

PEMBENTUKAN GELANGGANG POLINOM MIRING DARI QUATERNION

Amir Kamal Amir¹

¹Jurusan Matematika

Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin
Jl. Perintis Kemerdekaan KM.10 Makassar
email : amirkalamir@yahoo.com

Abstract

Let R be any ring with identity 1, σ be an endomorphism of R and δ be a left σ -derivation. The skew polynomial ring over R in an indeterminate x , denoted by $R[x; \sigma, \delta]$, is the set of polynomials $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ where $a_i \in R$ with multiplication rule $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$, $\forall a \in R$ for all $a \in R$. Multiplication rule shows that the skew polynomial ring $R[x; \sigma, \delta]$ is a noncommutative ring although R is commutative. Investigation $R[x; \sigma, \delta]$ for R is a commutative have been done by many researchers. In this paper, it will be constructed a skew polynomial ring $R[x; \sigma, \delta]$, where R is a noncommutative ring. In this case, R is real quaternion ring.

Keywords: ring, commutative, skew, quaternion, polynomial.

A. Pendahuluan

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Dalam teori sistem kontrol, gelanggang polinom miring digunakan untuk mentransfer sistem kontrol klasik ke dalam sistem kontrol linier abstrak (aljabar). Selanjutnya pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier diterjemahkan menjadi pengkajian struktur, sifat, dan kelakuan sistem linier abstrak terkait, misalnya dengan memanfaatkan pengetahuan aljabar. Dengan demikian, pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier, yang banyak digunakan dalam dunia aplikasi akan sangat terbantu jika kita mengetahui dengan baik sifat-sifat dan struktur gelanggang polinom miring tersebut.

Dalam gelanggang polinom miring $R[x; \sigma, \delta]$, aturan perkalian adalah $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$ untuk setiap $a \in R$. Aturan perkalian ini menyebabkan gelanggang $R[x; \sigma, \delta]$ bersifat tidak komutatif meskipun gelanggang tumpuan R adalah gelanggang komutatif. Pengkajian tentang struktur gelanggang polinom miring, yang dinotasikan dengan $R[x; \sigma, \delta]$ untuk kasus gelanggang tumpuan R berupa gelanggang komutatif

sudah banyak dilakukan. Sejumlah hasil mengenai pusat, ideal maksimal, dan ideal prima dari gelanggang polinom miring untuk kasus R adalah gelanggang komutatif, telah dikembangkan Amir (2008 dan 2009) dan Goodearl (1992). Dalam paper ini, akan diuraikan pembentukan gelanggang polinom miring menggunakan gelanggang tumpuan yang bersifat tidak komutatif. Gelanggang tumpuan yang dimaksud adalah quaternion. Terbentuknya gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan yang tidak komutatif, memberikan referensi baru kepada para peneliti yang berminat mengkaji struktur gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan yang tidak komutatif.

B. Metode

Penelitian ini bersifat pengembangan teori keilmuan (Matematika Aljabar) dengan fokus kajiannya pembangunan teori-teori gelanggang polinom miring. Oleh karena itu, metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini adalah suatu metode yang mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik. Lebih jelasnya, penelitian ini akan menggunakan pendekatan eksploratif dan adaptasi. Khususnya, dalam hal ini akan dimanfaatkan pengetahuan yang peneliti miliki dari penelitian-penelitian sebelumnya dan hasil-hasil lain yang telah ada di literatur.

C. Hasil dan Pembahasan

1.1. Beberapa Pengertian dan Notasi

Pengertian gelanggang polinom miring yang diuraikan berikut ini dapat dibaca pada Mc Connel dan Robson (1987:15). Pada bagian ini akan diuraikan beberapa pengertian dan notasi yang akan digunakan pada bagian pembahasan.

3.1.1 Gelanggang Polinom Miring

Misalkan D suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di D , dan δ suatu σ -derivatif, yaitu:

1. δ suatu endomorfisma grup di D .

2. $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ untuk setiap $a, b \in D$.

Gelanggang polinom miring $D[x; \sigma, \delta]$ dalam variabel tak diketahui x berisi semua polinom dengan koefisien di D yang memenuhi aturan perkalian sebagai berikut: untuk setiap $a \in D$ berlaku $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$. Untuk kasus khusus dimana $\delta = 0$, gelanggang polinom miring $D[x; \sigma, \delta]$ ditulis $D[x; \sigma]$. Struktur dari gelanggang polinom miring $D[x; \sigma, \delta]$ ($\delta \neq 0$) sangat berbeda dengan $D[x; \sigma]$ ($\delta = 0$). Berikut ini diberikan ilustrasi.

