

PENERAPAN GREEDY COLORING ALGORITHM PADA PETA KOTAMADYA YOGYAKARTA BERBASIS FOUR-COLOUR THEOREM

Noor Saif Muhammad Mussafi

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga
Email: om_norsa@yahoo.com

ABSTRAK

Pewarnaan peta merupakan suatu proses pemberian warna pada daerah-daerah pada suatu peta sehingga pada kedua daerah yang berbatasan langsung akan memiliki warna yang berbeda. Dalam hal ini diperlukan warna yang boleh jadi sama banyak dengan jumlah daerah pada kotamadya tertentu yang dapat menyebabkan tidak efisien. Oleh karena itu perlu ditelaah bagaimana penentuan warna pada peta dengan menggunakan warna pada peta seminimal mungkin. Dalam teori graf, persoalan ini dapat direpresentasikan menggunakan graf dual dan pewarnaan graf yang lebih dikenal dengan bilangan kromatik. Penyelesaian masalah bilangan kromatik dapat dianalisis menggunakan algoritma greedy coloring. Penelitian ini bertujuan menerapkan algoritma greedy coloring pada peta Kotamadya Yogyakarta berbasis teorema 4 warna.

Kata kunci: Graf dual, bilangan kromatik, teorema 4 warna, dan algoritma Greedy Coloring.

ABSTRACT

Map coloring is the process of coloring on areas such that any two adjacent areas directly will have a different color. In this case the required color will be as many as the number of specific areas in the city that can cause inefficient. Therefore, it should be examined how the determination of the colors on the map with the minimum number of colors. In graph theory, this problem can be represented using dual graphs and graph coloring known as chromatic number. Troubleshooting the chromatic number can be analyzed using a greedy coloring algorithm. This study aims to apply the greedy coloring algorithm to map the city of Yogyakarta based on four-color theorem.

Keywords: Dual graph, chromatic number, four-colour theorem, and greedy coloring algorithm

1. PENDAHULUAN

Dalam kartografi, suatu peta dianggap baik dan benar jika mudah dimengerti oleh pembacanya yaitu jika dilengkapi dengan legenda, skala peta, judul peta, tata warna, simbol, dan proyeksi peta (Sandy, 1986). Salah satu manfaat tata warna peta yaitu memudahkan seseorang dalam mengenali beberapa negara yang berbatasan langsung. Dalam sebuah peta tergambar wilayah-wilayah yang dimiliki antar negara dan untuk membedakan wilayah antar negara tersebut, digunakan beberapa warna yang berbeda-beda. Jumlah warna yang berlebihan menyebabkan peta menjadi tidak efisien. Untuk itu diperlukan sebuah metode untuk melakukan pewarnaan peta menggunakan jumlah warna minimal.

Dalam teori graf, permasalahan dalam penentuan jumlah warna minimal yang bisa dibuat pada suatu representasi graf dikenal dengan bilangan kromatik (Wilson, 2004). Teori pewarnaan graf dapat diaplikasikan dalam penentuan warna pada sebuah peta yang dikenal sebagai pewarnaan wilayah. Ada beberapa penelitian terdahulu yang berkaitan secara tidak langsung dengan penelitian ini diantaranya (1) Implementasi Algoritma Greedy Untuk Melakukan Graph Coloring: Studi Kasus Peta Propinsi Jawa Timur (Ardiansyah, dkk, 2010), pewarnaan graf menggunakan algoritma greedy berbasis program Java sehingga menghasilkan jumlah warna minimal; (2) The Four Color Theorem (Yuriy Brun, 2002), teorema 4 warna merupakan teorema yang lebih kuat secara konsep jika dibandingkan dengan teorema 5 warna setelah dibuktikan oleh Apple-Haken dengan bantuan komputer; dan (3) Edge Coloring Algorithm (Shin-ichi Nakano, dkk, 2006), pewarnaan graf menggunakan kaidah edge coloring dan presentasi algoritma efisien dengan jumlah warna kurang dari upper bound.

