APLIKASI FUNGSI BESSEL TERMODIFIKASI
PADA PERPINDAHAN KALOR PIN SEGITIGA LURUS

SKRIPSI

untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh :

<u>FITRI NURHAYATI</u>

09610002

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2014

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Fitri Nurhayati

NIM : 09610002

Judul Skripsi : Aplikasi Fungsi Bessel Modifikasi Pada Perpindahan Kalor Pin Segitiga Lurus

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 2 Januari 2014

Pembimbing

Sugiyanto, S.T, M.Si

NIP. 19800505 200801 1 028

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/351/2014

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul	:	Aplikasi Fungsi Bessel Termodifikasi pada Perpindahan Kalor Pin Segitiga Lurus
Yang dipersiapkan dan disusun oleh	:	
Nama	:	Fitri Nurhayati
NIM	:	09610002
Telah dimunaqasyahkan pada	:	21 Januari 2014
Nilai Munaqasyah	:	B+

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Sugiyanto, M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP.19800402 200501 1 003

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Yogyakarta, 04 Februari 2014
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	Fitri Nurhayati
NIM	:	09610002
Prodi / Smt	:	Matematika / IX
Fakultas	:	Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 26 September 2013

Yang menyatakan

METERAI TEMPEL

24E16ABF795475270

6000 DJP

Fitri Nurhayati

NIM: 09610002

MOTTO

Syukurilah kesulitan, karena terkadang kesulitan mengantar kita pada hasil yang lebih baik dari apa yang kita bayangkan

- Adi Wijaya-

Boleh jadi Allah akan mengabulkan harapan kita dengan tidak memberi apa yang kita inginkan, karena Dia Maha Tahu bahaya yang akan menimpa dibalik keinginan kita

-Aa Gym-

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

- *Kedua Orang tua, Bapak Susamto S.Pd.I dan Ibu Parti.*
- *Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan segala rahmat, nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi ini dalam rangka mengabdi kepada-Nya. Sholawat beserta salam tak lupa penulis panjatkan kepada suri tauladan umat manusia sepanjang masa, Rasulullah SAW sang revolusioner sejati yang menjadi inspirasi setiap saat dalam memperbaiki umat manusia menuju masyarakat islami.

Alhamdulillah, akhirnya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **”Aplikasi Fungsi Bessel Termodifikasi pada Perpindahan Kalor Pin Segitiga Lurus”** ini. Namun, tidak dapat dipungkiri bahwa skripsi ini dapat penulis buat dengan bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, atas dukungan dan bantuan tersebut maka penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak Sugiyanto, S.T, M.Si selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu dan tenaga untuk memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Segenap staf dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.

5. Bapak Susamto, S.Pd.I dan Ibu Parti, Aziz dan Ulum serta seluruh keluarga yang telah memberikan dorongan baik moril maupun materiil selama penulis menimba ilmu di FST UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
6. Ibu Pipit yang selalu membantu memberi solusi dan semangat untuk terus melanjutkan skripsi ini.
7. Mbak Eki dan mas Dodo yang senasib sepenanggungan, selalu memberi semangat dan dukungan untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat atas keceriaan, dukungan, tempat curhat dan semangat yang kalian berikan.
9. Ismail atas waktu dan tutorial singkat yang sangat bermanfaat.
10. Seluruh teman-teman Matematika 2009, untuk kebersamaan kita selama menimba ilmu di FST UIN Sunan Kalijaga selama ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per-satu yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini.

Dengan penuh kesadaran bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, saran dan kritik yang membangun dan mengarahkan untuk lebih baik, penulis terima dengan tangan terbuka. Walaupun demikian, penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat. Amin.

Yogyakarta, 1 Januari 2014

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\Gamma(\sim)$	:	Fungsi Gamma dari ~ (dibaca *"tho"*)
$J_0(x)$	:	Fungsi Bessel jenis pertama order nol
$J_v(x)$	:	Fungsi Bessel jenis pertama order *v*
$Y_0(x)$	:	Fungsi Bessel jenis kedua order nol atau fungsi Naumann order nol
$Y_v(x)$	:	Fungsi Bessel jenis kedua order *v*
$\mathbf{Y}_0(x)$	:	Fungsi Bessel Jenis kedua order nol atau Fungsi Weber order nol.
a	:	Tinggi pin
b	:	Ketebalan pin
h	:	Koefisien perpindahan panas secara konveksi
k	:	Konduktifitas termal
l	:	Panjang pin
x	:	Kehilangan kalor dari Δx ke ujung pin
Δx	:	Terjadinya keseimbangan kalor
$x+\Delta x$	:	Perpindahan kalor dari dinding ke Δx
I_0	:	Fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama order nol
K_0	:	Fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua order nol
u	:	Suhu permukaan

u_0	:	Suhu udara
U	:	Distribusi suhu
q_0	:	Aliran kalor konduksi pin segitiga lurus
q_1	:	Aliran kalor konduksi pin segitiga lurus atau pin ideal
¦	:	Efisiensi pin
¥	:	Konstanta Euler

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Persamaan diferensial Bessel memiliki penyelesaian yang disebut fungsi Bessel. Fungsi Bessel terdiri dari fungsi Bessel jenis pertama, fungsi Bessel jenis kedua, fungsi Bessel jenis ketiga, dan fungsi Bessel termodifikasi. Penelitian ini menyajikan satu aplikasi fungsi Bessel termodifikasi pada perpindahan kalor pin segitiga lurus.

