

SKRIPSI

**PENERAPAN FUNGSI BESSEL DALAM PERPINDAHAN
PANAS PADA SETENGAH SILINDER**



ARIF WIDODO

09610017

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2014

**PENERAPAN FUNGSI BESSEL DALAM PERPINDAHAN
PANAS PADA SETENGAH SILINDER**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

ARIF WIDODO

09610017

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2014



PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/214/2014

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Penerapan Fungsi Bessel dalam Perpindahan Panas pada Setengah Silinder

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Arif Widodo
NIM : 09610017
Telah dimunaqasyahkan pada : 03 Januari 2014
Nilai Munaqasyah : B
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Sugiyanto, M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Mochammad Abrori, S.Si, M.Kom
NIP.19720423 199903 1 003

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Yogyakarta, 23 Januari 2014
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan



Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Arif Widodo

NIM : 09610017

Judul Skripsi : Penerapan Fungsi Bessel Dalam Perpindahan Panas
Pada Setengah Silinder.

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 2 Desember 2013

Pembimbing

Sugiyanto, S.T, M.Si

NIP. 19800505 200801 1 028

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Arif Widodo
NIM : 09610017
Prodi / Smt : Matematika / IX
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 1 Oktober 2013

Yang menyatakan



Arif Widodo

NIM: 09610017



Skripsi ini penulis persembahkan untuk

- Ibuku Tarminah dan bapakku Karsono tercinta yang telah mencurahkan jiwa dan raganya selama ini
- Kakak-kakaku Mas Yono, Mas Trisno, Mba Tuti, Mba Yani, Mas Toto yang telah memberiku pengalaman yang sangat berharga
- Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

MOTTO

"Mimpi adalah suatu kepastian yang harus dikejar"

"Hidup itu adalah pilihan, dan di dalam suatu pilihan pasti ada tanggung jawab
yang harus digenggam"

"Pohon akan cepat tumbuh berkembang jika tak hidup berjejeran dengan
induknya"

"Kebersamaan yang indah muncul dari kesadaran tentang asyiknya perbedaan"

(K.H. Anwar Zahid)



KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi umat Islam.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana Program Studi Matematika. Skripsi ini berisi tentang pembahasan mengenai Penerapan Fungsi Bessel dalam Perpindahan Panas pada Setengah Silinder. Penyusunan skripsi ini mendapat bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih disampaikan sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Muchammad Abrori S.Si., M.kom selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak Sugiyanto S.T.,M.Si. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan, arahan, bantuan, dan ilmu dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak M. Farhan Qudratulloh M.Si. selaku dosen penasihat akademik yang telah membimbing selama perkuliahan.
5. Bapak/Ibu Dosen dan Staf Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta atas ilmu, bimbingan dan pelayanan selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini selesai.
6. Ibu, Bapak dan keluargaku atas pengertian, bantuan, dan dukungan sehingga penyusunan skripsi ini dapat selesai.

7. Mas Bayu Adhi Pratama S.Si. dan Mas Ari Dwi Hartanto yang telah mengajari program Latex dalam penyusunan skripsi ini.
8. Kakakku Toto Sujatmiko yang telah memberikan semangat serta inspirasi untuk menyelesaikan skripsi ini.
9. Mba eky yang telah memotivasi dan membantu dalam penulisan skripsi ini.
10. Sahabatku Amin, Widi, Fauzi, Slamet, Anis, Fitri, Puji, Tyas, Elvira, dan teman-teman Matematika angkatan 2009 lainnya yang telah memberi warna, bantuan dan dukungan selama ini.
11. Teman-teman kontrakan Tomi, Kiwul, Arif, terima kasih atas semangat dan dukungan selama ini.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Namun demikian, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, 3 Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI	iii
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN	xii
ABSTRAK	xiii
I PENDAHULUAN	1
1.1. LATAR BELAKANG	1
1.2. BATASAN MASALAH	2
1.3. RUMUSAN MASALAH	2
1.4. TUJUAN PENELITIAN	3
1.5. MANFAAT PENELITIAN	3
1.6. TINJAUAN PUSTAKA	3
1.7. METODE PENELITIAN	4
1.8. SISTEMATIKA PENULISAN	4