Perbedaan penelitian ini dengan Ardiansyah, dkk yaitu penggunaan analisis Four

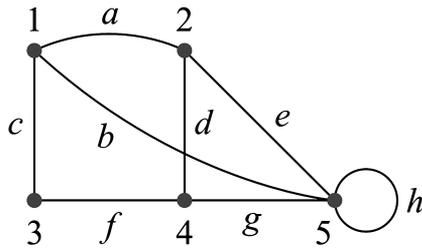
Color Theorem sebagai basis dalam penerapan algoritma greedy dan juga lokasi penelitian. Di samping itu penelitian ini juga menindaklanjuti hasil investigasi Yuriy Brun yang menyatakan bahwa meskipun teorema 4 warna pada awalnya pernah dipatahkan teorema 5 warna oleh John Heawood namun pada akhirnya Apple-Haken mampu membuktikan teorema 4 warna dengan bantuan komputer. Secara khusus penelitian ini juga menggunakan metode vertex coloring yang berbeda dengan Shin-ichi Nakano, dkk yang mengimplementasikan metode edge coloring.

Tujuan dari penelitian ini yaitu menerapkan algoritma greedy coloring pada peta wilayah kotamadya Yogyakarta yang dirilis oleh Badan Informasi Geospasial sehingga diharapkan dapat diperoleh suatu peta alternatif dengan analisis graf. Di samping itu, penerapan algoritma tersebut didasarkan pada teorema 4 warna.

2. GRAF

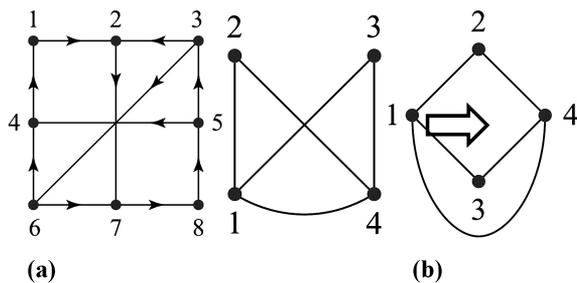
Menurut Ferland (2009), suatu Graf $G = (V, E)$ terdiri dari sepasang himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ sedemikian sehingga $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$.

Notasi $e = \{u, v\}$ menunjukkan simpul u dan v disebut saling adjacent. Dua sisi atau lebih yang menghubungkan satu pasang simpul disebut sisi rangkap (multiple edges). Suatu sisi yang simpul ujungnya sama disebut loop. Graf tanpa sisi rangkap dan tanpa loop disebut graf sederhana (simple graph). Jika diketahui graf $G = (V, E)$ dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,5\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,5\}\}$, maka graf tersebut dapat dinyatakan seperti pada Gambar 1. $|V(G)|$ dan $|E(G)|$ berturut-turut merupakan jumlah elemen pada himpunan simpul dan jumlah elemen pada himpunan sisi.



Gambar 1. Graf G

Graf pada gambar 1 tidak sederhana karena mengandung loop. Derajat suatu simpul v di G , dinyatakan dengan $d(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait dengan v dengan masing-masing loop dihitung sebagai dua sisi yang terkait dengan v . Untuk graf pada Gambar 1, $d(1)=3$, $d(2)=3$, $d(3)=2$, $d(4)=3$, dan $d(5)=5$ dan jumlah derajat simpul di G adalah 16. Graf berarah (*directed graf*) $D=(V,A)$ adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah yang dikenal dengan *arcs* seperti pada Gambar 2.a, (u,v) dan (v,u) menyatakan dua buah sisi yang berbeda, dengan kata lain $(u,v) \neq (v,u)$



Gambar 2. (a) Graf berarah (b) Sirkuit elektrik

Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi-sisinya yang saling berpotongan (Ibrahim dan Mussafi, 2013). Pada gambar 2.b terlihat perbedaan antara sirkuit elektrik dengan kabel berpotongan dan sirkuit elektrik dengan kabel tidak berpotongan. Dalam hal ini sirkuit elektrik dengan kabel tidak berpotongan kemudian disebut sebagai graf planar.

