

Volume V, No. 2, Oktober 2009/1430

Kaunvia

Jurnal Sains dan Teknologi dalam Islam



Islamic
Science &
Technology

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UIN SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA

KAUNIA

Jurnal Sains dan Teknologi dalam Islam

Vol. V. No. 2 Oktober 2009/1430

Penanggung Jawab

Maizer Said Nahdi

Ketua Penyunting

Muchammad Abrori

Wakil Ketua Penyunting

Susy Yunita P.

Anggota Redaksi

Arifah Khusnuryani

Ira Setyaningsih

Nina Hamidah

Maria Ulfah

Frida Agung R

Sri Utami Z

Penyunting Ahli

Farhani Rosyid (Universitas Gadjah Mada)

Subagyo (Universitas Gadjah Mada)

Subanar (Universitas Gadjah Mada)

Susiknan Azhari (Universitas Islam Negeri Yogyakarta)

Kuwat Riana (Universitas Gadjah Mada)

Marsigit (Universitas Negeri Yogyakarta)

Budi Daryono (Universitas Gadjah Mada)

Nurul Hidayat (Universitas Gadjah Mada)

Tjut Djohan Sugandawati (Universitas Gadjah Mada)

Bambang P. Rahmadi (Universitas Gadjah Mada)

Khabib Mustofa (Universitas Gadjah Mada)

Indah Emilia (Universitas Gadjah Mada)

Tata Usaha

Yuli Annisah

Joko Pramono

Robi'atul Halimah

Terbit Pertama Kali

April 2005

Frekuensi Terbit

2 (dua) kali setahun

Alamat Redaksi

Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Jl. Marsda Adisucipto Yogyakarta 55221 Indonesia

Telp. + 62-274-519739

E-mail: borymuch@yahoo.com

DAFTAR ISI

Tajuk	iii
Protonasi Alga Coklat Sargassum Sp dari Pulau Lemukutan dengan H_2SO_4 dan Aplikasinya Sebagai Adsorben Logam Cr^{3+} Nelly Wahyuni, Yossy	63
Aplikasi Teorema Polya untuk Menghitung Banyaknya Graf yang Tidak Isomorfis pada Graf Sederhana Muchammad Abrori dan Nur Laila Indah Sari	71
Assessment of Education: A Case in Indonesia Eka Sulistiyowati	89
Online Analytical Processing (OLAP) Sebagai Tool Analisis Kebijakan Di Bidang Akademik (Studi Kasus Mahasiswa Teknik Informatika Fakultas Sains & Teknologi UIN Sunan Kalijaga) Ade Ratnasari	99
Homomorfisma Kontinu dan Representasi Reguler pada Ring Bernorma Khurul Wardati, Muhammad Wakhid Musthofa, Burhanudin Arif Nurnugroho	113
Journal Review Keistimewaan Kaliksarena Sebagai Salah Satu Senyawa Supramolekul Susy Yunita Prabawati	126

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kontribusi Sains dalam Industri Ramah Lingkungan

Aktivitas manusia dalam upaya untuk memenuhi kebutuhan hidup tidak lepas dari peranan ilmu kimia sebagai salah satu cabang ilmu MIPA yang masih terkesan oleh masyarakat sebagai ilmu yang rumit, abstrak dan bahkan dikatakan sebagai ilmu yang tidak membumi. Ilmu kimia, ternyata dapat menyampaikan sisi lain yang menarik sebagai ilmu kimia terapan yang dapat berhubungan langsung dengan masyarakat dan lingkungannya. Salah satu bentuk kontribusi ilmu kimia dalam kehidupan misalnya penggunaan bahan-bahan kimia dalam industri plastik, industri tinta, industri air minum kemasan, industri tekstil, industri cat, dan masih banyak lainnya.

Seiring dengan peningkatan aktivitas manusia dalam berbagai sektor di atas selain memberi manfaat bagi peningkatan kesejahteraan hidup juga memberikan dampak terhadap penurunan kualitas lingkungan akibat limbah industri yang dihasilkan. Berbagai upaya preventif berupa pencegahan terhadap kerusakan lingkungan perlu dibudayakan selain diperlukan juga langkah pengendalian dan rehabilitasi terhadap kerusakan lingkungan hidup yang telah terjadi.

Dunia pendidikan khususnya yang berkaitan dengan bidang sains dan teknologi juga berupaya memberikan peranannya dengan terus melakukan riset-riset penelitian yang mengarah pada upaya pengurangan kerusakan lingkungan. Dalam bidang ilmu biologi misalnya telah banyak digunakan bantuan kultur bakteri untuk mereduksi limbah sisa hasil industri. Dalam bidang ilmu kimia, teknik fotoreduksi, fotokatalisis atau penggunaan adsorben juga dikembangkan untuk mengurangi kadar limbah di lingkungan. Satu hal yang perlu digarisbawahi adalah harapan kepada ahli-ahli sains agar terus mengembangkan konsepsi positif guna membangkitkan kesadaran dan memberikan sumbangan nyata dalam menciptakan industri yang ramah lingkungan.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HOMOMORFISMA KONTINU DAN REPRESENTASI REGULER PADA RING BERNORMA

Khurul Wardati, Muhammad Wakhid Musthofa, Burhanudin Arif Nurnugroho

Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

E-mail: ag_khurul@yahoo.co.id

Abstract

A ring structure is formed from a non-empty set completed by two binary operations and satisfies a number of axioms. If the set of ring is a normed space, a normed ring concept will be formed. The characteristics of a normed ring (algebra) will be consistent with the characteristics of ring in general; and one of the characteristics is the concept of homomorphism.

This article will discuss continuous homomorphism and regular representation in the normed ring. This article will show that the continuous homomorphism in the normed ring can be used as a continuous homomorphism in the respective completion normed ring. Finally, it is also demonstrated that a left/right regular representation of normed ring is a also a continuous homomorphism/anti-homomorphism.