II	LANDASAN TEORI	6
2.1.	PERSAMAAN DIFERENSIAL	6
2.2.	PERSAMAAN BESSEL	10
2.3.	PERSAMAAN CAUCHY-EULER	13
2.4.	METODE SEPARASI VARIABEL	15
2.5.	KOEFISIEN FOURIER	20
III	PEMBAHASAN	21
3.1.	PEMBENTUKAN PERSAMAAN PANAS TIGA DIMENSI	21
3.2.	TRANSFORMASI KOORDINAT KARTESIUS KE KOORDINAT SILINDER	25
3.3.	PENYELESAIAN DENGAN METODE SEPARASI VARIABEL	30
IV	PENUTUP	43
4.1.	KESIMPULAN	43
4.2.	SARAN	44

DAFTAR GAMBAR

- 3.1 Perubahan volume pada benda tiga dimensi. 22
- 3.2 Bidang setengah silinder yang tertutup 25



DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN

$\frac{dy}{dx}$: Turunan fungsi y terhadap variabel bebas x
e	: Eksponensial
C_1	: Konstanta
i	: Imaginer
\sin	: Sinus
$n!$: n Faktorial
$\Gamma(x)$: Fungsi Gamma x dibaca "tho"
λ	: Parameter
J_n	: Fungsi Bessel jenis pertama order n
Y_n	: Fungsi Bessel jenis kedua order n
I_n	: Modifikasi fungsi Bessel jenis pertama order n
K_n	: Modifikasi fungsi Bessel jenis kedua order n
$u(x, y, z, t)$: Fungsi u dengan variable bebas x, y, z, t
Δm	: Perubahan massa
H	: Kalor/panas
A	: Luas permukaan
V	: Volume benda
a^2	: Difusitas thermal bahan
r	: Jari-jari
θ	: Kelengkungan selimut
z	: Tinggi

ABSTRAK

Fungsi Bessel merupakan solusi dari persamaan diferensial Bessel. Fungsi ini dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah getaran, medan elektromagnetik, perpindahan panas dan lain sebagainya. Pada skripsi ini, fungsi Bessel akan diterapkan untuk mengetahui perpindahan panas pada setengah silinder.

Model matematika untuk menggambarkan perpindahan panas di setengah silinder adalah suatu persamaan panas tiga dimensi. Persamaan tersebut kemudian di-transformasi ke dalam koordinat silinder. Hal ini disesuaikan dengan bentuk bidang setengah silinder. Penyelesaian diperoleh menggunakan metode separasi variabel.

Solusi persamaan panas yang diperoleh mengandung fungsi Bessel jenis pertama order n dengan parameter λ . Pada keadaan *steady state*, solusi tersebut merepresentasikan suhu di bidang setengah silinder pada jari-jari, sudut kelengkungan dan tinggi setiap waktu.

Kata Kunci : *persamaan panas koordinat silinder, fungsi Bessel jenis pertama order n dengan parameter λ , perpindahan panas di setengah silinder.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. LATAR BELAKANG

Persamaan Diferensial (PD) seringkali muncul dalam model Matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum alam dan hipotesa yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa Matematika. Salah satu contoh dari penerapan PD yaitu dalam ilmu Fisika khususnya tentang perpindahan panas.

Perpindahan panas adalah perpindahan energi yang terjadi karena perbedaan temperatur pada suatu benda. Terdapat tiga cara perpindahan panas yaitu konduksi, konveksi, dan radiasi. Konduksi yaitu perpindahan panas dengan perantara zat padat pada benda padat. Konveksi yaitu perpindahan panas dengan perantara zat cair/gas. Radiasi yaitu perpindahan panas tanpa melalui zat perantara.

Contoh peristiwa perpindahan panas yaitu terdapat pada transistor. Menurut (Suwarno, 1987) transistor merupakan salah satu elemen dalam elektronik yang berguna untuk mengendalikan arus listrik. Setiap transistor yang sedang bekerja, suhunya akan menjadi naik dan kenaikan suhu ini tidak boleh melebihi $70^{\circ}C$. Jika transistor panas maka kinerjanya melemah dan pemakaian aliran listrik menjadi besar yang berarti pemborosan terhadap pemakaian listrik. Oleh karena itu perlunya mengetahui penyebaran suhu pada transistor agar tidak terjadi penumpukan panas yang berlebihan. Transistor yang akan dikaji pada skripsi ini berbentuk setengah silinder. Definisi silinder secara umum adalah dua buah kurva tertutup yang saling sejajar dan sebuah persegi panjang yang mengelilingi kedua kurva tersebut.