Persamaan diferensial pin segitiga lurus menggambarkan tentang distribusi temperatur sepanjang pin yang diperoleh dari dasar-dasar perpindahan kalor konduksi dan konveksi. Persamaan diferensial tersebut akan ditransformasi ke persamaan umum persamaan diferensial Bessel.

Penyelesaian persamaan diferensial pin segitiga lurus adalah fungsi Bessel termodifikasi order nol. Selanjutnya fungsi Bessel termodifikasi yang diperoleh digunakan untuk memperoleh efisiensi pin yang dapat diartikan sebagai perbandingan laju aliran kalor konduksi pin dibagi dengan laju aliran kalor konveksi pin ideal.

Kata Kunci: *fungsi bessel termodifikasi order nol, pin segitiga lurus, efisiensi pin segitiga lurus.*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model Matematika. Persamaan Diferensial (PD) merupakan persamaan yang memuat turunan-turunan dari suatu fungsi. Fungsi tersebut biasa dilambangkan dengan $y(x)$ dengan x variabel bebas dan y variabel bergantung.

Persamaan diferensial Bessel merupakan persamaan diferensial linier homogen tingkat dua. Penyelesaian persamaan diferensial Bessel disebut dengan Fungsi Bessel. Fungsi Bessel pertama kali didefinisikan oleh Daniel Bernouli dan disempurnakan oleh Freidrich Welhem Bessel tahun 1826 (Mclachlan, 1955: 2). Fungsi Bessel memiliki peranan yang penting dalam berbagai permasalahan seperti: gelombang elektromagnetik, konduksi panas, pin pendingin, dan lain-lain. Pada pin pendingin, fungsi Bessel dapat diterapkan pada pin segiempat, pin segitiga lurus, pin melingkar, dan lain-lain.

Pada skripsi ini dibahas mengenai pin segitiga lurus yang merupakan sebuah pin logam berbentuk prisma segitiga yang menempel pada suatu dinding dan berguna untuk memindahkan panas sehingga keluar dari mesin ke lingkungan sekitarnya (Wylie, 1976: 822). Persamaan diferensial pin segitiga lurus diperoleh dari distribusi temperatur secara konduksi dan konveksi. Persamaan pin segitiga lurus yang diperoleh berupa persamaan Bessel termodifikasi. Oleh karena itu, penyelesaian dari persamaan pin segitiga lurus adalah suatu fungsi Bessel termodifikasi yang disebut sebagai distribusi temperatur sepanjang pin. Distribusi temperatur tersebut berguna untuk menjaga mesin agar tetap stabil dan tidak *overheat* karena akan mempengaruhi kinerja mesin. Fungsi Bessel yang didapat, selanjutnya digunakan untuk memperoleh efisiensi pin. Efisiensi pin dapat diartikan sebagai perbandingan laju aliran kalor konduksi pin dibagi dengan laju aliran kalor konveksi pin ideal (Thirumaleshwar, 2009: 250).

1.2. Batasan Masalah

Aplikasi fungsi Bessel termodifikasi yang akan dibahas pada skripsi ini dibatasi pada pin yang sangat tipis, dalam keadaan tunak (*steady state*) dan pin berada pada satu dimensi.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

Bagaimana aplikasi fungsi Bessel termodifikasi pada perpindahan kalor pin segitiga lurus?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan ini yaitu:

Mengetahui solusi atau penyelesaian persamaan diferensial pin segitiga lurus yang merupakan fungsi Bessel termodifikasi order nol.

1.5. Manfaat Penelitian

Berdasarkan tujuan penulisan di atas maka manfaat yang dapat diambil dari penulisan ini yaitu:

1) Skripsi ini dapat memberikan informasi tentang distribusi temperatur pada suatu pin segitiga lurus dengan penerapan fungsi Bessel termodifikasi.
2) Dapat mengetahui efisiensi pin segitiga lurus.
3) Dapat digunakan sebagai bahan referensi dalam perkembangan ilmu pengetahuan, khususnya matematika.

1.6. Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka skripsi ini terdiri dari beberapa jurnal dan skripsi sebagai referensi pelengkap guna menunjang kelengkapan penelitian.

Adapun penelitian sebelumnya yang menjadi acuan penulis antara lain jurnal yang menjadi rujukan utama adalah jurnal yang ditulis oleh Dr. Somnuk Theerakulpisut (1995) yang berjudul *"Application of Modified Bessel Functions in Extended Surface Heat Transfer Problem"*. Penelitian ini menjelaskan efisiensi pin annular dan pin segitiga lurus.