Kata Kunci: ring , ruang bernorma, ring bernorma, homorfisma kontinu.

A. Pendahuluan

Konsep ring yang terbangun dari suatu ruang vektor disebut sebagai/dengan aljabar (*algebra*). Namun, di beberapa buku ada yang cukup menyebutnya sebagai ring saja. Ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norma dinamakan ruang bernorma. Ring yang terbangun dari suatu ruang bernorma disebut ring atau aljabar bernorma.

Struktur ring bernorma merupakan bentuk khusus dari ring secara umum, sehingga pada ring bernorma terdapat sifat-sifat atau konsep yang sejalan dengan ring pada umumnya. Konsep homomorfisma pada ring bernorma terkait dengan sifat-sifat suatu fungsi pada ruang bernorma, khususnya berkaitan dengan sifat operator pada ruang bernorma.

Ring bernorma telah banyak dikaji oleh para matematikawan. Penyentral untuk subset-subset pada ring bernorma telah dikaji oleh Bertram Yood (*University Park, PA*) pada tahun 2000 . Konsep tersebut termuat dalam jurnalnya yang berjudul "*Centralizers for Subsets Of Normed Algebras*". Konsep ring bernorma juga dikaji oleh Chun-Gil Park pada tahun 2006 dengan jurnalnya yang berjudul "*Completion Of Quasi-Normed Algebras and Quasi-Normed Modules*". Pada jurnal ini dibahas tentang kontruksi sifat *completion* yang terdapat pada ring *quasi*-bernorma (*Quasi-normed Algebras*) dan modul *quasi*-bernorma atas ring *Banach* (*quasi-normed module over a Banach algebras*). Terinspirasi dari jurnal tersebut, salah satu yang akan dikaji dalam makalah ini adalah hubungan antara homomorfisma ring bernorma dan homomorfisma pada *completion* ring bernormanya.

Lebih jelasnya, penulisan makalah ini bertujuan untuk mengkaji konsep homomorfisma kontinu dan representasi regular pada ring bernorma. Kajian dibatasi pada perluasan tunggal dari homomorfisma kontinu pada ring bernorma yang dapat dibawa sebagai homomorfisma pada *completion* ring bernorma-nya dan representasi regular kiri/ kanan dari ring bernorma yang merupakan suatu homomorfisma atau anti homomorfisma kontinu. Makalah ini mencoba memberikan kajian yang lebih lengkap terhadap pembuktian teorema-teorema yang ada dalam pembahasan, dimana pada sumber aslinya (*Normed Ring*, Naimark : 1964) belum seluruhnya diberikan pembuktian secara lengkap.

Kajian dalam makalah ini dilakukan dengan mengkaji berbagai sumber mengenai ring bernorma. Tahapan pengkajiannya adalah sebagai berikut : Pertama, dikaji terlebih dahulu tentang konsep ruang metrik dan *completion* ruang metrik. Selanjutnya dikaji bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, sehingga semua sifat dalam ruang metrik berlaku pada ruang bernorma, termasuk di dalamnya adalah konsep *completion* ruang bernorma. Kedua, dibahas mengenai konsep ring atau aljabar, dalam hal ini mengenai ring bernorma. Ketiga, dibahas tentang homomorfisma pada ring bernorma yang dilanjutkan dengan pembahasan homomorfisma kontinu pada ring bernorma, yang dapat dibawa sebagai homomorfisma kontinu dari *completion* ring bernorma. Terakhir, makalah ini membahas sifat representasi dari sebuah ring bernorma.

B. Kerangka Teoritik

Materi-materi yang mendukung konsep homomorfisma kontinu dan representasi regular pada ring bernorma meliputi ruang metrik dan ruang bernorma beserta sifat-sifat yang melekat dengannya. Konsep ruang bernorma sangat memerlukan konsep ruang metrik, maka pembahasan diawali dengan konsep ruang metrik.

1. Ruang Metrik

Kajian ruang bernorma selalu didahului dengan konsep ruang metrik. Oleh karenanya, akan dipaparkan terlebih dulu konsep ruang metrik sampai dengan fungsi kontinu pada ruang metrik.

Definisi B.1.1.: Ruang Metrik (Soeparna Darmawijaya, 2007: 37)

Diberikan sebarang himpunan tak kosong A .

(i) Fungsi yang memenuhi sifat-sifat

1. $d(x,y) \geq 0$, untuk semua $x, y \in A$ dan $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$, untuk semua $x, y \in A$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, untuk semua $x, y, z \in A$

disebut metrik (*metric*) atau jarak (*distance*) pada A .

(ii) Himpunan A dilengkapi dengan suatu metrik d , dituliskan dengan (A, d) , disebut ruang metrik (*metric space*). Selanjutnya, jika metriknya telah diketahui (tertentu), maka ruang metrik cukup ditulis dengan A saja.

(iii) Anggota ruang metrik (A, d) disebut titik (*point*) dan untuk setiap titik $x, y \in A$, terdapat bilangan non negative $d(x,y)$ disebut jarak (*distance*) titik x dengan titik y .

Definisi B.1.2.: Isometrik dalam ruang metrik (Naimark, 1964: 37)

Suatu pemetaan f dari ruang metrik X ke ruang metrik X' dikatakan isometrik jika jarak $d(x,y)$ antara sebarang $x, y \in X$, sama dengan jarak $d(x',y')$ untuk $x', y' \in X'$ yang merupakan image dari x dan $y \in X$.

Berikut akan diberikan definisi barisan fundamental pada ruang metrik. Barisan fundamental sering disebut pula sebagai barisan *Cauchy*. Perbedaan dengan definisi barisan *Cauchy* pada sistem bilangan real terletak pada pengertian jaraknya yang lebih diperumum.