3. PEWARNAAN GRAF

a. Pewarnaan simpul

Misalkan G graf tanpa loop. Suatu pewarnaan- k (pewarnaan simpul) untuk graf G adalah penggunaan sebagian atau semua k warna berbeda untuk mewarnai semua simpul di G sehingga setiap dua simpul yang terhubung langsung diberi warna berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan- k maka G dikatakan dapat diwarnai dengan k warna.

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G , dinyatakan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna (Kolman, 1996). Warna-warna yang digunakan untuk mewarnai dapat dinyatakan dengan bilangan $1, 2, 3, \dots, k$. Jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$, sedangkan cara mudah untuk mencari batas bawah adalah dengan mencari graf bagian komplit terbesar di G . Batas atas dari bilangan kromatik dari graf G , $\chi(G)$, sudah banyak diketahui orang, seperti pada Diestel (2005).

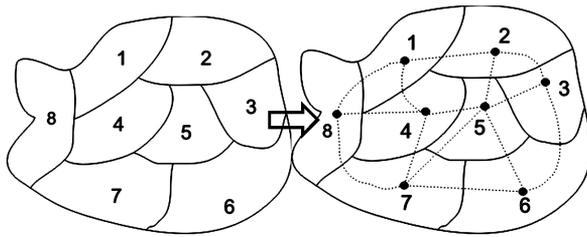
Teorema 1. Jika G adalah graf sederhana dengan derajat simpul maksimum $\Delta(G)$, maka $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Batas tersebut diperbaiki oleh Brook sebagai berikut:

Teorema 2. Misalkan G adalah graf sederhana, terhubung, dan dengan derajat simpul maksimum $\Delta(G)$. Jika G bukan graf komplit dan bukan siklus ganjil, maka $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

b. Graf dual pada peta

Menurut Renaldi Munir (2009) sebuah graf planar G yang direpresentasikan dalam graf bidang, mempunyai graf G^* yang secara geometri merupakan dual dari graf planar. Graf G^* yang terbentuk dengan cara penggambaran demikian disebut graf dual dari graf G . Andaikan diketahui peta M yang terdiri dari 8 daerah a, b, c, d, e, f, g dan h . Gambar 3 menunjukkan suatu peta dan graf dual G^* . Sisi-sisi graf G^* digambarkan dengan garis putus-putus.



Gambar 3. Peta M dan Graf Dual G^*

Langkah-langkah dalam menentukan graf dual G^* yaitu (1) Tentukan satu simpul dalam setiap daerah sebagai wakil dari daerah tersebut dan (2) Bila dua daerah berbatasan, maka hubungkan simpul-simpul yang mewakili kedua daerah yang berbatasan tersebut dengan suatu garis sebagai wakil dari sisi. (Slamet dan Makaliwe, 1991).

c. Teorema 4 warna

Peta pewarnaan graf planar erat kaitannya dengan pewarnaan peta dengan syarat dua daerah yang bertetangga berbeda warna. Suatu fakta yang menjelaskan bahwa tidak akan terjadi pewarnaan pada peta melebihi 4 warna merujuk kepada teorema 4 warna (*Four-Colour Theorem*).

Teorema 3. Jika G adalah graf planar, maka $\chi(G) \leq 4$.