Fungsi Bessel adalah solusi dari PD Bessel. Fungsi Bessel pertama kali di-

temukan dan dikembangkan oleh astronom dan matematikawan Jerman yang bernama Friedrich Wilhelm Bessel. Pada tahun 1826, fungsi Bessel dipublikasikan dalam bentuk makalah. Pada makalah tersebut dijelaskan bahwa fungsi ini dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah getaran, medan elektronik, perpindahan panas dan sebagainya.

Hal-hal di atas yang melatarbelakangi penulisan skripsi ini yaitu mengenai penerapan fungsi Bessel untuk mengetahui perpindahan panas pada setengah silinder. Penulis berharap dengan adanya skripsi ini dapat memberikan pengetahuan mengenai penerapan fungsi Bessel.

1.2. BATASAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang di atas supaya pembahasan tidak melebar, maka penulis hanya akan membahas tentang Penerapan Fungsi Bessel order n dengan parameter λ dalam perpindahan panas di setengah silinder untuk keadaan *steady state*. Setengah silinder yang dimaksud adalah bangun ruang tiga dimensi yang dibentuk oleh dua buah setengah lingkaran identik yang sejajar dan sebuah persegi panjang yang mengelilingi kedua setengah lingkaran tersebut. Oleh karena itu, dapat disebut juga sebagai setengah tabung yang memiliki jari-jari r , sudut kelengkungan θ , dan tinggi z .

1.3. RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah, maka dapat dirumuskan permasalahan yaitu : Bagaimana Penerapan Fungsi Bessel order n dengan parameter λ dalam perpindahan panas di setengah silinder untuk keadaan *steady state*?

1.4. TUJUAN PENELITIAN

Tujuan dari penelitian ini yaitu mengetahui penerapan Fungsi Bessel dalam perpindahan panas pada setengah silinder.

1.5. MANFAAT PENELITIAN

Berdasarkan tujuan penulisan di atas maka manfaat dari penelitian ini yaitu sebagai referensi dengan penjelasan matematis yang dapat digunakan untuk mempertimbangkan komposisi bahan dan ukuran dalam pembuatan transistor setengah silinder agar sesuai dengan kapasitas kegunaannya.

1.6. TINJAUAN PUSTAKA

Penulisan skripsi ini ditinjau dari beberapa penelitian sebelumnya antara lain:

Jurnal Eminugroho R., Fitriana Yuli S., Dwi Lestari Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY dengan judul "Aplikasi Persamaan Panas pada Sterilisasi Minuman Kemasan". Jurnal ini membahas tentang perpindahan panas yang mempunyai solusi berbentuk fungsi Bessel order nol. Selanjutnya solusi tersebut disimulasikan dengan bantuan program MAPLE 12.

Skripsi Faisnain Agitha Rakhmasari lulusan Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta tahun 2009 yang berjudul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Bessel Orde Nol dengan Transformasi Laplace dan Metode Frobenius serta penerapannya". Dalam skripsi tersebut membahas 2 metode yaitu Transformasi Laplace dan Metode Frobenius untuk mencari penyelesaian PD Bessel orde Nol serta diterapkan dalam bidang fisika yaitu mengenai gambaran matematis dari efek kulit pada sebuah kabel.

Perbedaan penelitian ini dengan sebelumnya yaitu pada penelitian sebelumnya menggunakan PD Bessel order nol, sedangkan pada penelitian ini menggunakan PD Bessel order n dengan parameter λ . Selain itu, pada penelitian sebelumnya di-

terapkan untuk mengetahui gambaran matematis dari efek kulit pada sebuah kabel, sedangkan pada penelitian ini diterapkan untuk mengetahui perpindahan panas pada setengah silinder.

1.7. METODE PENELITIAN

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian studi literatur. Sumber data yang digunakan dalam skripsi ini adalah sumber-sumber tertulis berupa buku maupun penelitian lain yang mendukung skripsi ini. Langkah-langkah dalam pembahasan penelitian ini antara lain:

1. Menguraikan landasan teori yang digunakan
2. Membentuk persamaan panas tiga dimensi koordinat kartesius
3. Transformasi koordinat kartesius ke koordinat silinder
4. Menguraikan batasan masalah yang digunakan secara matematis
5. Menyelesaikan persamaan dengan metode separasi variabel
6. Menganalisis hasil
7. Mengambil kesimpulan dan menyusun skripsi ini.