Definisi B.1.3.: Barisan Fundamental (Naimark, 1964: 38)

Suatu barisan $\{x_n\}$ dari elemen-elemen di dalam ruang metrik dinamakan fundamental jika setiap bilangan positif ε terdapat suatu indeks $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, untuk $n, m > N(\varepsilon)$.

Berdasarkan sifat barisan *Cauchy*-nya ruang metrik dapat dibedakan menjadi dua, yaitu ruang metrik lengkap (*complete*) dan tidak lengkap. Berikut diberikan syarat kelengkapan suatu ruang metrik.

Definisi B.1.4.: Ruang Metrik lengkap (Naimark, 1964: 38)

Suatu ruang metrik dikatakan lengkap jika setiap barisan fundamental konvergen ke suatu titik pada ruang tersebut.

Jika suatu ruang metrik merupakan ruang metrik yang tidak lengkap maka ruang metrik tersebut dapat dilekatkan pada suatu ruang metrik yang lengkap. Hal ini dinyatakan dalam teorema dibawah ini.

Teorema B.1.1.: (Naimark, 1964: 38)

Suatu ruang metrik yang tidak lengkap dapat dilekatkan (*embedded*) pada suatu ruang metrik yang lengkap.

Berdasar teorema di atas, jika diberikan ruang metrik tak lengkap A , maka ruang metrik ini dan dilekatkan pada suatu ruang metrik lengkap $\tilde{A}$. Dengan $\tilde{A}$ adalah himpunan semua barisan fundamental di A . Lebih lanjut, dinamakan sebagai *completion* dari ruang metrik A .

Pembahasan tentang homomorfisma kontinu sangat terkait dengan suatu fungsi yang kontinu. Berikut diberikan terlebih dahulu definisi fungsi kontinu pada ruang metrik.

Definisi B.1.5.: Fungsi Kontinu pada ruang metrik (Soeparna Darmawijaya, 2007: 74)

Diberikan ruang metrik (X,d) dan (Y,p) . Fungsi $f: X \rightarrow Y$ dikatakan kontinu di suatu titik $a \in X$ jika untuk sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $d(a,x) < \delta$ berakibat $p(f(x),f(a)) < \varepsilon$.

Selanjutnya, fungsi f dikatakan kontinu pada $A \subset X$ jika f kontinu pada setiap $a \in A$.

2. Ruang Bernorma

Definisi dan sifat-sifat ruang bernorma akan diberikan dalam sub bab ini.

Definisi B.2.1.: Ruang Bernorma (Soeparna Darmawijaya, 2007: 87)

Diberikan ruang vektor X , fungsi $x \in X \rightarrow \|x\| \in R$ $x \in X \mapsto \|x\| \in R$, yang mempunyai sifat-sifat:

- 1) $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$ $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, untuk setiap skalar α dan $x \in X$.
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in X$,

disebut norma (*norm*) pada X dan bilangan nonnegative $\|x\|$ disebut norma vektor x .

Ruang vektor X yang dilengkapi dengan suatu norma $\| \cdot \|$ disebut ruang bernorma (*normed space*) dan dituliskan singkat dengan $(X, \|x\|)$ atau X saja asalkan normanya telah diketahui.

Definisi B.2.2.: Metrik terbangkitkan (Wahyudin, 1987: 114)

Misal X adalah ruang bernorma. Fungsi d yang didefinisikan oleh $d(x, y) = \|x - y\|$ di mana $x, y \in X$ adalah metrik, dan disebut metrik terbangkitkan (*induced metric*).

Berdasar definisi B.2.1 dan B.2.2 di atas, dapat disimpulkan bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik sehingga semua konsep serta teorema yang berlaku pada ruang metrik juga berlaku pada ruang bernorma.

Definisi B.2.3.: Kekontinuan pada ruang bernorma (Zeidler, 1995: 90)

Diberikan X, Y adalah ruang bernorma serta operator $A : M \subseteq X \rightarrow Y$.

Maka operator A dikatakan kontinu pada titik $u \in M$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|v - u\| < \delta$ dan $v \in M$ berakibat $\|Av - Au\| < \varepsilon$

Di atas telah didefinisikan sifat isometrik dalam ruang metrik. Secara analog, akan diberikan definisi sifat isometrik pada ruang bernorma.

Definisi B.2.4.: Isometrik pada ruang bernorma (Soeparno Darmawijaya, 2007: 142)

Diberikan X dan Y masing-masing ruang bernorma, fungsi linear kontinu $f : X \rightarrow Y$ dikatakan isometrik jika $\|f(x)\| = \|x\|$ untuk setiap $x \in X$.

Telah diketahui bahwa tidak semua ruang bernorma adalah lengkap tetapi sebuah ruang bernorma tak lengkap dapat dijadikan lengkap. Untuk itu sangat diperlukan konsepsi isometrik serta dense, sebagai berikut :

Definisi B.2.5.: Dense (Zeidler, 1995: 84)

Diberikan X adalah suatu ruang bernorma, $M \subset X$ dikatakan dense di X jika dan hanya jika $\bar{M} = X$, artinya setiap $u \in X$, dan setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $v \in M$ $\ni \|u - v\| < \varepsilon$

Teorema B.2.1.: (Naimark, 1964: 68)

Setiap ruang bernorma tak lengkap dapat dijadikan lengkap. Artinya ruang bernorma ini dapat dilekatkan sebagai sub ruang dense pada ruang bernorma yang lengkap.

Berdasar teorema di atas, jika diberikan R adalah ruang bernorma tak lengkap, maka ruang bernorma lengkap yang dimaksud di sini adalah (*completion* dari ruang R). Dengan mendasarkan bahwa adalah suatu ruang metrik yang lengkap, akibatnya dapat ditunjukkan bahwa adalah suatu ruang bernorma yang lengkap.