Untuk membuktikan teorema ini secara analisis diperlukan lebih dari 200 halaman. Untuk itu Ferland (2009) sedikit memberikan komentar terhadap teorema tersebut. Teorema 4 warna pertama kali diperkenalkan oleh Francis Guthrie (1831). Secara sederhana Guthrie berfikir bagaimana mewarnai peta sedemikian sehingga dua sebarang negara yang bersebelahan mendapatkan warna yang berbeda. Dua puluh tujuh tahun berikutnya, pembuktian yang keliru dipublikasikan oleh Arthur Kempe (1849). Kesalahan yang dilakukan Kempe diungkap oleh Percy Heawood (1861) yang menjelaskan bahwa argumen Kempe hanya dapat digunakan untuk membuktikan teorema 5 warna. Kemudian baru seabad berikutnya tepatnya pada 1976, Kenneth Appel dan Wolfgang Haken, teorema 4 warna berhasil

dibuktikan. Adapun pembuktian yang mereka ungkapkan terdiri dari ratusan halaman argumen dan memperhatikan sekitar 2000 kasus sedemikian sehingga sulit untuk dicek oleh ahli matematika pada masa tersebut. Namun demikian saat ini pembuktian Appel-Haken diterima dan sudah dapat divalidasi menggunakan komputer.

4. ALGORITMA GREEDY COLORING

Ada beberapa teknik dalam k -pewarnaan graf G berbasis heuristik, salah satunya adalah *greedy algorithm* yang pernah dikritisi nilai probabilitasnya oleh Kucera (1991).

Teorema 4. Apabila d adalah derajat terbesar dari simpul di graf G maka G paling tidak mempunyai warna sebanyak $d + 1$, dengan kata lain bilangan kromatik dari graf G paling banyak $d + 1$, $\chi(G) \leq d + 1$

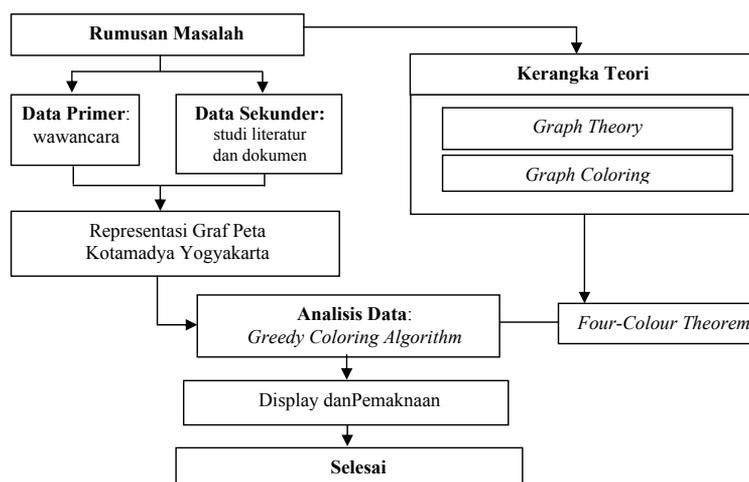
Dalam konteks pewarnaan graf, *greedy algorithm* berarti memberikan warna untuk beberapa cacah derajat simpul berturut-turut dimulai dari derajat terbesar untuk memperoleh cacah pewarnaan paling minimum (A.E.Eiben, 1998). Tomas Zegard (2010) menguraikan skema dari algoritma *greedy coloring* sebagai berikut :

1. Inisialisasi setiap daerah yang telah ditentukan.
2. Melakukan pemilihan simpul yang akan diisi warnanya dengan fungsi seleksi simpul. Prioritas pengerjaan dilihat dari simpul dengan derajat terbesar.
3. Memilih kandidat warna dengan menggunakan fungsi seleksi warna sedemikian sehingga tidak ada simpul bertetangga dengan warna yang sama.
4. Periksa kelayakan warna yang dipilih menggunakan fungsi kelayakan. Jika tidak layak, kembali ke langkah 2. Jika layak, masukkan ke himpunan solusi.
5. Periksa apakah solusi sudah meliputi pewarnaan seluruh simpul. Jika sudah maka algoritma berhenti, dan jika belum maka kembali ke langkah 2.