Skripsi Asih Dwi Nurrani (2011) yang berjudul "*Persamaan Diferensial Bessel dan Penerapannya pada Frekuensi Alami Membran Berbentuk Cincin*". Penelitian ini menjelaskan tentang persamaan diferensial Bessel dan fungsi Bessel pada frekuensi alami membran berbentuk cincin.

Skripsi Siti Makhmudah (2009) yang berjudul *"Aplikasi Fungsi Bessel pada Getaran Membran Sirkular dan Distribusi Kecepatan Aliran Laminar*

Unsteady Pipa Sirkular”. Penelitian ini menjelaskan tentang persamaan diferensial Bessel dan Fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

Penelitian ini merupakan pengembangan dari jurnal Dr. Somnuk Theerakulpisut yang ditekankan pada pin segitiga lurus.

Perbedaan penelitian ini dengan penelitan Asih yaitu pada penelitian ini, digunakan fungsi Bessel termodifikasi sebagai penerapan pada pin segitiga, sedangkan penelitian Asih dibahas mengenai persamaan diferensial Bessel, fungsi Bessel dan penerapannya pada Frekuensi Alami Membran Berbentuk Cincin. Penelitian Siti menggunakan fungsi Bessel sebagai penerapan pada pipa sirkuler.

1.7. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada skripsi ini yaitu studi literatur, dengan melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi yang digunakan dalam pembahasan.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan peneliti dalam membahas skripsi ini yaitu sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan dan mengumpulkan literatur pendukung sebagai bahan atau sumber informasi yang berkaitan dengan fungsi Bessel termodifikasi, perpindahan kalor dan efisiensi pin segitiga lurus.
2. Mempelajari dan memahami persamaan diferensial Bessel dan penyelesaiannya (fungsi Bessel).

3. Mempelajari dan memahami fungsi Bessel termodifikasi.
4. Mempelajari dan memahami perpindahan kalor konduksi dan konveksi.
5. Mencari persamaan diferensial pin dan penyelesaiannya yang berbentuk fungsi Bessel termodifikasi order nol.
6. Mencari distribusi suhu pada pin
7. Mencari efisiensi pin.
8. Membuat kesimpulan dari pembahasan yang telah ditulis.

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam skripsi ini terdiri dari empat bab, yaitu bab pendahuluan, dasar teori, pembahasan dan penutup. Masing-masing bab akan dijelaskan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan memuat tentang latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II DASAR TEORI

Pada bab dua ini, diberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang akan dibahas, yaitu persamaan diferensial, persamaan diferensial Bessel, persamaan diferensial Bessel termodifikasi order *n*, persamaan diferensial Bessel termodifikasi order nol, bentuk lain persamaan diferensial Bessel, perpindahan kalor (konduksi dan konveksi), dan pin segitiga lurus.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab tiga dibahas aplikasi fungsi Bessel termodifikasi order nol pada perpindahan kalor pin segitiga lurus dan dibahas tentang efisiensi dari pin segitiga lurus.

BAB IV PENUTUP

Bab empat berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian dalam skripsi ini.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan sebelumnya yaitu tentang persamaan diferensial pin segitiga lurus dan efisiensi pin, maka dapat disimpulkan bahwa, persamaan diferensial pin segitiga lurus mempunyai penyelesaian dalam bentuk fungsi Bessel termodifikasi order nol yaitu

$$U = c_1 I_0(2\ \ \sqrt{x}) + c_2 K_0(2\ \ \sqrt{x})$$

dengan $I_0(x)$ adalah fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama order nol dan $K_0(x)$ adalah fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua order nol.

Penyelesaian persamaan diferensial pin segitiga lurus dapat digunakan untuk memperoleh efisiensi pin. Efisiensi pin dapat diartikan sebagai perbandingan laju aliran kalor konduksi pin dibagi dengan laju aliran kalor konveksi pin ideal atau

$$¦ = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{kb\cos\bar{\ }}{2h}}\ \ \frac{I_1(2\ \ \sqrt{a})}{I_0(2\ \ \sqrt{a})}\ .$$

4.2. SARAN

Berdasarkan penulisan penelitian ini, maka saran-saran yang dapat disampaikan adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini dapat dikembangkan dengan membahas lebih lanjut tentang fungsi Bessel termodifikasi order v atau n yang dapat diaplikasikan pada bidang ilmu teknik.
2. Aplikasi fungsi Bessel termodifikasi pada pin ada banyak penerapannya tergantung dari macam-macam pin yang dibahas. Pada pin segitiga lurus masih bisa dikembangkan dengan mencari nilai optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Anis, Samsudin dan Aris Budiyono. 2009. *Studi Eksperimen Pengaruh Alur Permukaan Sirip pada Sistem Pendingin Mesin Kendaraan Bermotor*. Jurnal Kompetensi Teknik Vol.1, No.1. Universitas Negeri Semarang.

Arpaci, Vedat S. 1966. *Conduction Heat Transfer.* United States of America.