Definisi B.2.6.: Konvergensi pada ruang bernorma (Debnath, 1990: 12)

Diberikan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma, barisan vektor $\{x_n\}$ dari elemen-elemen di X konvergen ke suatu x anggota X , jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli M sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq M$ berlaku $\|x_n - x\| < \varepsilon$; yang juga dapat dituliskan dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atau lebih sederhana $x_n \rightarrow x$.

Definisi B.2.7.: Ruang Banach (Debnath, 1990: 18)

Suatu ruang bernorma X dikatakan lengkap jika setiap barisan *Cauchy* di X konvergen ke suatu elemen di X . Suatu ruang bernorma yang lengkap dinamakan ruang Banach.

Definisi B.2.8.: Operator Terbatas (Naimark, 1964: 74)

Suatu operator A dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y dikatakan terbatas jika terdapat suatu konstanta C sedemikian sehingga, untuk semua x anggota D_A (*domain*).

Teorema B.2.2.: (Naimark, 1964: 74)

Setiap operator linear yang kontinu pada titik $x = 0$, adalah terbatas, dan sebaliknya, setiap operator linear terbatas adalah kontinu.

C. Pembahasan

1. Ring Bernorma

Dalam sub bab ini akan dikaji terlebih dahulu hal-hal yang terkait dengan ring bernorma, yaitu: ring pada ruang vektor, homomorfisma, isomorfisma dan anti-homomorfisma ring; serta representasi regular ring.

Definisi C.1.1.: Ring pada ruang vektor atau Aljabar (Naimark, 1964: 155)

Suatu himpunan tak kosong R dinamakan ring jika memenuhi:

1. R adalah ruang vektor
2. Pada operasi pergandaan yang terdefinisi di R (pada umumnya tidak komutatif) memenuhi kondisi : untuk setiap $x, y, z \in R$ dan sebarang bilangan a .
 - (i) $\alpha(xy) = (\alpha x)y$,
 - (ii) $x(\alpha y) = \alpha(xy)$,
 - (iii) $(xy)z = x(yz)$,
 - (iv) $(x+y)z = xz + yz$,
 - (v) $x(y+z) = xy + xz$

Beberapa literatur menyebutkan suatu ring dalam ruang vektor dinamakan aljabar, namun pada penelitian ini suatu ring dalam ruang vektor dinamakan dengan ring.

Definisi C.1.2.: Homomorfisma, Isomorfisma, dan Anti-homomorfisma Ring (Naimark, 1964: 165-167)

- (i) Suatu pemetaan $f(x)$ dari ring R ke sebarang ring R' dinamakan homomorfisma dari R ke R' , jika $f(x) = x'$ dan $f(y) = y'$ berakibat :
 - a. $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda x'$,
 - b. $f(x+y) = f(x) + f(y) = x' + y'$ dan
 - c. $f(xy) = f(x)f(y) = x'y'$
 - Jika R' adalah *image* dari ring R , maka homomorfisma dinamakan homomorfisma dari R onto R' .
- (ii) Jika homomorfisma adalah suatu pemetaan *one-to-one* dari R onto R' maka dinamakan suatu isomorfisma.
- (iii) Anti-homomorfisma adalah suatu pemetaan $f(x)$ yang memenuhi kondisi :
 - a. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$;
 - b. $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
 - c. $f(xy) = f(y)f(x)$

Suatu homomorfisma dapat dibentuk dari ring R ke ring yang elemen-elemennya adalah seluruh operator linear dari R ke R . Homomorfisma ini dinamakan representasi reguler ring. Berikut diberikan definisi representasi reguler ring.

Definisi C.1.3.: Representasi reguler ring (Naimark, 1964: 167)

Diberikan R adalah suatu ring. Setiap $a \in R$ terkawankan oleh operator A_a dari perkalian kiri dengan a : $A_a x = ax$;

Dapat terlihat bahwa A_a adalah operator linear di R , sehingga dapat diperlihatkan bahwa korespondensi $a \mapsto A_a$ adalah suatu homomorfisma dari ring R ke ring dari semua operator linear dari ring R . Homomorfisma ini dinamakan suatu representasi reguler kiri (*left regular representation*) dari ring R .

Jika setiap $a \in R$ terkawankan oleh operator B_a dari perkalian kanan dengan a : $B_a x = xa$; maka disebut representasi reguler kanan (*right regular representasion*) dari ring R .

Selanjutnya dibahas ring bernorma yang merupakan semesta pembicaraan dalam makalah ini. Berikut akan dipaparkan definisi dan teorema penting ring bernorma.

Definisi C.1.4.: Ring bernorma (Naimark, 1964: 175)

Suatu himpunan tak kosong R dinamakan ring bernorma jika:

- 1) R adalah ring ;
- 2) R adalah ruang bernorma;
- 3) Untuk sebarang dua elemen $x, y \in R$ berlaku

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \dots \dots \dots (1)$$

- 4) Jika R memuat suatu identitas e , maka $\|e\| = 1$

Teorema C.1.1.: (Naimark, 1964: 176)

Setiap ring bernorma tak lengkap dapat dilekatkan pada suatu ring bernorma lengkap.

Bukti:

Diberikan $\tilde{R}$ adalah ring bernorma pelengkap (*completion*) dari ruang bernorma R . Didefinisikan perkalian di $\tilde{R}$, yaitu untuk $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{R}$, dan diambil $\{x_n\}, \{y_n\}$ barisan fundamental di R , yang mendefinisikan $\tilde{x}, \tilde{y}$ secara berturutan. Maka barisan $\{x_n y_n\}$ juga barisan fundamental.

