

# **TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH *CONE***

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA**  
**YOGYAKARTA**

**2013**



## SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Bayu Adhi Pratama

NIM : 08610031

Judul Skripsi : Teorema Titik Tetap di Ruang Banach *Cone*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar *Sarjana Strata Satu* dalam bidang Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. Wb*

Yogyakarta, 1 Juli 2013

Pembimbing II

Pembimbing I

Dra. Khurul Wardati, M.Si.  
NIP. 19660731 200003 2 001

Malahayati, S.Si., M.Sc.  
NIP. 19840412 201101 2 010



Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

FM-UINSK-BM-05-07/R0

**PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/2715/2013

Skrripsi/Tugas Akhir dengan judul : Teorema Titik Tetap di Ruang Banach *Core*

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :  
 Nama : Bayu Adhi Pratama  
 NIM : 08610031  
 Telah dimunaqasyahkan pada : 15 Agustus 2013  
 Nilai Munaqasyah : A-  
 Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

**TIM MUNAQASYAH :**

Ketua Sidang

Dra. Khurul Wardati, M.Si.  
 NIP. 19660731 200003 2 001

Penguji I

Mah-mudi, S.Si., M.Si.

Penguji II

Malahayati, M.Sc.  
 NIP.19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 11 September 2013

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

Dekan



Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D  
 N.P. 19580919 198603 1 002

## PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Bayu Adhi Pratama

NIM : 08610031

Prodi/Semester : Matematika / X

Fakultas : Fakultas Sains dan Teknologi

Menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah diterbitkan oleh orang lain, kecuali secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 31 Juli 2013

METERAI  
TEMBEL  
NILEK SARANGGI BANGSA

EFE36ABF782834589

6000



*Bayu Adhi Pratama*

Bayu Adhi Pratama

NIM: 08610031



Karya sederhana ini penulis persembahkan  
untuk Ibu dan Bapak tercinta,  
juga Adik, Teman-teman dan Almamater



*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.*

(Q.S. Ali Imran [3] : 190 - 191)

## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul, "*Teorema Titik Tetap di Ruang Banach Cone*" ini. Sholawat dan salam semoga senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang dengan kehadiran Beliau telah menjadi rahmat bagi sekalian alam.

Penulis menyadari bahwa proses penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, kerjasama, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Ibu Dra. Khurul Wardati, M.Si., selaku pembimbing pertama yang telah dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan dukungan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Ibu Malahayati, M.Sc., selaku pembimbing kedua yang telah dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan dukungan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Semua dosen dan guru yang telah memberikan ilmu, arahan, dan dukungan kepada penulis selama ini.
6. Ibu dan Ayah tercinta yang tiada henti memberikan dukungan, doa dan kasih sayang kepada penulis.

7. Adikku, Dandy Oky Prasetya, yang selalu menginspirasi dalam penulisan skripsi ini.
8. Teman-teman Matematika 2008, Najib, Okta, Riyanto, Santosa, Imron, Tatar, Adib, Ranto, Ibul, Ial, Arislan, Mas Bowo, Rossi, Tuty, Ria, Aesa, Yuni, Septa, serta teman-teman yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu, yang senantiasa menjadi teman belajar penulis selama menempuh pendidikan di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran untuk menyempurnakan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan bagi yang membaca khususnya.

Yogyakarta, 31 Juli 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> . . . . .	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>HALAMAN MOTTO</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> . . . . .	<b>viii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> . . . . .	<b>x</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b> . . . . .	<b>xii</b>
<b>ABSTRAK</b> . . . . .	<b>xiii</b>
<b>I PENDAHULUAN</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2. Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3. Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.4. Manfaat Penelitian . . . . .	3
1.5. Tinjauan Pustaka . . . . .	3
1.6. Sistematika Penulisan . . . . .	4
1.7. Metode Penelitian . . . . .	5
<b>II LANDASAN TEORI</b> . . . . .	<b>6</b>
2.1. Dasar-dasar Analisis Real . . . . .	6
2.2. Ruang Vektor . . . . .	21

