

# **RING NOETHER DAN TEOREMA BASIS HILBERT**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagai persyaratan

Mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



**Diajukan Oleh**

**Estri Yunita Sari**

**09610016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2013**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Estri Yunita Sari  
NIM : 09610016  
Judul Skripsi : Ring Noether Dan Theorema Basis Hilbert

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Sains.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 20 September 2013

Pembimbing I

Dra. Khurul Wardati, M.Si

NIP. 19660731 200003 2 001

Pembimbing II

Malahayati, M.Sc

NIP. 19840412 201101 2 010



Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

FM-UINSK-BM-05-07/R0

**PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/3200/2013

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Ring Noether Dan Theorema Basis Hilbert

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :  
Nama : Estri Yunita Sari  
NIM : 09610016  
Telah dimunaqasyahkan pada : 30 September 2013  
Nilai Munaqasyah : A/B  
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

**TIM MUNAQASYAH :**

Ketua Sidaqq

Dra. Khurul Wardati, M.Si.  
NIP. 19660731 200003 2 001

Penguji I

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.  
NIDN. 0513018402

Penguji II

Malahayati, M.Sc.  
NIP.19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 22 Oktober 2013  
UIN Sunan Kalijaga  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Dekan



H. Akh. Minhaji, M.A., Ph.D.  
NIP.19580919 198603 1 002

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan dibawah ini :

Nama : Estri Yunita Sari  
NIM : 09610016  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, dan atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian Tugas Akhir di Perguruan Tinggi lain, kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 20 September 2013

Yang menyatakan



Estri Yunita Sari  
NIM. 09610016

## HALAMAN MOTTO

Allah lebih mengetahui yang terbaik untuk hamba-Nya

إِنَّمَا أَمْرُهُ إِذَا أَرَادَ شَيْئًا أَنْ يَقُولَ لَهُ كُنْ فَيَكُونُ

*“Sesungguhnya perintah-Nya apabila Dia menghendaki sesuatu hanyalah berkata kepadanya: “Jadilah!” maka terjadilah ia.” (Q.S Yassin:82)*

Ketika kekalahan menghampirimu jangan biarkan ia menghentikanmu. Percayalah selalu ada jalan disetiap rintangan.  
(Anonim)

## HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Almamater Tercinta Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

Bapakku Ngadiyono dan Ibuku Tuminah, S.Pd

Adikku Wahyu Dwi Prasetyo dan Destri Prasetyaningtyas



## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillah*, penulis memanjatkan segala puji syukur kehadiran Allah SWT Tuhan semesta alam atas limpahan rahmat serta hidayah-Nya sehingga tulisan ini dapat terselesaikan. Sholawat serta salam tak lupa tercurahkan kepada nabi Muhamad SAW, yang telah menuntun umatnya menuju jalan yang terang.

Skripsi ini disusun guna memperoleh gelar Sarjana Sains (Matematika). Isi dari tugas akhir ini membahas mengenai **RING NOETHER DAN TEOREMA BASIS HILBERT**.

Penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari do'a, bantuan, dan bimbingan dari berbagai pihak. Maka pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga.
2. Bapak M. Farhan Qudratullah, M.Si selaku dosen Pembimbing Akademik, atas nasehat dan bimbingan selama perkuliahan.
3. Ibu Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si selaku pembimbing pertama, atas bimbingan, motivasi dan ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
4. Ibu Malahayati, M.Sc selaku pembimbing kedua sekaligus penguji kedua, atas bimbingan, motivasi, dan ilmu yang telah diberikan.
5. Bapak Muhamad Zaky Riyanto, M.Sc selaku penguji pertama, atas kritik dan masukannya dalam perbaikan

6. Bapak/Ibu Dosen Fakultas Saintek UIN Sunan Kalijaga atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Bapakku Ngadiyono, Ibu Tuminah, S.Pd , serta adik-adikku Wahyu Dwi Prasetyo dan Destri Prasetyaningtyas, atas do'a, motivasi, dan dukungannya baik secara moral ataupun material sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Sahabat-sahabatku Matematika 2009, Tyas, Eki, Ulfa, Anis, Widi, Dodo, Mahfudzoh, Hinung, dan Pendidikan Matematika 2009, serta tak lupa juga teman-teman angkatan 2008, 2010, atas ide yang telah diberikan pada saat penulis mengajak diskusi.
8. Sahabat Kos Rolling Dor, Ita, Tutut, Dheah dan Kos Wisma Asri, Hajar, Siti, Irma, Indah, Dede Estri, atas motivasi dan dukungannya.