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - x_m y_m\| &= \|(x_n - x_m)(y_n - y_m) + (x_n - x_m)y_m + x_m(y_n - y_m)\| \\ &\leq \|(x_n - x_m)(y_n - y_m)\| + \|(x_n - x_m)y_m\| + \|x_m(y_n - y_m)\| \\ &\leq \|(x_n - x_m)\| \|y_n - y_m\| + \|(x_n - x_m)\| \|y_m\| + \|x_m\| \|y_n - y_m\| \\ &\leq \|(x_n - x_m)\| \{ \|y_n - y_m\| + \|y_m\| \} + \|x_m\| \|y_n - y_m\| \\ &< \frac{\delta}{2(\frac{\delta}{2\|x_m\|} + \|y_m\|)} \left\{ \frac{\delta}{2\|x_m\|} + \|y_m\| \right\} + \|x_m\| \frac{\delta}{2\|x_m\|} \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta \end{aligned}$$

Sehingga $\tilde{x} \tilde{y} = \{x_n\} \{y_n\} = \{x_n y_n\} \in \tilde{R}$. Jika, khususnya $\tilde{x} = x \in R, \tilde{y} = y \in R$, dibentuk $x_n = x, y_n = y$, maka disimpulkan bahwa hasilnya serupa dengan hasil di R . Melalui limit pada hubungan dari elemen di ring R , maka adalah suatu ring dan bahwa pertaksamaan

$$\|\tilde{x} \tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\| \|\tilde{y}\| \text{ dipenuhi untuk elemen di ring } \tilde{R} \text{ yaitu:}$$

$\|\tilde{x} \tilde{y}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \|\tilde{x}\| \|\tilde{y}\|$, maka dapat dinyatakan bahwa

$$\|\tilde{x} \tilde{y}\| \leq \|\tilde{x}\| \|\tilde{y}\|.$$

Karena $\tilde{R}$ adalah suatu ruang bernorma yang lengkap, Akibatnya, $\tilde{R}$ adalah suatu ring bernorma yang lengkap yang memuat R sebagai suatu subring.

Ring dinamakan *completion* dari ring R .

Sehingga terbukti bahwa setiap ring bernorma tak lengkap dapat dilekatkan pada suatu ring bernorma lengkap. $\square$

Definisi C.2.2.: Ring Banach (Naimark, 1964)

Suatu ring R dikatakan lengkap jika R adalah suatu ruang bernorma yang lengkap. Suatu ring bernorma yang lengkap dinamakan ring Banach.

2. Homomorfisma kontinu dalam ring bernorma

Pembahasan homomorfisma kontinu dalam ring bernorma akan didahului dengan pembahasan kekontinuan pada ruang bernorma beserta keterkaitan konsep-konsep yang telah dibicarakan sebelumnya di bagian B. (Kerangka Teoritik). Berikut akan dibahas kekontinuan homomorfisma dalam ring bernorma.

Teorema C.2.1.: (Naimark, 1964: 180)

Setiap homomorfisma kontinu $f(x)$ dari ring bernorma R ke ring bernorma R' memenuhi pertaksamaan :

$$\|f(x)\| \leq C\|x\| \text{ dimana } C \text{ adalah suatu konstanta.}$$

Bukti:

Karena $f(x)$ adalah *fungsi* kontinu maka $f(x)$ kontinu di 0 sedemikian sehingga $f(x)$ terbatas (berdasar teorema B.2.2), sehingga $\|f(x)\| \leq C\|x\|$.

Teorema C.2.2.: (Naimark, 1964: 180)

Setiap homomorfisma kontinu $f(x)$ dari ring bernorma R ke ring bernorma R' , dapat diperluas secara tunggal ke homomorfisma kontinu dari *completion* dari ring R ke *completion* dari ring R' .

Bukti:

Karena $f(x)$ adalah *fungsi* kontinu maka $f(x)$ kontinu di 0 sedemikian sehingga $f(x)$ terbatas (berdasar teorema B.2.2), sehingga $\|f(x)\| \leq C\|x\|$.

Teorema C.2.2.: (Naimark, 1964: 180)

Setiap homomorfisma kontinu $f(x)$ dari ring bernorma R ke ring bernorma R' , dapat

diperluas secara tunggal ke homomorfisma kontinu dari *completion* $\tilde{R}$ dari ring R ke *completion* $\tilde{R}'$ dari ring R' .

Bukti:

Karena homomorfisma $f(x)$ secara khusus adalah suatu operator terbatas dari R ke R' , sehingga homomorfisma ini dapat diperluas secara tunggal ke suatu operator linear terbatas dari $\tilde{R}$ ke $\tilde{R}'$, dimana operator ini juga merupakan suatu homomorfisma.

Jika $x, y \in R$; $x_n, y_n \in R$ dan $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ untuk $n \rightarrow \infty$, maka $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $f(y_n) \rightarrow f(y)$, untuk $n \rightarrow \infty$, oleh karenanya melalui limitnya

$$(i) \quad f(x_n y_n) = f(x_n) f(y_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) f(y_n); \text{ di lain pihak bahwa :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x) f(y)$$

$$\text{Sehingga } f(xy) = f(x) f(y)$$

$$(ii) \quad f(x_n + y_n) = f(x_n) + f(y_n)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n); \text{ di lain pihak bahwa :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x) + f(y),$$

$$\text{Sehingga } f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(iii) \quad f(\alpha x_n) = \alpha f(x_n)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha x_n) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n); \text{ di lain pihak bahwa :}$$

$$\alpha \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha f(x), \text{ Sehingga } f(\alpha x_n) = \alpha f(x_n)$$

Sehingga terbukti bahwa setiap homomorfisma kontinu $f(x)$ dari ring bernorma R ke ring bernorma R' , dapat diperluas secara tunggal ke homomorfisma kontinu dari *completion* $\tilde{R}$ dari ring R ke *completion* $\tilde{R}'$ dari ring R' . $\square$

Definisi C.2.1. : Isometrik isomorfisma (Naimark, 1964: 181)

Diberikan R dan R' adalah suatu ring bernorma.