Contoh 1

Misalkan $D = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}$. Automorfisma σ pada R didefinisikan sebagai $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5}$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Selanjutnya pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b$, untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in D$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ -derivatif. Dengan demikian, $D[x; \sigma, \delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring. Gelanggang ini tidak bersifat komutatif. Perhatikan proses perkalian antara $f(x) = (4 - 2\sqrt{-5})x$ dengan $g(x) = (3 + 5\sqrt{-5})x$ berikut ini.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= [(4 - 2\sqrt{-5})x][(3 + 5\sqrt{-5})x] \\ &= (4 - 2\sqrt{-5})[x(3 + 5\sqrt{-5})]x \\ &= (4 - 2\sqrt{-5})[\sigma(3 + 5\sqrt{-5})x + \delta(3 + 5\sqrt{-5})]x \\ &= (4 - 2\sqrt{-5})(3 - 5\sqrt{-5})x^2 + (4 - 2\sqrt{-5})5x \\ &= (-38 - 26\sqrt{-5})x^2 + (20 - 10\sqrt{-5})x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(x)f(x) &= [(3+5\sqrt{-5})x][(4-2\sqrt{-5})x] \\
&= (3+5\sqrt{-5})[x(4-2\sqrt{-5})]x \\
&= (3+5\sqrt{-5})[\sigma(4-2\sqrt{-5})x + \delta(4-2\sqrt{-5})]x \\
&= (3+5\sqrt{-5})(4+2\sqrt{-5})x^2 + (3+5\sqrt{-5})(-2)x \\
&= (-38+26\sqrt{-5})x^2 + (-6-10\sqrt{-5})x
\end{aligned}$$

Perkalian di atas menunjukkan bahwa $f(x)g(x) \neq g(x)f(x)$.

Lebih lanjut, struktur dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$, untuk $\delta = 0$, berbeda dengan struktur dari gelanggang polinom miring $D[x;\sigma,\delta]$, untuk $\delta \neq 0$. Perhatikan proses perkalian antara $f(x) = (4-2\sqrt{-5})x$ dengan $g(x) = (3+5\sqrt{-5})x$ berikut ini.

Dalam gelanggang polinom miring $D[x;\sigma]$, (untuk $\delta = 0$), diperoleh hasil perkalian

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= [(4-2\sqrt{-5})x][(3+5\sqrt{-5})x] \\
&= (4-2\sqrt{-5})[x(3+5\sqrt{-5})]x \\
&= (4-2\sqrt{-5})[\sigma(3+5\sqrt{-5})x^2] \\
&= (4-2\sqrt{-5})(3-5\sqrt{-5})x^2 \\
&= (-38-26\sqrt{-5})x^2.
\end{aligned}$$

Sedangkan dalam gelanggang polinom miring $D[x;\sigma,\delta]$, (untuk $\delta \neq 0$), diperoleh hasil perkalian

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= [(4-2\sqrt{-5})x][(3+5\sqrt{-5})x] \\
&= (4-2\sqrt{-5})[x(3+5\sqrt{-5})]x \\
&= (4-2\sqrt{-5})[\sigma(3+5\sqrt{-5})x + \delta(3+5\sqrt{-5})]x \\
&= (4-2\sqrt{-5})(3-5\sqrt{-5})x^2 + (4-2\sqrt{-5})5x \\
&= (-38-26\sqrt{-5})x^2 + (20-10\sqrt{-5})x.
\end{aligned}$$

Melihat bahwa gelanggang polinom miring ini tidak komutatif, satu hal yang sangat menarik dan berperan cukup penting pada pengkajian struktur gelanggangnya adalah identifikasi senter atau pusat gelanggang, yaitu himpunan bagian dari gelanggang yang bersifat komutatif dengan semua unsur di gelanggang.