2.3. Ruang Metrik . . . . .	24
2.4. Ruang Bernorma . . . . .	31
2.5. Teorema Titik Tetap . . . . .	36
2.6. <i>Cone</i> . . . . .	42
2.7. Ruang Metrik <i>Cone</i> . . . . .	46
<b>III TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG BANACH <i>CONE</i> . . . . .</b>	<b>49</b>
3.1. Ruang Bernorma <i>Cone</i> . . . . .	49
3.2. Teorema Titik Tetap di Ruang Banach <i>Cone</i> . . . . .	58
<b>IV PENUTUP . . . . .</b>	<b>62</b>
4.1. Kesimpulan . . . . .	62
4.2. Saran . . . . .	62



## DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	: himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
$\emptyset$	: himpunan kosong
$x \in A$	: $x$ anggota $A$
$A \subset X$	: $A$ himpunan bagian ( <i>subset</i> ) $X$
■	: akhir suatu bukti
$\rightarrow$	: menuju
$p \Rightarrow q$	: jika $p$ maka $q$
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika
$V$	: ruang vektor
$\mathbf{0}$	: vektor nol
$(X, d)$	: ruang metrik
$\text{int}P$	: interior dari $P$
$(V, \ \cdot\ )$	: ruang bernorma
$E$	: ruang Banach
$M$	: konstanta normal
$P$	: <i>cone</i>
$x \preceq y$	: $y - x \in P$ , untuk setiap $x, y \in E$ .
$x \prec y$	: $y - x \in P$ dan $y \neq x$ , untuk setiap $x, y \in E$ .
$x \ll y$	: $y - x \in \text{int}P$
$(V, \ \cdot\ _p)$	: ruang bernorma <i>cone</i>

## ABSTRAK

Tahun 1920, seorang matematikawan dari Polandia bernama Stefan Banach menyelidiki struktur matematika yang menggabungkan sifat topologi dan aljabar yang kemudian menghasilkan ruang bernorma. Kajian mengenai ruang bernorma mengalami perkembangan, di mulai pada tahun 1980 oleh Rzepecki yang memperumum ruang metrik dari himpunan tak kosong ke normal *cone*.

Ruang bernorma *cone* merupakan ruang vektor di real yang diberikan suatu norma. Setiap barisan Cauchy di ruang bernorma *cone* yang konvergen, maka ruang bernorma *cone* tersebut dikatakan lengkap. Setiap ruang bernorma *cone* yang lengkap disebut dengan ruang Banach *cone*. Salah satu aplikasi ruang Banach *cone* adalah di teorema titik tetap.

Skripsi ini mengkaji konsep ruang bernorma *cone* dan aplikasinya yaitu teorema titik tetap di ruang Banach *cone*.

**Kata kunci :** *cone*, ruang bernorma *cone*, ruang Banach *cone*, dan titik tetap.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah

Analisis matematika adalah salah satu cabang dari matematika selain aritmatika, statistika, aljabar dan geometri. Analisis matematika modern tidak menekankan pada perhitungan dan rumus atau aturan, tetapi pembahasannya didasarkan pada pengembangan konsep dasar dan teori dengan menggunakan penalaran untuk memperoleh prinsip-prinsip yang berupa definisi, aksioma, lemma, corollary, dan teorema-teorema beserta pembuktiannya. Klasifikasi materi dan pendekatannya bersifat abstrak dan intuitif untuk memahami dan mengembangkan metode-metode dan teknik-teknik yang digunakan dalam bukti-bukti sehingga suatu pemahaman yang baik sangat diperlukan untuk kesuksesan dalam mempelajari analisis matematika. (Anas Jamil, 2009: 3)