Pemetaan $f(x)$ dari ring bernorma R onto ring bernorma R' dinamakan isometrik isomorfisma (*isometric isomorphism*) jika :

1. $f(x)$ adalah suatu *isomorphism* dari ring R onto ring R' ,
2. $f(x)$ adalah pemetaan isometrik dari ruang bernorma R onto ruang bernorma R' .

3. Representasi reguler dari ring bernorma

Definisi representasi reguler pada ring bernorma sejalan dengan definisi representasi reguler pada ring, yaitu :

Definisi C.3.1.: Representasi regular dari ring bernorma (Naimark, 1964: 181)

Diberikan R adalah ring bernorma dan $a \in R$.

Representasi regular kiri dan kanan $a \rightarrow A_a$ dan $a \rightarrow B_a$ dinyatakan dengan formula $A_a x = ax$ dan $B_a x = xa$.

Teorema C.3.1.: (Naimark, 1964: 181)

Diberikan R adalah suatu ring bernorma dan $\mathcal{B}(R)$ adalah suatu ring yang elemen-elemennya operator-operator terbatas di ruang R

1. suatu representasi regular kiri dari ring bernorma R adalah suatu homomorfisma kontinu dari ring R ke ring $\mathcal{B}(R)$ dari operator linear terbatas di ruang R .
2. suatu representasi regular kanan dari ring bernorma R adalah suatu anti-homomorfisma kontinu dari ring R ke ring $\mathcal{B}(R)$ dari operator linear terbatas di ruang R .

Bukti: 1.

Misalkan A_a adalah representasi regular kiri dari elemen a , yang didefinisikan: $A_a x = ax$. Akan ditunjukkan bahwa bahwa A_a adalah suatu homomorfisma dari ring R ke ring $\mathcal{B}(R)$. kemudian ditunjukkan bahwa representasi regular kiri A_a adalah homomorfisma kontinu yang memenuhi ketaksamaan $\|A_a\| \leq C\|a\|$, untuk suatu konstanta C .

➤ Ditunjukkan bahwa A_a adalah homomorfisma, dengan sebelumnya terlebih dahulu ditunjukkan bahwa adalah fungsi,

o Ambil sebarang $a, b \in R$, untuk $a = b \Rightarrow ax = bx \Rightarrow = \in \mathcal{B}(R)$,

o Dibuktikan adalah suatu homomorfisma,

Ambil sebarang $a, b \in R$,

$$A_{(a+b)}x = (a+b)x = ax + bx = A_a x + A_b x \dots\dots\dots (*)$$

$$A_{ab}x = abx \dots\dots\dots (I)$$

$$(A_a A_b)x = A_a (A_b x) = A_a (bx) = abx \dots\dots\dots (II)$$

dari I dan II maka

$$A_{ab}x = (A_a A_b)x \dots\dots\dots (**)$$

$$A_{aa}x = \alpha ax = \alpha(ax) = \alpha A_a x \dots\dots\dots (***)$$

Dari (*), (**), (***) maka adalah homomorfisma.

➤ Dibuktikan bahwa A_a adalah homomorfisma kontinu.

$$A_a x = ax$$

$$\Rightarrow \|A_a x\| = \|ax\| \Rightarrow \|A_a x\| \leq \|a\| \|x\| \Rightarrow \frac{\|A_a x\|}{\|x\|} \leq \|a\| \Rightarrow \sup_{x \in R} \frac{\|A_a x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in R} \|a\|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in R} \left\| \frac{A_a x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{x \in R} \|a\|$$

Dimisalkan $\frac{x}{\|x\|} = y$ maka $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$, akibatnya

$$\sup_{x \in R} \left\| \frac{A_a x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|A_a y\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|A_a y\| = \|A_a\| \dots \dots \dots (*)$$

$$\sup_{x \in R} \|a\| = \|a\| \dots \dots \dots (**)$$

Dari (*) dan (**) didapatkan bahwa

$$\|A_a\| \leq \|a\| \Rightarrow \|A_a\| \leq \|a\|$$

Maka terbukti bahwa A^a adalah suatu homomorfisma kontinu.

Bukti: 2.

Dimisalkan bahwa B_a adalah suatu representasi reguler setiap elemen a , yang didefinisikan: Akan ditunjukkan bahwa B_a juga merupakan suatu anti-homomorfisma kontinu dari ring R ke ring $\mathcal{B}(R)$.

➤ ditunjukkan bahwa B_a adalah anti-homomorfisma, dengan sebelumnya terlebih dahulu ditunjukkan bahwa B_a adalah fungsi,

- Ambil sebarang $a, b \in R$, untuk $a = b \Rightarrow xa = xb \Rightarrow \in \mathcal{B}(R)$,

- Dibuktikan B_a adalah suatu anti-homorfisma,

Ambil sebarang $a, b \in R$,

$$B_{(a+b)}x = x(a+b) = xa + xb = B_a x + B_b x \dots \dots \dots (*)$$

$$B_{ab}x = xab \dots \dots \dots (I)$$

$$(B_b B_a)x = B_b(B_a x) = B_b(xa) = xab \dots \dots \dots (II)$$

dari I dan II maka

$$B_{ab}x = (B_b B_a)x \dots \dots \dots (**)$$

$$B_{aa}x = x\alpha a = \alpha(xa) = \alpha B_a x \dots \dots \dots (***)$$

Dari (*), (**), (***) maka B_a adalah anti-homomorfisma.