Ault, J. C dan Frank Ayres. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga.

Bowman, Frank. 1958. *Introduction To Bessel Functions*. United States of America.

Buchori, Luqman. 2009. *Perpindahan Panas Bagian I.* Fakultas Teknik Universitas Diponegoro.

Holman, J.P dan E. Jasjfi. 1997. *Perpindahan Kalor*. Jakarta: Erlangga.

Kraus, Allan, D. Abdul Aziz, James Willey. 2001. *Extended Surface Heat Transfer*. United States of America.

Kreyszig, Erwin. 1993. *Matematika Teknik Lanjutan*, edisi ke-6, Buku 1. Jakarta: Penerbit PT Gramedia Pustaka Utama.

Makhmudah, Siti. 2009. *Aplikasi Fungsi Bessel pada Getaran Membran Sirkulardan Distribusi Kecepatan Aliran Laminar Unsteady Pipa Sirkular*. Jawa Timur: Universtitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Mclachlan, N. W. 1934. *Bessel Functions for Engineers.* London: Clarendon Press

Nurrani Asih Dwi. 2011. *Persamaan Diferensial Bessel dan Penerapannya pada Frekuensi Alami Membran Berbentuk Cincin*. Yogyakarta: UIN Sunan Kalijaga.

Rathore M.M dan R.R Kapuno. 2011. *Engineering Heat Transfer,* Edisi kedua. United States of America.

Soare, Mircea V, Petre P.Teodorace, dan Ileana Toma. 2007. *Ordinary Differential Equations with Application to Mechanics.*Spinger

Sugiyanto dan Slamet Mugiyono. 2011. *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: SUKA-Press UIN Sunan Kalijaga.

Theerakulpisut, Dr. Somnuk. 1995. *Application of Modified Bessel Functions in Extended Surface Heat Transfer Problem*. KKU Engineering Journal Vol.22, No.1 (61-74). Khon Kaen University.

Thirumaleshwar, M. 2009. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. India: Sai Print-o-Pack

Wylie, C. Ray dan Louis C. Barrett. 1995. *Advanced Engineering Mathematic*. USA: McGraw-Hill,Inc.

http://eprints.undip.ac.id/27613/1/0190-ba-ft-2009.pdf diakses pada 27 September 2013 pukul 08.14 WIB.

Lampiran 1

Konduktivitas Termal Bahan Logam

Bahan Logam	Konduktivitas Termal k_t $W / m^2 . ^\circ C$						
	20°C	-100°C	100°C	200°C	300°C	400°C	600°C
Aluminium:							
Murni	204	215	206	215	228	249	
Al-Cu (Duralumin), 94-96% Al, 3-5% Cu, runut Mg	164	126	182	194			
Al-Si (Silumin, mengandung tembaga), 86.5% Al, 1% Cu	137	119	144	152	161		
Al-Si (Alusil), 78-80% Al, 20-22% Si	161	144	168	175	178		
Al-Mg-Si, 97% Al, 1% Mg, 1% Si, 1% Mn	177		189	204			
Timbal	35	36,9	33,4	31,5	29,8		
Besi:							
Murni	73	87	67	62	55	48	40
Besi Tempa, 0.5% C	59						

Konduktivitas Termal

k_t

Logam	$W/m^2.^\circ C$						
	20°C	-100°C	100°C	200°C	300°C	400°C	600°C
Baja			57	52	48	45	36
C≈ 0.5%	54		52	48	45	42	35
1.0%	43		43	42	40	36	33
1.5%	36		36	36	35	33	31
Baja nikel							
Ni ≈ 0%	73						
20%	19						
40%	10						
80%	35						

Lampiran 1.

Konduktivitas Termal Berbagai Bahan pada $0^{o}C$

		Konduktivitas Termal k_t	
Bahan		$W / m^2.^{\circ}C$	$Btu / h.ft^2.^{\circ}F$
Logam			
	Perak (murni)	410	237
	Tembaga (murni)	385	223
	Aluminium (murni)	202	117
	Nikel (murni)	93	54
	Besi (murni)	73	42
	Baja karbon, $1\%C$	43	25
	Timbal (murni)	35	20,3
	Baja krom-nikel $18\%Cr, 8\%Ni$	16,3	9,4
Bukan Logam			
	Kuarsa (sejajar sumbu)	41,6	24
	Magnesit	4,15	2,4
	Marmar	2,08-2,94	1,2-1,7
	Batu pasir	1,83	1,06
	Kaca,jendela	0,78	0,45
	Kayu mapel atau ek	0,17	0,096
	Serbuk gergaji	0,059	0,034
	Wol kaca	0,038	0,022
Zat Cair			
	Air-raksa	8,21	4,74
	Air	0,556	0,327
	Amonia	0,540	0,312
	Minyak lumas, SAE 50	0,147	0,085
	Freon 1 2, $CCI_2 F_2$	0,073	0,042
Gas			
	Hidrogen	0,175	0,101
	Helium	0,141	0,081
	Udara	0,024	0,0139
	Uap air(jenuh)	0,0206	0,0119
	Karbondioksida	0,0146	0,00844

Lampiran 2.