Semoga segala bantuan dan motivasi yang penulis terima bermanfaat untuk melanjutkan ke jenjang berikutnya. Semoga atas budi baiknya dari semua pihak mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.

Penulis menyadari bahwa penulisan tugas akhir ini masih jauh dari sempurna, penulis sangat mengharapkan kritik serta saran dari para pembaca. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca terutama teman-teman di bidang matematika.

Yogyakarta, 13 September 2013

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN SKRIPSI .....</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN.....</b>	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI .....</b>	<b>iv</b>
<b>HALAMAN MOTTO .....</b>	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN .....</b>	<b>vi</b>
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI .....</b>	<b>ix</b>
<b>DAFTAR LAMBANG .....</b>	<b>xi</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>xiii</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang Masalah .....	1
1.2 Batasan Masalah .....	2
1.3 Rumusan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Masalah .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	3
1.6 Tinjauan Pustaka .....	4
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b>	
2.1 Ring.....	6
2.2 Ring Polinomial .....	16
2.2 Ideal .....	26

2.4 Ring Faktor .....	35
2.4 Homomorfisma Ring.....	38
<b>BAB III Metode Penelitian.....</b>	<b>47</b>
<b>BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1 Kondisi Rantai Naik.....	48
4.2 Ring Noether.....	54
4.3 Teorema Basis Hilbert .....	60
<b>BAB V PENUTUP</b>	
5.2 Kesimpulan .....	67
5.2 Saran-Saran .....	68
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>69</b>



## DATFTAR LAMBANG

$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: himpunan semua bilangan rasional
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
$\mathbb{N}$	: himpunan semua bilangan asli
$x \in A$	: $x$ elemen himpunan $A$
$y \notin B$	: $y$ bukan elemen himpunan $B$
$A \subset B$	: $A$ subset sejati dari $B$
$A \subseteq B$	: $A$ subset dari $B$
$\emptyset$	: himpunan kosong
$\cap$	: irisan himpunan
$\cup$	: gabungan himpunan
$\Leftrightarrow$	: biimplikasi
$(\Rightarrow)$	: pembuktian syarat perlu
$(\Leftarrow)$	: pembuktian syarat cukup

$\cong$  : isomorfis

$a|b$  :  $a$  membagi habis  $b$

$\forall$  : kuantor universal

$\exists$  : kuantor eksistensial

$-a$  : invers terhadap penjumlahan

$a^{-1}$  : invers terhadap penggandaan

$ker(f)$  : kernel homomorfisma  $f$

$im(f)$  : bayangan dari homomorfisma

## ABSTRAK

Ring komutatif disebut ring Noether apabila setiap idealnya dapat dibangun secara berhingga. Ring Noether juga dapat didefinisikan dengan kondisi rantai naik dari ideal-idealnya. Kondisi rantai naik adalah rantai naik yang bersifat stasioner. Sifat lain yang dapat mendefinisikan ring Noether adalah ring yang memenuhi kondisi maksimal. Akibatnya setiap ring Noether memiliki ideal maksimal. Salah satu sifat ring Noether adalah setiap bayangan homomorfisma dari ring Noether juga ring Noether. Pernyataan tersebut berlaku lebih khusus pada homomorfisma natural bahwa ring faktor dari ring Noether merupakan ring Noether.

Diberikan ring polinomial atas suatu ring. Jika suatu ring tersebut merupakan ring Noether maka ring polinomialnya juga merupakan ring Noether. Pernyataan inilah yang lebih dikenal dengan Teorema Basis Hilbert. Teorema tersebut mengakibatkan ring multinomial atas ring Noether juga ring Noether.

**Kata kunci** : ideal maksimal, kondisi rantai naik, ring Noether, Teorema Basis Hilbert



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Matematika dibagi dalam berbagai rumpun keilmuan, antara lain rumpun aljabar, analisis, terapan, dan statistik. Rumpun aljabar sendiri terbagi dalam berbagai bidang misal aljabar abstrak, aljabar linear, aljabar geometri dan lain sebagainya. Aljabar abstrak merupakan bidang yang mempelajari struktur aljabar antara lain grup, ring, modul, dan ruang vektor.