5. METODE

Penelitian ini bersifat kualitatif berbasis *literature review*. Proses analisis dalam penelitian yang menekankan pada bidang graf ini memperhatikan kaidah-kaidah analisis, pemodelan, dan algoritma. Metode penelitian menggunakan prinsip sampling dan analisis. Objek dari penelitian ini adalah peta yang dirilis lembaga terkait. Analisis data dalam penelitian ini dapat dibagi menjadi dua tahap. Tahap pertama, data yang digunakan adalah informasi yang berkaitan dengan permasalahan pada sektor publik, data ini terlebih dahulu diidentifikasi kelengkapan dan akurasi. Tahap kedua, data yang digunakan adalah nilai-nilai setiap komponen yang dihasilkan pada tahap pertama dan data sekunder, data-data inilah yang akan dianalisis menggunakan pewarnaan graf. Selanjutnya akan diberikan kesimpulan sekaligus rekomendasi atas hasil analisis terkait dengan pewarnaan graf (yang telah dievaluasi).

Lokasi pengambilan data adalah Badan Informasi Geospasial, Kementerian Riset dan Teknologi sebagai instansi yang berwenang terhadap pembuatan peta suatu wilayah. Data primer yang diperoleh yaitu Peta Riil Kotamadya Yogyakarta dari Badan Informasi Geospasial, Kementerian Riset dan Teknologi. Secara umum metodologi penelitian dapat diilustrasikan dalam diagram alir penelitian berikut ini.



Gambar 4. Diagram Alir Penelitian

Untuk proses perhitungan analisis *greedy coloring algorithm* pada tahap pertama di atas diuraikan sebagai berikut:

1. Rekapitulasi hasil di lapangan khususnya terkait dengan peta Kotamadya Yogyakarta yang dirilis oleh Badan Informasi Geospasial, Kementerian Riset dan Teknologi.
2. Transformasi data yang berhasil direkap ke dalam bentuk graf dengan cara menganaliskan kecamatan sebagai simpul dan kecamatan-kecamatan yang saling *adjacent* sebagai sisi.
3. Konstruksi graf tersebut menggunakan analisa algoritma *greedy coloring* untuk menghasilkan graf berwarna.
4. Interpretasi hasil dari representasi graf berwarna.

6. HASIL DAN PEMBAHASAN

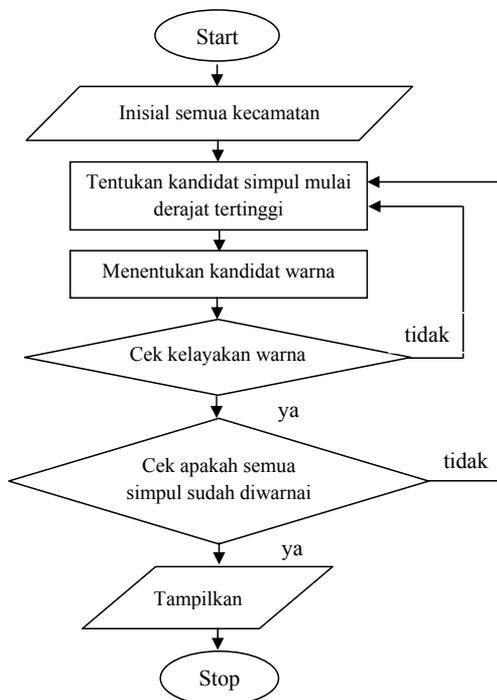
Tata warna pada suatu peta, khususnya peta kotamadya Yogyakarta, menjadi salah satu hal yang penting untuk membedakan antar wilayah. Jumlah warna yang berlebih tentu akan menyebabkan inefisiensi. Untuk itu permasalahan tersebut dapat dikaji pengaturannya menggunakan algoritma *greedy coloring* dengan memperhatikan teorema 4 warna. Untuk lebih jelasnya berikut adalah langkah-langkah aplikasi algoritma *greedy coloring* pada peta kotamadya Yogyakarta.