Nilai kira-kira Koefisien Perpindahan Panas Konveksi

	Koefisien Perpindahan Panas Konveksi h_t	
Bahan	$W / m^2.^\circ C$	$Btu / h.ft^2.^\circ F$
Konveksi bebas, $\Delta U = 30^\circ C$		
Plat vertikal, tinggi 0,3 m (1ft) di udara	4,5	0,79
Silinder horizontal, diameter 5 cm di udara	6,5	1,14
Silinder horizontal, diameter 2 cm dalam air	890	157
Konveksi paksa		
Aliran udara 2 m/s di atas plat bujur sangkar 0,2 m	12	2,1
Aliran udara 35 m/s di atas plat bujur sangkar 0,75 m	75	13,2
Udara 2 atm mengalir di dalam tabung diameter 2,5 cm, kecepatan 10 m/s	65	11,4
Air 0,5 kg/s mengalir di dalam tabung 2,5 cm	3500	616
Aliran udara melintas silinder Adiameter 5 cm kecepatan 50 m/s	180	32
Air mendidih		
Dalam kolam atau bejana	2500-35.000	400-6200
Di luar tabung horizontal	5000-100.000	800-17.600
Pengembunan uap air, 1 atm		
Muka vertikal	4000-11.300	700-2000
Di luar tabung horizontal	9500-25.000	1700-4400

Lampiran 3

A. Fungsi Bessel Termodifikasi Jenis Pertama Order Nol $\left(I_0(x)\right)$

Fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama order nol digunakan dalam penyelesaian pin segitiga lurus. Sebelum membahas tentang fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama order nol, terlebih dahulu akan dicari fungsi Bessel jenis pertama order nol $\left(J_0(x)\right)$. Selanjutnya, $J_0(x)$ akan digunakan untuk mencari nilai fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama order nol sebagai berikut.

Persamaan diferensial Bessel yang berorder nol secara umum adalah sebagai berikut,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 + n^2)y = 0 \qquad\qquad n = 0$$

atau

$$x^2 y'' + xy' + (x^2)y = 0 \tag{1}$$

Menurut (McLachlan, 1934: 5) langkah awal yang dilakukan untuk memperoleh $J_0(x)$ adalah dengan mengasumsikan solusi persamaan (1) dalam bentuk,

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n} \qquad\qquad a_0 \neq 0. \tag{2}$$

Menurut (Kraus, 2001: 983) diberikan a_0 sebagai berikut ,

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \quad \text{dengan} \quad \Gamma(n+1) = n!\ . \tag{3}$$

Turunan pertama dan kedua terhadap *x* dari persamaan (2) yaitu,

$$y_1'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+n) x^{m+n-1}$$

$$y_1''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+n)(m+n+1) x^{m+n-2} \ .$$

Persamaan (2) dan turunan-turunannya disubstitusi ke persamaan (1) sehingga diperoleh,

$$\Rightarrow x^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+n)(m+n-1) x^{m+n-2} \right) + x \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+n) x^{m+n-1} \right) +$$

$$x^2 \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+n)(m+n-1) x^{m+n} \right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+n) x^{m+n} \right) + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n+2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left[(m+n)(m+n-1) + (m+n) \right] x^{m+n} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n+2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(m^2 + 2nm - n + n^2 - m + n + m \right) x^{m+n} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n+2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(n^2 + 2nm + m^2 \right) x^{m+n} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n+2} = 0$$

Jumlahan pertama dijabarkan hingga $m = 2$ dan jumlahan kedua dimulai dari $m = 2$.

$$\Rightarrow n^2 a_0 x^n + \left(n^2 + 2n + 1 \right) a_1 x^{1+n} + \sum_{m=2}^{\infty} \left(n^2 + 2nm + m^2 \right) a_m x^{m+n} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^{m+n} = 0$$

$$\Rightarrow n^2 a_0 x^n + \left(n^2 + 2n + 1 \right) a_1 x^{1+n} + \sum_{m=2}^{\infty} \left[\left(n^2 + 2nm + m^2 \right) a_m + a_{m-2} \right] x^{m+n} = 0 \qquad (4)$$

Berdasarkan persamaan (4) (koefisien dari setiap pangkat x yaitu koefisien dari x^n , x^{n+1} , x^{n+m}) dapat diperoleh,

1. Pada x^n dapat ditulis,

$$n^2 a_0 = 0\,.$$

Berdasarkan persamaan (4) $a_0 \neq 0$, sehingga

$$n^2 = 0\,. \tag{5}$$

Persamaan (5) memiliki akar kembar $n_1 = n_2 = 0$.

Menurut (Sugiyanto, 2011: 71) persamaan (5) mempunyai penyelesaian

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n}$$

dan

$$y_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+n} + y_1(x)\ln x\,.$$

$y_1(x)$ digunakan untuk memperoleh $J_0(x)$ dan $y_2(x)$ digunakan untuk memperoleh $Y_0(x)$.