Salah satu materi aljabar abstrak yang telah dipelajari adalah konsep ring. Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan dan penggandaan yang memenuhi aksioma-aksioma ring. Ring yang memenuhi sifat komutatif terhadap penggandaan disebut ring komutatif.

Sebarang ring  $R$  paling tidak memiliki ideal  $\{0\}$  dan  $R$  itu sendiri. Dengan kata lain, suatu ring mempunyai lebih dari satu ideal sehingga akan ada rantai dari ideal-idealnya yaitu  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$ , dengan  $I_i$  untuk setiap  $i$  adalah ideal. Rantai ideal dari ring sangat berkaitan dengan kondisi rantainya. Salah satu kondisi rantai ideal adalah kondisi rantai naik. Hal ini senada dengan yang dikemukakan oleh ilmuwan Jerman, yaitu Emy Noether (1882-1935). Noether mengemukakan bahwa kondisi rantai naik sangat penting dalam teori ideal, yaitu suatu ring memenuhi kondisi rantai naik jika rantai idealnya berhingga.

Salah satu contoh ring yang telah dipelajari penulis adalah ring himpunan bilangan bulat  $(\mathbb{Z}, \times, +)$ . Ring  $\mathbb{Z}$  adalah ring komutatif yang idealnya selalu berupa

ideal utama, yaitu dapat dibangun oleh satu elemen. Artinya ideal dari  $\mathbb{Z}$  dapat dibangun secara berhingga. Dari ring  $\mathbb{Z}$ , diberikan ring polinomial atas bilangan bulat  $(\mathbb{Z}[x], +, \times)$ . Meskipun struktur baru atas  $\mathbb{Z}$ , tetapi ideal dari  $\mathbb{Z}[x]$  dapat tidak berupa ideal utama.

Sebagai contoh, diambil suatu ideal dalam  $\mathbb{Z}[x]$  yaitu ideal  $I = \langle 2, x \rangle = \{2a + bx \mid a, b \in \mathbb{Z}[x]\}$ . Perhatikan bahwa  $I$  merupakan ideal yang dibangun oleh elemen 2 dan  $x$ . Terdapat dua elemen pembangun dalam ideal  $I$ , dengan kata lain ideal  $I$  bukan merupakan ideal utama. Hal yang menarik dari  $\mathbb{Z}[x]$  adalah idealnya dapat dibangun secara berhingga. Jadi terdapat sifat dari  $\mathbb{Z}$  yang tetap dibawa dalam  $\mathbb{Z}[x]$ , yaitu idealnya dibangun secara berhingga.

Berdasar dua hal tersebut, penulis tertarik mempelajari struktur ring yang rantai idealnya memenuhi kondisi rantai urutan naik serta ring yang setiap idealnya dibangun secara hingga. Selanjutnya ring tersebut dinamakan ring Noether.

Berdasarkan contoh tersebut di atas dapat diketahui bahwa suatu ring apabila dibentuk struktur baru atas ring tersebut maka ada sifat-sifat yang diawetkan dalam struktur baru. Berdasar hal tersebut, pada skripsi ini penulis diharapkan dapat mengkaji hubungan antara ring Noether dengan polinomialnya, yang dinyatakan dalam Teorema Basis Hilbert.

## 1.2 Batasan Masalah

Pembatasan masalah diperlukan dalam penelitian ilmiah karena dapat membantu penulis fokus pada objek penelitian. Demikian juga dengan penelitian yang penulis lakukan. Permasalahan yang terdapat dalam penelitian ini adalah

ring Noether. Konsep dari teori ring masih mencakup ruang lingkup yang cukup luas yang meliputi ring komutatif, ring polinomial, ideal dan ring faktor. Dari setiap bahasan tersebut masih mencakup subbahasan yang menarik untuk dikaji. Batasan masalah dalam penelitian ini difokuskan pada ring komutatif.

### **1.3 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang diuraikan penulis maka rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana konsep tentang ring Noether?
2. Bagaimana sifat ring faktor dari ring Noether?
3. Bagaimana keberadaan ideal maksimal dalam ring Noether?
4. Bagaimana hubungan ring Noether dengan ring polinomialnya?