3.1.2 Quaternion

Pengertian quaternion yang diuraikan berikut ini dapat dibaca pada Shoemake (2007). Quaternion dapat didefinisikan melalui beberapa cara yang saling ekuivalen. Quaternion diperkenalkan oleh Hamilton ketika beliau mengembangkan bilangan kompleks $a + bi$ menjadi $a + bi + cj + dk$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ dan $ij = k = -ji$. Sebagai penghargaan kepada beliau, maka quaternion biasanya disimbol dengan $\mathbf{H}$. Dengan demikian quaternion secara lengkap ditulis:

$$\mathbf{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, \text{ dan } ij = k = -ji\}.$$

Bentuk penulisan anggota quaternion $\mathbf{H}$ dapat dikaitkan dengan bentuk penulisan anggota $\mathbb{R}^3$. Misalkan $h = a + bi + cj + dk \in \mathbf{H}$, h dapat ditulis $h = [a, \mathbf{v}]$ dengan $\mathbf{v} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$. Menggunakan bentuk penulisan yang terakhir, operasi-operasi pada quaternion $\mathbf{H}$ dapat dikaitkan dengan operasi perkalian silang dan perkalian titik dalam $\mathbb{R}^3$. Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan beberapa hasil operasi dalam quaternion.

Misalkan $h = [a, \mathbf{v}]$, $h' = [a', \mathbf{v}'] \in \mathbf{H}$ dengan $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$.

Operasi penjumlahan:

$$h + h' = [a, \mathbf{v}] + [a', \mathbf{v}'] = [a + a', \mathbf{v} + \mathbf{v}'] \dots \dots \dots (1)$$

Operasi perkalian:

$$hh' = [a, \mathbf{v}] [a', \mathbf{v}'] = [aa' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', a\mathbf{v}' + a'\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \mathbf{v}'] \dots \dots \dots (2)$$

dengan “.” dan “x” masing-masing adalah perkalian titik dan perkalian silang pada $\mathbb{R}^3$. Memperhatikan operasi penjumlahan dan perkalian pada quaternion, dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa quaternion $\mathbf{H}$ merupakan gelanggang. Lebih jauh lagi, dapat juga ditunjukkan bahwa $\mathbf{H}$ adalah gelanggang tidak komutatif karena $hh' \neq h'h$.

3.2 Hasil Penelitian dan Pembahasan

Gelanggang polinom miring yang akan dibentuk adalah gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan adalah quaternion $\mathbf{H}$ dan δ ditetapkan sama dengan nol. Oleh karena itu, langkah yang akan dilakukan adalah cukup membentuk endomorfisma σ pada quaternion $\mathbf{H}$.

Misalkan $h = a + bi + cj + dk = [a, \mathbf{v}] \in \mathbf{H}$ dengan $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$. Didefinisikan pemetaan σ pada $\mathbf{H}$ sebagai berikut:

$$\sigma(h) = \sigma(a + bi + cj + dk) = a - di - cj - bk.$$

Untuk membuktikan bahwa σ yang didefinisikan seperti di atas merupakan endomorfisma, cukup ditunjukkan bahwa $\sigma(h + h') = \sigma(h) + \sigma(h')$ dan $\sigma(hh') = \sigma(h)\sigma(h')$ karena syarat yang lain cukup mudah untuk ditunjukkan.

Lema 2

Misalkan $h, h' \in \mathbf{H}$, maka berlaku $\sigma(h + h') = \sigma(h) + \sigma(h')$ dan $\sigma(hh') = \sigma(h)\sigma(h')$.

Bukti:

Misalkan $h = a + bi + cj + dk = [a, \mathbf{v}]$ dan $h' = a' + b'i + c'j + d'k = [a', \mathbf{v}']$, maka diperoleh

$$\sigma(h) = \sigma(a + bi + cj + dk) = a - di - cj - bk.$$

dan

$$\sigma(h') = \sigma(a' + b'i + c'j + d'k) = a' - d'i - c'j - b'k.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \sigma(h) + \sigma(h') &= (a - di - cj - bk) + (a' - d'i - c'j - b'k) \\ &= (a + a') - (d + d')i - (c + c')j - (b + b')k \\ &= \sigma((a + a') - (d + d')i - (c + c')j - (b + b')k) \\ &= \sigma(h + h'). \end{aligned}$$