2. Pada x^{n+1} dapat diperoleh,

$$\left(n^2 + 2n + 1\right)a_1 = 0\,. \tag{6}$$

$n = 0$ disubstitusi ke persamaan (6) sehingga diperoleh,

$$a_1 = 0\,. \tag{7}$$

3. Selanjutnya dicari nilai a_m yaitu diperoleh dari koefisien persamaan x^{n+m},

$\left(n^2 + 2nm + m^2\right)a_m + a_{m-2} = 0$ untuk $m \geq 2$ atau

$$a_m = \frac{-1}{(n+m)^2}\,a_{m-2}\,. \tag{8}$$

Persyaratan $m \geq 2$ diperlukan dalam persamaan (8) karena a_{m-2} tidak terdefinisikan untuk $m = 0$ atau $m = 1$.

$n = 0$ disubstitusi ke dalam persamaan (8) diperoleh bahwa,

$$a_m = \frac{-1}{(m)^2} a_{m-2} \,. \tag{9}$$

Berdasarkan persamaan (7) dan (9) dapat diperoleh,

$$a_2 = -\frac{1}{4} a_0 = -\frac{1}{(2)^2 (1!)^2} a_0$$

$$a_3 = -\frac{1}{9} a_1 = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{16} a_2 = \frac{1}{(2)^4 (2!)^2} a_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{25} a_1 = 0$$

$$a_6 = -\frac{1}{36} a_4 = -\frac{1}{2^2 (3)^2 2^4 (2!)^2} a_0 = -\frac{1}{2^6 (3!)^2} a_0 \,.$$

Jadi diperoleh penyelesaian untuk $y_1(x)$ yaitu,

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+n}$$

$$y_1(x) = a_0 x^n \left[1 + 0 - \frac{1}{(2)^2 (1!)^2} x^2 + 0 + \frac{1}{(2)^4 (2!)^2} x^4 + \ldots + \frac{(-1)^m}{(2)^{2m} (m!)^2} x^2 \quad + \ldots \right]$$

$$y_1(x) = a_0 x^n \left[1 - \frac{1}{(2)^2 (1!)^2} x^2 + \frac{1}{(2)^4 (2!)^2} x^4 + \ldots + \frac{(-1)^m}{(2)^{2m} (m!)^2} x^2 \quad + \ldots \right]$$

$$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2)^{2m} (m!)^2} x^{2m+n} \,. \tag{10}$$

$J_0(x)$ diperoleh dengan memasukkan nilai $n = 0$ pada persamaan (3)

$$a_0 = \frac{1}{2^0 \Gamma(0+1)} = 1 \ ,$$

dan memasukkan $n = 0$ persamaan (10)

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2)^{2m}(m!)^2} x^{2m} \ .$$

Selanjutnya, $y_1(x)$ dapat disimbolkan dengan $J_0(x)$ sebagai berikut

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2)^{2m}(m!)^2} x^{2m} \ . \tag{11}$$

Persamaan (11) yaitu fungsi dari variabel real sedangkan fungsi Bessel termodifikasi memuat variabel imajiner. Oleh karena itu, $J_0(x)$ dapat dirubah menjadi fungsi dari variabel imajiner sebagai berikut

$$J_0(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (ix)^{2m}}{2^{2m}\left(m!\right)^2}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i^2)^m i^{2m} x^{2m}}{2^{2m}\left(m!\right)^2}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{4m} x^{2m}}{2^{2m}\left(m!\right)^2} \ .$$

i^{4m} akan selalu bernilai satu untuk sembarang nilai $m = 0,1,2,\cdots$ atau dapat ditulis,

$$J_0(ix) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{2^{2m}\left(m!\right)^2} \ .$$

Menurut (McLachlan, 1934: 162), $I_0(x) = J_0(ix)$. Oleh karena itu, fungsi $J_0(ix)$ ini sering disebut *fungsi Bessel termodifikasi jenis pertama orde nol* dan disimbolkan dengan $I_0(x)$.

B. Fungsi Bessel Termodifikasi Jenis Kedua Order Nol $\left(K_0(x)\right)$

Fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua order nol digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial pin segitiga lurus. Untuk memperoleh fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua order nol terlebih dahulu akan dicari nilai fungsi Weber atau fungsi Bessel jenis kedua yang diubah ke variabel imajiner ($\mathbf{Y}_0(ix)$). Berikut akan dijelaskan alur untuk memperoleh fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua order nol.