1. Mentransformasi peta kotamadya Yogyakarta menjadi representasi graf.
2. Merekapitulasi derajat simpul tiap kecamatan di wilayah kotamadya Yogyakarta.
3. Memilih simpul yang akan diwarnai diutamakan dari simpul/kecamatan dengan derajat terbesar.
4. Memilih kandidat warna menggunakan fungsi seleksi warna sedemikian sehingga tidak ada simpul/kecamatan bertetangga memiliki kesamaan warna. Dengan

kata lain warna yang sama dapat digunakan untuk simpul/kecamatan yang tidak bertetangga.

5. Periksa kelayakan warna yang dipilih menggunakan fungsi kelayakan yaitu dengan memperhatikan simpul/kecamatan yang bertetangga. Jika tidak layak, kembali ke langkah 2. Jika layak, masukkan ke himpunan solusi.
6. Jika himpunan solusi sudah meliputi pewarnaan seluruh simpul/kecamatan maka algoritma berhenti. Jika belum maka kembali ke langkah 3.

Secara umum, algoritma *greedy coloring* pada kasus tersebut dapat diilustrasikan dalam *flow chart* seperti pada gambar 5.



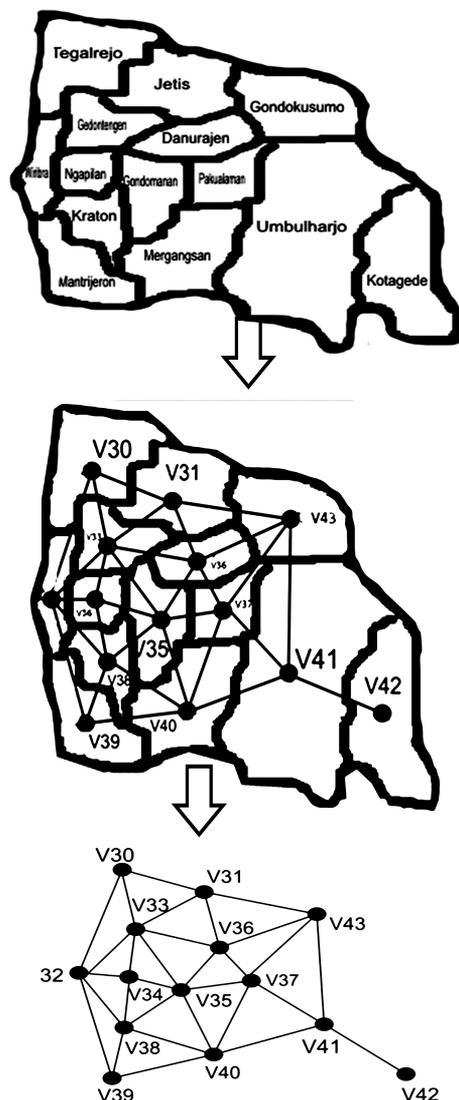
Gambar 5. Flowchart Algoritma Greedy Coloring

Berdasarkan data yang diperoleh dari Badan Informasi Geospasial, diketahui bahwa wilayah kotamadya Yogyakarta dibagi menjadi 14 kecamatan yaitu Tegalrejo, Jetis, Wirobrajan, Gedongtengen, Ngapilan, Gondomanan, Danurejan, Pakualaman, Kraton, Mantrijeron, Mergangsan, Umbulharjo, Kotagede dan Gondokusuman. Selanjutnya kecamatan

tersebut dianalogikan sebagai simpul dengan pelabelan sebagai berikut:

- | | |
|-----------------------|-------------------------|
| v_{30} = Tegalrejo | v_{31} = Jetis |
| v_{32} = Wirobrajan | v_{33} = Gedongtengen |
| v_{34} = Ngapilan | v_{35} = Gondomanan |
| v_{36} = Danurajen | v_{37} = Pakualaman |
| v_{38} = Kraton | v_{39} = Mantrijeron |
| v_{40} = Mergangsan | v_{41} = Umbulharjo |
| v_{42} = Kotagede | v_{43} = Gondokusuman |

Selanjutnya berikut dapat disajikan peta kotamadya Yogyakarta beserta dengan graf dualnya dengan mengasumsikan simpul sebagai kecamatan dan sisi sebagai sebarang dua kecamatan yang berbatasan langsung.



