. *Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial*. Semarang : Skripsi Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Semarang.

Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Nagle, R. Kent, Edward B. Saff and Arthur David Snider. 2004. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems Fourth Edition*. United States of America : Pearson Adison Wesley.

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Edisi Kelima, Jilid 1*. Jakarta : Erlangga.

Purcell, Edwin J.,Dale Varberg dan Steven E Rigdon. 2004. *Kalkulus Edisi Kedelapan, Jilid 1*. Jakarta : Erlangga.

Raharjanti, Woro. 2005. *Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill*. Semarang : Skripsi Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Semarang.

Razali, Muhammad. 2008. *Cara mudah menyelesaikan Matematika dengan **Mathematica***. Yogyakarta : Penerbit ANDI.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations Third Edition*. New York : John Wiley & Sons, Inc.

Serway, Raimond A. dan John W. Jewett, Jr. 2009. *Fisika untuk Sains dan Teknik*. Jakarta : Salemba Teknika.

Susanta, B. 2008. *Pemodelan Matematis*. Jakarta : Universitas Terbuka.

Zill, G. Dennis and Michael R. Cullen. 2009. *Differential Equations with Boundary Value Problems*. USA : Brook/Cole Cengage Learning.

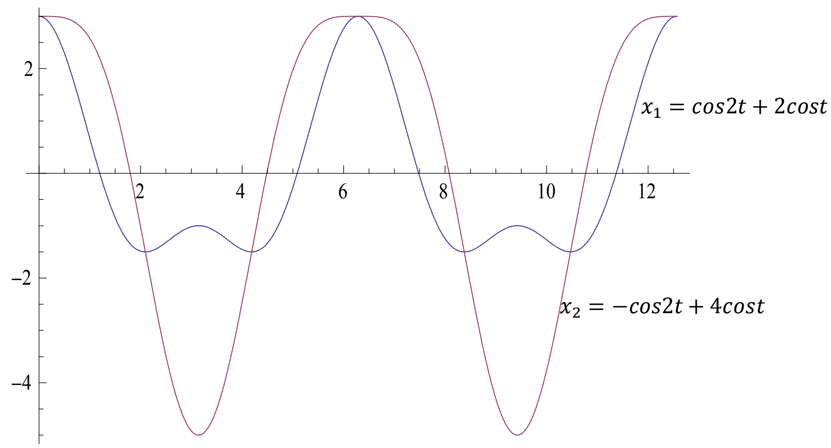
LAMPIRAN

A. Grafik solusi sistem pegas massa menggunakan program **Mathematica 6.0**

1. Sistem pegas massa gerak bebas tak redam (Sistem 4.1)

```
In[1]:=Plot[{Cos[2 t]+2 Cos[t],-Cos[2 t]+4 Cos[t]} ,
{t,0,4 Pi}]
```

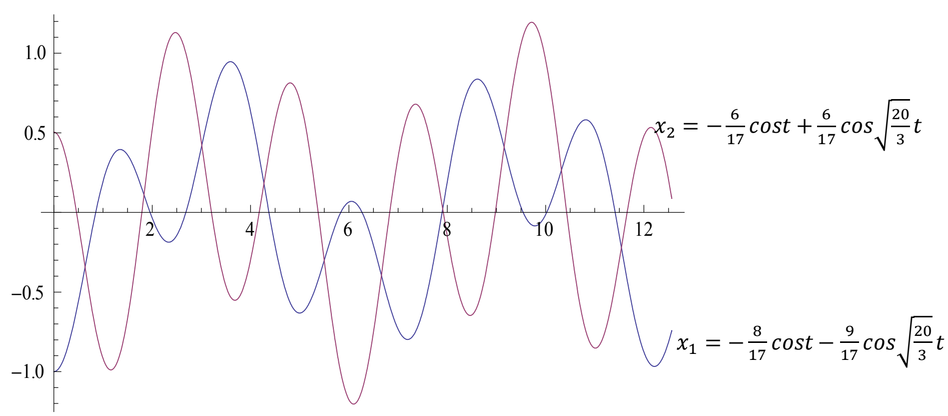
```
Out[1]:=
```



2. Sistem pegas massa gerak bebas tak redam (Sistem 4.2)

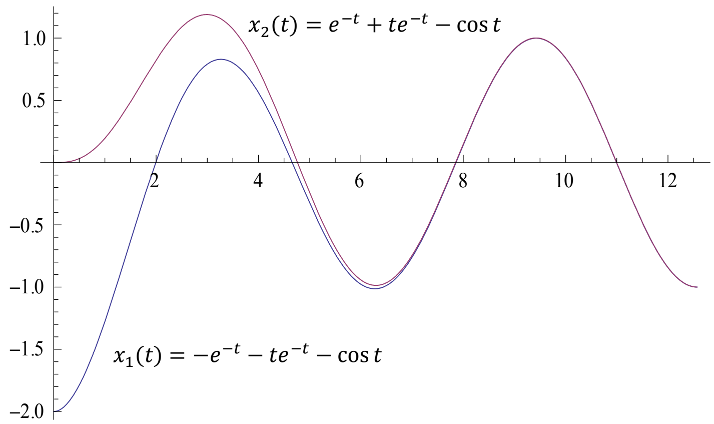
```
In[2]:= Plot[{-8/17 Cos[t]-9/17 Cos [Sqrt [20/3] t],
-6/17 Cos [t]+6/7 Cos [Sqrt[20/3] t]} ,{t,0,4 Pi}]
```

```
Out:=
```