Persamaan (5) mempunyai akar kembar yaitu $n_1 = n_2 = 0$ dan mempunyai penyelesaian

$$y_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+n} + J_0(x)\ln x$$

atau

$$y_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m} + J_0(x)\ln x\,. \tag{12}$$

Selanjutnya persamaan (12) diturunkan terhadap *x*, sehingga diperoleh,

$$y_2'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} \tag{13}$$

$$y_2''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(m-1\right) a_m x^{m-2} + J_0''(x)\ln x + \frac{J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2} + \frac{J_0'(x)}{x}$$

$$y_2''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\left(m-1\right) a_m x^{m-2} + J_0''(x)\ln x + \frac{2J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2}\,. \tag{14}$$

$y_2''(x)$, $y_2'(x)$, dan $y_2(x)$ disubstitusi ke persamaan (1) seperti berikut,

$$\Rightarrow x\left[\sum_{m=1}^{\infty} m\left(m-1\right) a_m x^{m-2} + J_0''(x)\ln x + \frac{2J_0'(x)}{x} - \frac{J_0(x)}{x^2}\right] +$$

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x}\right] + x\left[J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m\right] = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} m\left(m-1\right) a_m x^{m-1} + xJ_0''(x)\ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + J_0'(x)\ln x + \frac{J_0(x)}{x} + xJ_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

$$\Rightarrow xJ_0''(x)\ln x + J_0'(x)\ln x + xJ_0(x)\ln x + 2J_0'(x) - \frac{J_0(x)}{x} + \frac{J_0(x)}{x} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\left(m-1\right) a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x)\right)\ln x + 2J_0'(x) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0 \tag{15}$$

J_0 merupakan solusi persamaan (1), maka

$$xJ_0''(x) + J_0'(x) + xJ_0(x) = 0\,.$$

Oleh karena itu, persamaan (15) menjadi,

$$0 + 2J_0'(x) + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0\,. \tag{16}$$

Berdasarkan persamaan (11) yang berbentuk

$$J_0(x) = x^0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+0} m!(0+m)!}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} \left(m!\right)^2} \ ,$$

dapat diperoleh deret pangkat dari $J_0\,'(x)$ sebagai berikut

$$J_0\,'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 2mx^{2m-1}}{2^{2m} \left(m!\right)^2}$$

$$J_0\,'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m} \cdot 2^{-1} \cdot m^{-1} \cdot \left(m!\right)^2}$$

$$J_0\,'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!\left(m-1\right)!} \,. \tag{17}$$

Persamaan (17) disubstitusi ke persamaan (16), sehingga diperoleh

$$\Rightarrow 2\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} m!\left(m-1\right)!} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1} \cdot 2^{-1} \cdot m!\left(m-1\right)!} + m^2 a_m x^{m-1} + a_m x^{m+1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2} m!\left(m-1\right)!} + m^2 a_m x^{m-1} + a_m x^{m+1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[-x + a_1 x^0 + a_1 x^2 \right] + \left[\frac{x^3}{2^2 2!1!} + 2^2 a_2 x + a_2 x^3 \right] + \left[\frac{-x^5}{2^4 3!2!} + 3^2 a_3 x^2 + a_3 x^4 \right] +$$

$$\left[\frac{x^7}{2^6 4!3!} + 4^2 a_4 x^3 + a_4 x^5 \right] + \left[\frac{-x^9}{2^8 5!4!} + 5^2 a_5 x^4 + a_5 x^6 \right] +$$

$$\left[\frac{x^{11}}{2^{10} 6!5!} + 6^2 a_6 x^5 + a_6 x^7 \right] + \cdots = 0$$

$$\Rightarrow a_1x^0 + \left[-1+2^2a_2\right]x + \left[a_1+3^2a_3\right]x^2 + \left[\frac{1}{2^2 2!1!} + a_2 + 4^2a_4\right]x^3 +$$

$$\left[a_3+5^2a_5\right]x^4 + \left[\frac{-1}{2^4 3!2!} + a_4 + 6^2a_6\right]x^5 + \cdots = 0\,.$$

Pangkat terkecil dari x yaitu x^0, dan a_1 merupakan koefisien x^0. Oleh karena itu $a_1 = 0$. Setelah itu, dengan menyamakan jumlah koefisien-koefisien dari pangkat x^{2m} dengan nol, akan diperoleh

$(2m+1)^2 a_{2m+1} + a_{2m-1} = 0$ dengan $m = 1, 2, 3, \cdots$.

Sehingga dapat dibentuk,

$$a_{2m+1} = -\frac{a_{2m-1}}{(2m+1)^2}\,.$$

Selanjutnya, untuk

$m = 1 \quad \Rightarrow a_3 = -\dfrac{a_{2-1}}{(2+1)^2} = -\dfrac{a_1}{3^2} = 0$,

$m = 2 \quad \Rightarrow a_5 = -\dfrac{a_3}{(4+1)^2} = -\dfrac{0}{5^2} = 0$,

$m = 3 \quad \Rightarrow a_7 = -\dfrac{a_5}{(6+1)^2} = -\dfrac{0}{7^2} = 0$, dan seterusnya.

Kemudian dengan menyamakan jumlah koefisien-koefisien dari x^{2m+1} dengan nol, akan diperoleh

-1 + 4 a_2 = 0

4 a_2 = 1

$\Rightarrow \quad a_2 = \dfrac{1}{4}$, untuk ($m$ = 0).