Gambar 6. Peta kotamadya Yogyakarta beserta dengan graf dualnya

Dari graf dual pada gambar 6, maka pewarnaan peta di kotamadya Yogyakarta dapat dilakukan melalui pewarnaan simpul graf dualnya yaitu menggunakan algoritma *greedy coloring*. Dalam hal ini dapat diidentifikasi graf dual $G^* = (V,E)$ memiliki himpunan simpul dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V = \{(v_{30}, v_{31}, v_{32}, v_{33}, v_{34}, v_{35}, v_{36}, v_{37}, v_{38}, v_{39}, v_{40}, v_{41}, v_{42}, v_{43})\}$$

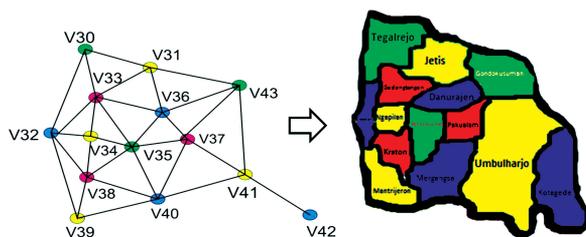
$$E = \{(v_{30}, v_{31}), (v_{30}, v_{32}), (v_{30}, v_{33}), (v_{31}, v_{33}), (v_{31}, v_{36}), (v_{31}, v_{43}), (v_{32}, v_{33}), (v_{32}, v_{34}), (v_{32}, v_{38}), (v_{32}, v_{39}), (v_{33}, v_{34}), (v_{33}, v_{35}), (v_{33}, v_{36}), (v_{34}, v_{35}), (v_{34}, v_{38}), (v_{35}, v_{36}), (v_{35}, v_{37}), (v_{35}, v_{38}), (v_{35}, v_{40}), (v_{36}, v_{37}), (v_{36}, v_{43}), (v_{37}, v_{40}), (v_{37}, v_{41}), (v_{37}, v_{43}), (v_{38}, v_{39}), (v_{38}, v_{40}), (v_{39}, v_{40}), (v_{40}, v_{41}), (v_{41}, v_{42}), (v_{41}, v_{43})\}$$

Selanjutnya akan ditentukan jumlah derajat dari masing-masing kecamatan pada peta kotamadya Yogyakarta secara berurutan.

Simpul	v_{30}	v_{31}	v_{32}	v_{33}	v_{34}	v_{35}	v_{36}	v_{37}	v_{38}	v_{39}	v_{40}	v_{41}	v_{42}	v_{43}
Derajat	3	4	5	5	4	5	5	5	5	3	5	4	1	4

Tabel 1. Jumlah derajat dari masing-masing kecamatan

Berdasarkan tabel 1 ditemukan tujuh simpul dengan derajat terbesar 5 yaitu $v_{32}, v_{33}, v_{34}, v_{35}, v_{36}, v_{37}, v_{38}$ dan v_{40} . Misal dipilih v_{32} sebagai warna biru sehingga secara berurutan v_{36}, v_{40} juga dapat diberikan warna yang sama yaitu biru.



Gambar 7. Hasil pewarnaan graf dan alternatif peta kotamadya Yogyakarta

Diikuti dengan simpul berderajat 4 yaitu v_{31}, v_{34} dan v_{41} yang mendapat warna kuning. Demikian selanjutnya sehingga diperoleh

graf baru yang sudah diberi warna (lihat gambar 7) dan hasil penerapannya pada peta kotamadya Yogyakarta dengan bilangan kromatik $\chi(G) = 4$. Hal ini sesuai dengan kaidah teorema 4 warna yang menyatakan bahwa pada setiap graf planar terdapat sebanyak-banyaknya 4 warna.