1.8. SISTEMATIKA PENULISAN

Pada penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pada Bab ini terdiri dari delapan subbab yaitu : latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB I LANDASAN TEORI

Pada bab landasan teori ini berisi tentang teori-teori yang digunakan dalam pemba-

hasan skripsi ini, diantaranya : Persamaan Diferensial, Persamaan Bessel, Persamaan Cauchy-Euler, Metode Separasi Variabel, Koefisien Fourier.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini menjelaskan pembentukan persamaan panas tiga dimensi, transformasi koordianat kartesius ke koordinat silinder, dan penyelesaian menggunakan Metode Separasi Variabel.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.



BAB IV

PENUTUP

4.1. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dipaparkan dalam skripsi ini yaitu tentang penerapan Fungsi Bessel dalam perpindahan panas pada setengah silinder, maka dapat diambil kesimpulan bahwa penerapan Fungsi Bessel order n dengan parameter λ dalam perpindahan panas pada setengah silinder menghasilkan persamaan

$$u(r, \theta, h, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin n\theta \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} J_n(\lambda_{nm}r) \sinh \lambda_{nm}h \right]$$

dengan

$$C_{nm} = \frac{\int_0^b r G_n(r) J_n(\lambda_{nm}r) dr}{(b^2/2) \sinh \lambda_{nm}h J_{n+1}^2(\lambda_{nm}b)}$$

dan

$$J_n(\lambda_{nm}r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda_{nm}r)^{n+2m}}{2^{n+2m} \cdot m! (n+m)!}$$

Fungsi $J_n(\lambda_{nm}r)$ merupakan fungsi Bessel jenis pertama order n dengan parameter λ_{nm} dan C_{nm} merupakan nilai koefisiennya. Pada keadaan *steady state* persamaan $u(r, \theta, h)$ menyatakan suhu pada posisi r, θ, h setiap waktu t dengan r adalah jari-jari silinder, θ adalah derajat kelengkungan silinder, h adalah tinggi/panjang silinder. Selain itu diberikan kondisi awal

$$u(r, \theta, z, 0) = 0$$

dan kondisi batas

$$u(0, \theta, z) = u(b, \theta, z) = 0,$$

$$u(r, 0, z) = u(r, \pi, z) = 0,$$

$$u(r, \theta, 0) = 0, (r, \theta, h) = f(r, \theta).$$

4.2. SARAN

Berdasarkan pada penulisan skripsi ini, maka saran-saran yang dapat disampaikan adalah :

1. Skripsi ini hanya membahas pada keadaan *steady state*. Oleh karena itu dapat dikembangkan lagi pada keadaan *unsteady state*.
2. Skripsi ini dapat dikembangkan lagi untuk kondisi awal dan kondisi batas yang lain. Misalnya kondisi awal

$$u(r, \theta, z, 0) = 100$$

kondisi batas

$$u(0, \theta, z) = u(L, \theta, z) = 0,$$

$$u(r, 0, z) = u(r, \pi, z) = \sin\theta,$$

$$u(r, \theta, 0) = u(r, \theta, h) = 10.$$

DAFTAR PUSTAKA

- Marwan, Munzir Said. 2009. *Persamaan Diferensial Biasa Edisi Pertama*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Murray, Spiegel R. 2005. *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan Edisi SI Metrik*. Jakarta : Erlangga.
- Nugroho, Didit Budi. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Nurrani, Dwi Asih. 2011. *Persamaan Diferensial Bessel dan Penerapannya pada Frekuensi Alami Membran Berbentuk Cincin*. Yogyakarta : UIN SUKA Press.
- Soedjo, Peter. 1995. *Asas-Asas Matematika Fisika dan Teknik*. Yogyakarta : Gadjah Mada University Press.
- Suwarno. 1987. *Teknik Pesawat Radio Transistor*. Jakarta : Bina Aksara.
- Wylie, C. Ray. dan Louis C. Barret. 1995. *Advanced Engineering Mathematics*. United States of America : McGraw-Hill Inc.