Ada beberapa konsep yang menjadi pembahasan dalam analisis matematika, diantaranya adalah ruang metrik dan ruang bernorma. Pada tahun 1980, Rzepecki memperkenalkan bentuk umum dari metrik  $d_E$  pada himpunan  $X$  yang ditulis

$$d_E : X \times X \rightarrow S$$

dengan  $E$  adalah ruang Banach dan  $S$  adalah normal *cone* di dalam  $E$  dengan urutan parsial " $\preceq$ ". Tujuh tahun kemudian, Lin mengubah ruang metrik  $K$  yaitu dengan mengganti bilangan real dengan *cone*  $K$  di dalam fungsi

$$d_E : X \times X \rightarrow K.$$

Pada tahun 2007, dengan tidak menyebutkan karya-karya Rzepecki dan Lin, Huang dan Zhang memperumum ruang metrik *cone* dengan mengganti bilangan real dengan ruang Banach terurut. Dalam tulisannya, mereka membicarakan beberapa sifat barisan konvergen dan membuktikan teorema titik tetap mengenai pemetaan kontraktif untuk ruang metrik *cone* yaitu setiap pemetaan  $T$  dari ruang metrik lengkap  $X$  ke dirinya sendiri untuk  $0 \leq k < 1$  yang memenuhi

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

untuk setiap  $x, y \in X$  memiliki titik tetap tunggal.

Ruang bernorma merupakan ruang linear yang dilengkapi dengan suatu norma  $\|\cdot\|$ . Teorema pada ruang bernorma yang menjelaskan bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik mengakibatkan semua konsep, pengertian, sifat-sifat, serta teorema-teorema yang berlaku pada ruang metrik berlaku juga pada ruang bernorma.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk lebih mendalami ruang bernorma *cone*. Penelitian ini juga terinspirasi dari skripsi Rifqi Bahtiar (2012) yang berjudul "*Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*". Diharapkan dari penelitian ini dapat memberikan gambaran mengenai konsep dasar ruang bernorma *cone* dan menjelaskan teorema titik tetap di ruang Banach *cone*.

## 1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep ruang bernorma *cone*?
2. Bagaimana konsep barisan konvergen dan barisan Cauchy di ruang bernorma *cone*?
3. Bagaimana teorema titik tetap pada ruang Banach *cone*?

### 1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji definisi dan sifat-sifat ruang bernorma *cone*.
2. Mengkaji konsep barisan konvergen dan barisan Cauchy di ruang bernorma *cone*.
3. Mengkaji teorema titik tetap pada ruang Banach *cone*.

### 1.4. Manfaat Penelitian

Manfaat yang diberikan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan mengenai konsep dasar ruang bernorma *cone*.
2. Memberikan pengetahuan mengenai konsep barisan konvergen dan Cauchy ruang bernorma *cone*.
3. Mengetahui teorema titik tetap pada ruang Banach *cone*.

### 1.5. Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini mengacu pada skripsi sebelumnya yang ditulis oleh Rifqi Bahtiar (2012) yang berjudul "*Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*". Skripsi tersebut mengkaji dasar-dasar ruang metrik *cone* dan aplikasinya pada teorema titik tetap. Skripsi ini mengkaji mengenai dasar-dasar ruang bernorma *cone* dan aplikasinya pada teorema titik tetap.

Penulisan skripsi ini juga mengacu pada paper yang berjudul "*Fixed Point Theorems in Cone Banach Spaces*" yang ditulis oleh Erdal Karapinar pada tahun 2009. Paper tersebut menjelaskan definisi dan teorema-teorema yang berkaitan dengan ruang bernorma *cone* dan aplikasinya yaitu teorema titik tetap di ruang Banach *cone*.

Beberapa buku juga menjadi acuan dalam penulisan skripsi ini. Bartle dan Sherbert (2000) menjelaskan dasar-dasar analisis real sebelum berbicara mengenai ruang metrik dan ruang bernorma. Shirali dan Vasudeva (2006) secara khusus menjelaskan mengenai konsep dasar ruang metrik. Darmawijaya (2007) menjelaskan ruang vektor, ruang metrik, dan ruang bernorma. Agarwal, Meehan, dan O'Regan (2001) secara rinci menjelaskan teori titik tetap.