Kedua. Dibuktikan bahwa B_a adalah homomorfisma kontinu.

$$B_a x = xA$$

$$\Rightarrow \|B_a x\| = \|xa\| \Rightarrow \|B_a x\| \leq \|x\| \|a\| \Rightarrow \frac{\|B_a x\|}{\|x\|} \leq \|a\| \Rightarrow \sup_{x \in R} \frac{\|B_a x\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \in R} \|a\|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in R} \left\| \frac{B_a x}{\|x\|} \right\| \leq \sup_{x \in R} \|a\|$$

Dimisalkan $\frac{x}{\|x\|} = y$ maka $\|y\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$, akibatnya

$$\sup_{x \in R} \left\| \frac{B_a x}{\|x\|} \right\| = \sup_{\|y\|=1} \|B_a y\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|B_a y\| = \|B_a\| \dots \dots \dots (*)$$

$$\sup_{x \in R} \|a\| = \|a\| \dots \dots \dots (**)$$

Dari (*) dan (**) didapatkan bahwa

$$\|B_a\| \leq \|a\| \Rightarrow \|B_a\| \leq \|a\|$$

Sedemikian sehingga terbukti bahwa B_a adalah suatu homomorfisma kontinu.

Maka terbukti bahwa representasi reguler kiri maupun kanan dari ring R ke Ring $\mathcal{B}(R)$ adalah suatu anti-homomorfisma kontinu.

D. Penutup

Ring bernorma pada hakikatnya adalah bentuk khusus dari ring yang terbangun dari konsep himpunan, sehingga segala konsep yang terbangun dalam ring bernorma pun sejalan dengan ring. Termasuk di dalamnya mengenai homomorfisma dalam ring bernorma.

Ring bernorma yang tak lengkap dapat dilekatkan pada suatu ring bernorma yang lengkap. Ring bernorma ini dinamakan *completion* $\tilde{R}$ ring bernorma. Lebih lanjut suatu homomorfisma kontinu dari ring bernorma R ke R' dapat diperluas secara tunggal ke *completion* $\tilde{R}$ ke *completion* $\tilde{R}'$. Sedangkan suatu representasi reguler kiri dari ring bernorma adalah suatu homomorfisma dari ring bernorma ke ring $\mathcal{B}(R)$ dari operator –operator linear terbatas pad ruang R dan suatu representasi reguler kanan dari ring bernorma adalah suatu anti-homomorfisma dari ring bernorma ke ring $\mathcal{B}(R)$ dari operator –operator linear terbatas pada ruang R .

Pembahasan pada makalah ini dibatasi pada homorfisma kontinu pada ring bernorma. Konsep homorfisma kontinu masih dapat dilanjutkan pada isomorfisma kontinu, dimana isomorfisma kontinu pada ring Banach R ke R' yang merupakan isomorfisma topologis (*topological isomorphism*).

DAFTAR PUSTAKA

- Darmawijaya, S., 2007, Pengantar Analisis Abstrak, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Debnath, L dan Mikusineksi, P., 1990, Introduction to Hilbert Space With Applications, Academic Press, California.

- Naimark, M.A., 1964, Normed Ring, P., Noordhoff Ltd, Netherlands.
- Park, C-G, Maret 2006, Completion Of Quasi-Normed Algebras and Quasi-normed Module” dalam *Journal of The Chungcheong Mathematical Society*, Volume 19, No. 1.
- Sukirman, 2006, Aljabar Abstrak Lanjut Teori Gelanggang, Hanggar Kreator, Yogyakarta.
- Wahyudin, 1987, Dasar-Dasar Topologi, Transisto, Bandung.
- Yood, B., 2000, Centralizers for Subsets of Normed Algebras, Disertasi, The University of Nottingham, Nottingham.
- Zeidler, E., 1995, Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics, Springer, New York.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PEDOMAN PENULISAN

Kaunia menerima tulisan dalam bentuk artikel atau resensi buku, baik dalam bahasa Indonesia maupun bahasa Inggris. Artikel merupakan hasil penelitian dalam lingkup Sains & Teknologi dalam Islam. Artikel maupun resensi ditulis dengan ketentuan sebagai berikut:

1. Artikel atau resensi belum pernah dipublikasikan dalam sebuah jurnal atau buku.
2. Abstrak ditulis dalam bahasa Inggris dan Indonesia, untuk selanjutnya abstrak yang dimuat hanya yang dalam bahasa Inggris.
3. Diketik menggunakan jenis huruf Times New Roman berukuran 12 point spasi ganda.
4. Pengiriman tulisan berupa *hard copy* dan *soft copy*. File *soft copy* bisa disimpan dalam *Compact Disc* atau dikirim via email.
5. Sistematika penulisan: a) judul, nama penulis, lembaga, alamat email/no telepon; b) abstrak dan kata kunci; c) batang tubuh naskah; c.1) pendahuluan yang meliputi: latar belakang masalah, tujuan dan hipotesis bila ada; c.2) metodologi; c.3) hasil dan pembahasan; d) penutup; d.1) kesimpulan; d.2) saran (bila ada); d.3) ucapan terima kasih (bila ada); e) daftar pustaka; f) lampiran (bila ada).
6. Acuan kepustakaan dilakukan dengan sistem: nama penulis utama, tahun: nomor halaman (sangat dianjurkan dicantumkan nomor halamannya) langsung ke pustaka yang diacu (sistem Harvard). Contoh: Clouarte, 2008: 50
7. Daftar pustaka ditulis dalam urutan abjad secara kronologis tanpaurut (sistem Harvard):
 - a. Untuk buku: nama pokok dan inisial pengarang, tahun terbit, judul buku, jilid buku, edisi, nama penerbit, tempat penerbit.
Contoh:
Foster, S., 2000, *A Field Guide to Medicinal Plants and Herbs*. Second Edition, Houghton Mifflin Company, Boston.
 - b. Untuk karangan dalam buku: nama pokok dan inisial pengarang, tahun, judul karangan, inisial dan nama editor, judul buku, halaman awal dan akhir (karangan), nama penerbit, tempat penerbit.
Contoh:
Hamadeh, M. E., 2008, Predictive Value of Sperm Chromatin Condensation (Aniline Blue Staining) in the Assessment of Male Fertility, Hayes, A. W., *Principles and Methods of Toxicology*, 99 – 104, Taylor and Francis, Boston.
 - c. Untuk karangan dalam majalah atau jurnal: nama pokok dan inisial penulis (jika jumlahnya lebih dari empat orang cukup nama penulis pertama diikuti dengan dkk atau et al), tahun, judul karangan, nama atau singkatan majalah, jilid, nomor serta halaman permulaan awal dan akhir.
Contoh:
LaFrance Jr, et al, 2008, The Use of Herbal Alternative Medicines in Neuropsychiatry, dalam *J Neuropsychiatry Clin Neurosci*, 12, 20 – 50.
 - d. Untuk karangan dalam pertemuan: nama pokok dan inisial pengarang, tahun, judul karangan, nama/singkatan penyelenggara serta tempat pertemuan.
Contoh:
Kohn, F.M., 2008, Nonmedical and Naturopathic Approaches to Treatment of Male Fertility, in *Proceedings of the 7th Andrology Symposium*. Treatment of Male Infertility - Viewpoints, Controversies, Perspectives, Giessen Germany.