7. KESIMPULAN DAN SARAN

1. Penerapan algoritma *greedy coloring* pada peta kotamadya Yogyakarta menghasilkan suatu peta alternatif dengan tata warna berjumlah 4 warna yaitu merah, kuning, hijau, dan biru. Secara khusus representasi masing-masing warna dapat disajikan sebagai berikut:

- a. Warna merah merepresentasikan kecamatan Gedongtengen, Pakualaman, dan Kraton;
- b. Warna kuning merepresentasikan kecamatan Jetis, Mantriweron, Ngampilan, dan Umbulharjo;
- c. Warna hijau merepresentasikan kecamatan Tegaltrejo, Gondokusuman,

- d. Warna biru merepresentasikan kecamatan Wirobrajan, Danurejan, Mergangsari, dan Kotagede.

2. Hasil analisis algoritma *greedy coloring* pada kasus peta kotamadya Yogyakarta menunjukkan bahwa banyaknya warna minimum yang dapat dibuat yaitu 4 warna, maka bilangan kromatik pada graf tersebut $\chi(G) = 4$. Hasil ini berkesesuaian dengan teorema 4 warna pada suatu bidang.

3. Untuk penelitian lebih lanjut disarankan agar dibuat suatu pemrograman komputer yang mendukung algoritma *greedy coloring* sedemikian sehingga dapat menyelesaikan permasalahan pewarnaan peta untuk n wilayah dalam jumlah besar.

8. DAFTAR PUSTAKA

- A.E. Eiben, dkk. 1998. *Graph Coloring with Adaptive genetic Algorithm*. CiteSeer^x Digital Library.
- Ardiansyah, dkk. 2010. Implementasi Algoritma Greedy Untuk Melakukan Graph Coloring: Studi Kasus Peta Propinsi Jawa Timur. *Jurnal Informatika* Vol. 4 No. 1.
- Diestel Reinhard. 2005. *Graph Theory* (3rd ed.). New York: Springer-Verlag.
- L. Kucera. 1991. *The greedy coloring is a bad probabilistic algorithm*. *Journal of Algorithms*. 12:674-684.
- Ferland. 2009. *Discrete Mathematics: An Introduction To Proofs And Combinatorics*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- I Made Sandy. 1986. *Esensi Kartografi*. Jakarta: Jurusan Geografi FMIPA UI.
- Ibrahim dan Noor Saif M. Mussafi. 2013. *Pengantar Kombinatorika dan Teori Graf*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kolman, B., Busby, R.C., and Ross, Sharon. 1996. *Pearls in graph theory : A Comprehensive introduction*. New York: Academic Press.
- Munir, Rinaldi. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Shin-ichi Nakano dan Takao Nishizeki. 1994. *Edge Coloring Problem for Graphs*. *Interdisciplinary Information Sciences*. Vol. 1 No. 1.
- Slamet, S. dan Makaliwe, H. 1991. *Matematika Kombinatorik*. Jakarta: Gramedia.
- Sutarno, dkk. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Tucker, A. 1995. *Applied Combinatoric*. Second edition. New York : John Wiley and Sons.
- Wilson, R.J. 1985. *Introduction to Graph Theory*. Third edition. New York: John Wiley and Sons.
- Wilson, A.Robert. 2004. *Graphs, Colourings and the Four-Colour Theorem*. Oxford University Press Inc: New York.
- Yuriy Brun. 2002. *The Four-Color Theorem*. *Undergraduate Journal of Mathematics*. pages 21–28.
- Zegard Tomas. 2010. *Greedy Graph Coloring and Parallel FEM Assembly*. UIUC.