### **1.6. Sistematika Penulisan**

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi empat bab dengan sistematika sebagai berikut:

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini membahas mengenai latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

#### **BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini membahas mengenai tujuh landasan teori yang harus dipahami sebelum membahas inti skripsi ini, yaitu mengenai dasar-dasar analisis real, ruang vektor, ruang metrik, ruang bernorma, teorema titik tetap titik tetap, *cone*, dan ruang metrik *cone*.

#### **BAB III PEMBAHASAN**

Bab ini membahas mengenai pengertian ruang bernorma *cone*, barisan pada ruang bernorma *cone*, dan teorema titik tetap pada ruang Banach *cone*.

#### **BAB IV PENUTUP**

Bab ini berisi kesimpulan dan saran-saran yang diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

### 1.7. Metode Penelitian

Metode penelitian yang penulis gunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan mengkaji paper yang telah disampaikan dalam tinjauan pustaka kemudian penulis membuktikan teorema-teorema yang ada dalam paper tersebut dan memberikan contohnya. Selain itu, penulis juga menggunakan beberapa buku dan situs internet yang berhubungan dengan ruang bernorma *cone*.

Penulis mengambil beberapa materi yang menjelaskan mengenai ruang bernorma *cone*. Langkah terakhir adalah membuktikan teorema-teorema dan memberikan contoh yang berkaitan dengan ruang bernorma *cone*.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa ruang bernorma *cone* merupakan pasangan ruang vektor dengan suatu norma dengan sifat-sifat yang telah disampaikan di BAB III.

Seperti halnya di ruang bernorma, sifat-sifat barisan konvergen dan barisan Cauchy juga berlaku di ruang bernorma *cone*, diantaranya adalah ketunggalan limit barisan dan sifat aljabar.

Selanjutnya, jika terdapat himpunan tertutup dan konveks subset dari ruang Banach *cone* dan memenuhi kondisi kontraktif, maka pemetaan himpunan tersebut ke dirinya sendiri memiliki setidaknya satu titik tetap.

#### 4.2. Saran

Setelah menyelesaikan penelitian ini, penulis menyarankan:

1. Penelitian ini membahas mengenai konsep dasar ruang bernorma *cone* dan titik tetap di ruang Banach *cone* saja. Pembahasan di ruang Banach *cone* dapat dikembangkan lagi misalnya mengenai ruang bernorma *cone* dimensi terbatas dan teorema kategori Baire (*Baire category theorem*).
2. Penelitian ruang bernorma *cone* dapat dikembangkan lagi misalnya dalam bidang optimisasi.
3. Penelitian ruang Banach *cone* dapat dikembangkan dalam teori-teori integral.

4. Penelitian titik tetap di ruang Banach *cone* dapat dikembangkan lagi dalam menentukan Turunan Frechet.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdeljawad, Thabet. *Completion of Cone Metric Spaces*. Hacettape Journal of Mathematics and Statistics Volume 39(1) (2010), 67-74.
- Agarwal, Ravi P., Donald D Reagen dan D.R. Sahu. 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*. USA. Springer.
- Agarwal, Ravi P., Maria Mehan, dan Donald D Reagen. 1986. *Fixed Point Theory and Applications*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Darmawijaya, Soeparna. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada.
- Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada.
- Guang, Huang Long dan Zhang Xian. *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings*. J. Math. Anal. Appl (2007) 1468-1476.
- Karapinar, Erdal. *Research Article: Fixed Point Theorems in Cone Banach Spaces*. Hindawi Publising Corporation 15 Desember 2009.
- Rezapour, Sh dan R. Hamblarani. *Some Notes on The Paper "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mapping"*. J. Math Anal. Appl. 26 April 2007.
- Siddiqi, Abul Hasan. 2004. *Applied Functional Analysis: Numerical Methods, Wavelet Method, and Image Processing*. New York: Marcel Dekker, Inc.