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan sebesar-besarnya kepada Yth. Bapak:

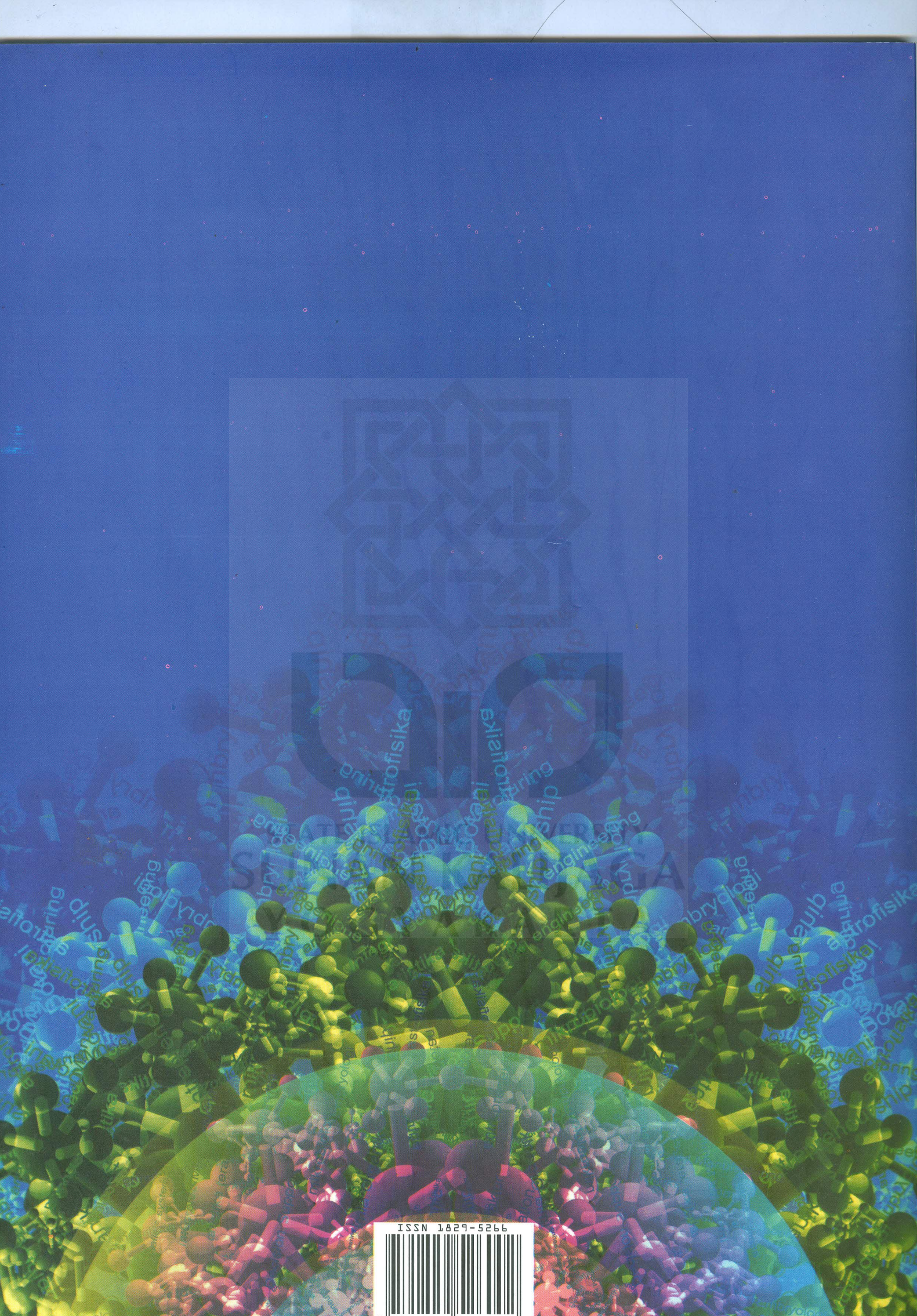
1. Dr.rer.nat. Nurul Hidayat, M.Si. (Jur Kimia-UGM)
2. Bambang P. Rachmadi, S.T., M.Si. (Praktisi)
3. Dr. Indah Emilia (Jur Matematika-UGM)

Atas kerjasama dan perkenannya untuk turut me-*review* artikel-artikel pada edisi Kaunia kali ini.

Hormat kami,

Ketua Penyunting Kaunia

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA



ISSN 1829-5266