Untuk nilai-nilai m = 1, 2, …

$$\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!}+(2m+2)^2 a_{2m+2}+a_{2m}=0\,,$$

atau

$$a_{2m+2}=\frac{-a_{2m}-\dfrac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!}}{(2m+2)^2}\,.$$

Untuk m = 1, diperoleh

$$a_4=\frac{-a_2-\dfrac{(-1)^2}{2^2(2)!1!}}{(4)^2}$$
$$=-\frac{3}{128}$$

dan secara umumnya,

$$a_{2m}=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{m}\right),\qquad m = 1, 2, \dots\,. \qquad (18)$$

Dan $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{m}$ dapat disimbolkan dengan h_m.

Persamaan (18) dan $n=0$ disubstitusi ke dalam persamaan (12), maka diperoleh

$$y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

$$=J_0(x)\ln x+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{128}x^4+-....\qquad (19)$$

Menurut (Sugiyanto, 2001: 95) $y_2(x)$ diganti dengan penyelesaian khusus yang bebas linear berbentuk $A(y_2+BJ_0)$, dengan B merupakan konstanta.

Biasanya $A = \frac{2}{\pi}$ dan $B = \gamma - \ln 2$, dengan $\gamma = 0,57721566490...$ yang biasa disebut konstanta Euler, yang didefinisikan sebagai limit

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \ln m\right),$$

untuk *m* mendekati tak hingga. Oleh karena itu, dapat diperoleh

$$A\left(y_2 + BJ_0(x)\right) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m} + \gamma - \ln 2 J_0(x)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\ln x + \left(\gamma - \ln 2 J_0(x)\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right]$$

atau $A\left(y_2 + BJ_0(x)\right)$ dapat disimbolkan dengan $Y_0(x)$.

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right]. \qquad (20)$$

$Y_0(x)$ merupakan fungsi bessel jenis kedua order nol atau fungsi Neumann order nol dan digunakan untuk memperoleh nilai dari $\mathbf{Y}_0(x)$ yang merupakan fungsi Weber (fungsi Bessel jenis kedua order nol).

Menurut (McLachlan, 1934: 164), diketahui bahwa

$$\mathbf{Y}_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{Y_0(x) - \left(\ln 2 - \gamma\right)J_0(x)\right\}. \qquad (21)$$

Oleh karena itu, berdasarkan persamaan (20) dan (21) dapat diperoleh,

$$\mathbf{Y}_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m} - \left(\ln 2 - \gamma\right)J_0(x)\right\}$$

atau

$$\mathbf{Y}_0(x) = \frac{2}{\pi}\left\{ J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \right\}. \quad (22)$$

Seperti persamaan (11), pada persamaan (22) $\mathbf{Y}_0(x)$ diubah menjadi fungsi dengan variabel imajiner.

$$\mathbf{Y}_0(ix) = \frac{2}{\pi}\left\{ J_0(ix)\left(\ln\frac{ix}{2} + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} \left(ix\right)^{2m} \right\}. \quad (23)$$

Nilai $\ln(ix)$ pada $\mathbf{Y}_0(ix)$ yaitu

$$\begin{aligned} \ln(ix) &= \ln i + \ln x \\ &= \ln\left(cis\,\frac{1}{2}\pi \right) + \ln x \\ &= \ln\left(e^{\frac{1}{2}\pi i} \right) + \ln x \\ &= \frac{1}{2}\pi i + \ln x\,. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, persamaan (23) menjadi

$$\mathbf{Y}_0(ix) = \frac{2}{\pi}\left\{ J_0(ix)\left(\left[\frac{1}{2}\pi i + \ln x \right] - \ln 2 + \gamma \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} h_m}{2^{2m}(m!)^2} \left(ix\right)^{2m} \right\}.$$

Menurut (McLachlan, 1934: 164) nilai

$$K_0(x) = \frac{1}{2}\pi i\left\{ I_0(x) + i\mathbf{Y}_0(xi) \right\}.$$

Oleh karena itu, dapat ditulis

$$K_0(x) = \frac{1}{2}\pi i\left\{ I_0(x) + i\mathbf{Y}_0(xi) \right\}$$

sehingga,

$$K_0(x) = \frac{1}{2}®i\left\{I_0(x) + i\left(\frac{2}{®}\left\{J_0(ix)\left(\left[\frac{1}{2}®i + \ln x\right] - \ln 2 + ¥\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}\left(ix\right)^{2m}\right\}\right)\right\}$$

atau,

$$K_0(x) = -\left\{I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + ¥\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{i^{4m}\cdot h_m}{i^2 2^{2m}(m!)^2}\left(x\right)^{2m}\right\}.$$

i^{4m} akan selalu bernilai satu sehingga dapat diperoleh,

$$K_0(x) = -\left\{I_0(x)\left(\ln\frac{x}{2} + ¥\right)\right\} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{h_m}{2^{2m}(m!)^2}\left(x\right)^{2m}. \qquad (24)$$

$K_0(x)$ yaitu fungsi Bessel termodifikasi jenis kedua order nol.