Untuk proses perkalian digunakan rumus perkalian yang telah diberikan pada persamaan (2) di atas. Menggunakan rumus perkalian tersebut, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} hh' = & (aa' - bb' - cc' - dd', \\ & cd' - dc' + ab' + a'b, \\ & db' - bd' + ac' + a'c, \\ & bc' - cb' + ad' + a'd). \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \sigma(hh') = & (aa' - bb' - cc' - dd', \\ & -cd' + dc' - ab' - a'b, \\ & -db' + bd' - ac' - a'c, \\ & -bc' + cb' - ad' - a'd) = \sigma(h)\sigma(h'). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Berdasarkan lema di atas, maka disimpulkan bahwa $\mathbf{H}[x; \sigma]$ adalah gelanggang polinom miring. Selanjutnya akan ditunjukkan bentuk pusat dari $\mathbf{H}[x; \sigma]$, yaitu

$$\{f(x) \in \mathbf{H}[x; \sigma] \mid f(x)g(x) = g(x)f(x), \quad \forall g(x) \in \mathbf{H}[x; \sigma]\}.$$

Misalkan pusat gelanggang $\mathbf{H}[x; \sigma]$ disimbol dengan $Z(\mathbf{H}[x; \sigma])$, maka salah satu bentuk pusatnya diberikan pada lema berikut.

Lema 3

$\mathbb{R}[x^2] \subseteq Z(\mathbf{H}[x; \sigma])$, dengan $\mathbb{R}[x^2]$ adalah himpunan polinom dengan variable x berpangkat kelipatan dua dengan koefisien-koefisien polinom adalah bilangan riil.

Bukti:

Misalkan $f(x) \in \mathbb{R}[x^2]$, berarti $f(x) = r_0 + r_1x^{2,1} + \dots + r_nx^{2n}$ dengana $r_i \in \mathbb{R}$.

Memperhatikan kembali aturan pengawanan σ dapat dilihat bahwa

$\sigma^2(h) = \sigma(\sigma(h)) = h$. Oleh karena itu, $x^{2k}.h = hx^{2k}$. Pada sisi lain, dapat juga dilihat

bahwa $r_ih = hr_i$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$f(x)g(x) = g(x)f(x), \forall g(x) \in \mathbf{H}[x; \sigma]$. Jadi $f(x) \in Z(\mathbf{H}[x; \sigma])$. $\blacksquare$

2. KESIMPULAN

Hasil penelitian menunjukkan bahwa (gelanggang) quaternion,

$$\mathbf{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, \text{ dan } ij = k = -ji\},$$

dapat dijadikan gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring, dengan mendefinisikan endomorfisma σ sebagai

$$\sigma(a + bi + cj + dk) = a - di - cj - bk$$

dan

$$\delta(a + bi + cj + dk) = 0.$$

Dari hasil pendefinisian tersebut diperoleh gelanggang polinom miring $H[x; \sigma]$, yaitu himpunan polinom dengan variabel x dan koefisien dalam H . Lebih lanjut, untuk gelanggang polinom miring $H[x; \sigma]$, diperoleh bahwa polinom yang berada dalam $R[x^2]$ merupakan polinom yang berada dalam pusat gelanggang $Z(H[x; \sigma])$.

DAFTAR PUSTAKA

- Amir, A.K., Astuti, P., dan Muchtadi-Alamsyah, I. (2008). *Sekitar Ideal Maksimal dari Pusat Gelanggang Polinom Miring atas Daerah Dedekind*, Prosiding Konferensi Nasional Matematika XIV Palembang.
- Amir, A.K., Astuti, P., dan Muchtadi-Alamsyah, I. (2008). *Around Prime and Maximal Ideals of a Skew Polynomial Ring over a Dedekind Domain*, Proceeding of the 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3) Bogor, pp.169-172.
- Amir, A.K., dan Marubayashi, H. (2009). *Contoh Ideal Prim P dari Gelanggang Polinom Miring yang Membentuk Gelanggang Faktor R/P Menjadi Gelanggang HNP*, Prosiding Seminar Nasional Aljabar Yogyakarta, pp. 243-250.
- Goodearl, K.R. (1992). *Prime Ideals in Skew Polynomial Rings and Quantized Weyl Algebras*, Journal of Algebra, Vol.:150, No. 2, pp.324-377.
- McConnell, J.C., and Robson, J.C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley and Sons, Inc.
- Shoemake, K., 2007, *Quaternions*, Lecture Note, Department of Computer and Impformation Science University of Pennsylvania, Philadelphia.