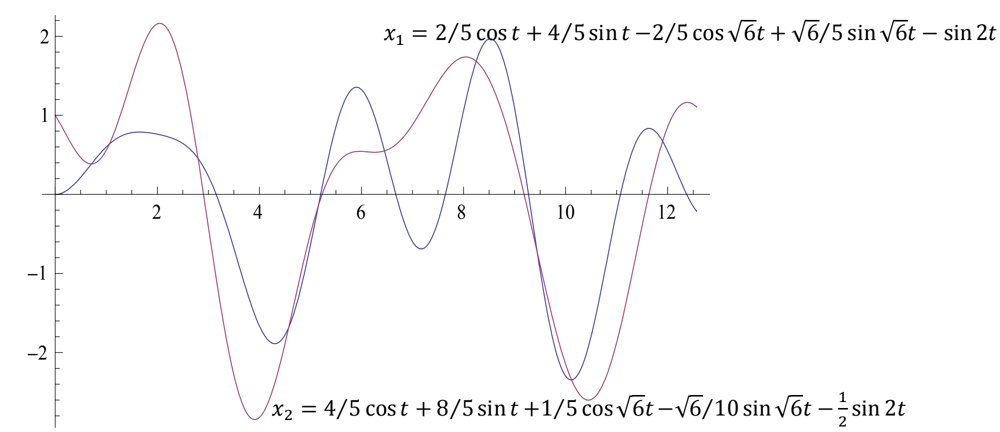
3. Sistem pegas massa gerak bebas dengan redaman (Sistem 4.3)

```
Plot[{-Exp[-t]-t Exp[-t]-Cos[t],Exp[-t]+t Exp[-t]-
Cos[t]},{t,0,4 Pi}]
```



4. Sistem pegas massa gerak paksa *(forced Motion)* (Sistem 4.4)

```
Plot[{2/5 Cos [t]+4/5 Sin [t]-2/5Cos[Sqrt[6]t]+
Sqrt[6]/5 Sin[Sqrt[6] t]-Sin [2 t],4/5 Cos [t]+
8/5 Sin [t]+1/5 Cos[Sqrt[6] t]-
Sqrt[6]/10 Sin[Sqrt[6] t]-Sin [2 t]},{t,0,4 Pi}]
```



Usulan Penelitian

METODE TRANSFORMASI LAPLACE MATRIKS DAN PENERAPANNYA PADA SISTEM PEGAS MASSA

Diajukan oleh:

Syamsul Arifin
NIM. 07610002

Telah disetujui oleh:

Pembimbing I	Pembimbing II
M. Wakhid Musthofa, M.Si.	Sugiyanto, M.Si.
NIP. 19800402 200501 1 003	NIP. 19800505 200801 1 028

a.n Dekan
Kaprodi Matematika

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom.
NIP:19720423 199903 1 003

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-PBM-05-05/R0

BERITA ACARA MUNAQASYAH

Penyelenggaraan Munaqasyah Skripsi/Tugas Akhir Mahasiswa

A. Waktu, tempat dan status munaqasyah :

1. Hari dan tanggal : Rabu , 08 Mei 2013
2. Pukul : 08.00 - 10.00 W.I.B
3. Tempat : Ruang Munaqosah Lt 3
4. Status : MAT-1

B. Susunan Tim Munaqasyah :

NO	Jabatan	NAMA	TANDA TANGAN
1.	Ketua Sidang	Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si	1.
2.	Penguji I	Noor Saif Muh. Mussafi, M.Sc	2.
3.	Penguji II	Sugiyanto, M.Si	3.

C. Identitas mahasiswa yang diuji :

1. Nama : Syamsul Arifin
2. NIM : 07610002
3. Jurusan : Matematika
4. Semester : XII
5. Program : S.1
6. Tanda Tangan :

D. Judul Skripsi/Tugas Akhir : Metode Transformasi Laplace Matriks dan Penerapannya pada Sistem Pegas Massa

E. Pembimbing : I. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
II. Sugiyanto, M.Si

F. Keputusan Sidang :

1. Lulus/~~Tidak lulus~~ dengan perbaikan dan mendapat nilai: A- (92,6)
2. Konsultasi perbaikan a. Penguji I
b. " II

G. Konsultasi Revisi maksimum 1 (satu) bulan dan apabila dalam waktu tersebut belum menyelesaikannya diwajibkan munaqosah ulang.

1381
16 mei 13

Yogyakarta,08 Mei 2013
Ketua Sidang

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

CURRICULLUM VITAE

A. Data Diri

Nama Lengkap	: Syamsul Arifin
Nama Panggilan	: Syamsul
TTL	: Pati, 31 Agustus 1989
Jenis Kelamin	: Laki-laki
Alamat	: Ds. Kedalon RT 03 RW IV Kec. Batangan Kab. Pati Jawa Tengah 59186
Nama Ayah	: Sungkono
Nama Ibu	: Parini
No. HP	: 085729240804
Alamat e-mail	: ipien35@yahoo.com
Facebook	: Syamsul Arif
Motto	: "اعمل لدنيك كأنّك تعيش ابدا واعمل لأخرتك كأنّك تموت غدا"

B. Riwayat Pendidikan

- Formal
  1. TK Dharma Wanita Kedalon 03 (1994-1995)
  2. SD N Kedalon 03 (1995-2001)
  3. MTs Tarbiyatul Islamiyah Lengkong Batangan Pati (2001-2004)
  4. MA Raudlatul Ulum Guyangan Trangkil Pati (2004-2007)
  5. S-1 Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta (2007-2013)

- Non Formal
  1. Madrasah Diniyah Khoiriyyah Gadel Batangan (1997-2001)
  2. Madrasah Diniyah Wahid Hasyim Yogyakarta (2007-2008)
  3. Ma'had 'Aly Wahid Hasyim Yogyakarta (2008-2011)
  4. P.P. Raudlatul Ulum Guyangan Trangkil Pati (2004-2007)
  5. P.P. Wahid Hasyim Yogyakarta (2007-sekarang)