### **1.4 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah :

1. Mengetahui tentang konsep ring Noether
2. Mengetahui sifat ring faktor dari ring Noether
3. Mengetahui keberadaan ideal maksimal dalam ring Noether
4. Mengetahui hubungan ring Noether dengan ring polinomialnya.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, diantaranya:

1. Dapat menyatakan bahwa setiap ideal dari ring multinomial atas ring Noether dibangun secara berhingga sehingga pembangunnya dapat diplikasikan dalam ilmu komputasi terutama pada basis komputasi.

2. Memberikan motivasi kepada peneliti-peneliti selanjutnya untuk melanjutkan penelitian tentang ring Noether

### 1.6 Tinjauan Pustaka

Pembahasan mengenai ring Noether telah dikaji oleh Dominicus Ponco Wibowo (2001). Ring Noether yang didefinisikan oleh Wibowo sebagai suatu ring yang memenuhi kondisi rantai naik dari idealnya. Definisi ideal yang diberikan Wibowo menggunakan ideal kiri. Sebarang ring mempunyai ideal sehingga dapat dibentuk ring faktornya sehingga dijelaskan oleh Wibowo bahwa ring faktor merupakan ring Noether apabila ring dan idealnya merupakan ring Noether. Selanjutnya jika diberikan ring polinomial atas ring Noether  $R$  maka ring polinomial atas ring  $R$  juga merupakan ring Noether. Teorema ini dibuktikan oleh wibowo dengan bukti langsung serta induksi pada pangkat dari polinomial-polinomial pembangun sebarang idealnya. Secara sederhana jika  $I_n$  ideal dalam  $R[x]$  untuk suatu  $n$  bilangan asli dan  $f_r \in I_n$  dengan degree  $r$  suatu  $r$  bilangan asli maka  $f_s$  polinomial dengan degree lebih besar dari  $r$ , maka mengakibatkan  $f_s \in I_{n+1}$ .

Pada tahun 2002 Joseph. J. Rotman menjelaskan mengenai ring  $R$  yang kemudian ring  $R$  merupakan ring komutatif dengan elemen satuan. Selanjutnya kondisi rantai naik dari idealnya juga dibahas Rotman, hal ini sudah berlaku pada ring komutatif. Sedangkan ring Noether yang didefinisikan Rotman merupakan suatu ring yang setiap idealnya dibangun oleh elemen secara berhingga. Selain mendefinisikan ring Noether, Rotman (2002) juga memberikan sifat bahwa sebarang ring Noether mempunyai ideal maksimal. Selanjutnya dari suatu ring

dapat dibentuk ring polinomialnya, Jika  $R$  ring Noether maka ring polinomialnya juga merupakan ring Noether.

Perbedaan antara skripsi Wibowo dengan penulisan ini adalah pada penulisan ini definisi ring telah dikhususkan pada ring komutatif sedangkan skripsi Wibowo masih menggunakan ring yang ideal memehuni ideal kiri. Pembuktian-pembuktian di dalam skripsi Wibowo secara umum menggunakan ideal kiri tanpa membuktikan ideal kanan. Sifat ring Noether dengan ring faktornya penulis jelaskan sebagai akibat dari bayangan homomorfisma ring Noether, kasus khusus pada homomorfisma natural. Sedangkan sifat tersebut dijelaskan Wibowo sebagai sebarang ring dapat dibentuk ring faktornya. Perbedaan pembuktian pada teorema basis Hilbert dilakukan penulis menggunakan pembuktian tidak langsung pada sebarang ideal yang dibangun berhingga. Selain itu hubungan antara ring Noether dan ideal maksimal akan dibahas penulis yang merupakan satu-satunya sifat yang tidak terdapat dalam skripsi Wibowo.

## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan studi literatur yang penulis lakukan mengenai ring Noether dan Teorema Basis Hilbert, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan ring  $R$  dan  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$  sebarang rantai naik ideal-ideal  $R$ . Ring  $R$  dikatakan memenuhi kondisi rantai naik apabila rantai naik stasioner.
2. Suatu ring memenuhi kondisi maksimal apabila setiap keluarga ideal-idealnya memiliki elemen maksimal.
3. Diberikan ring  $R$ , ketiga kondisi berikut ekuivalen
  - 3.1  $R$  memenuhi rantai urutan naik
  - 3.2  $R$  memenuhi kondisi maksimal
  - 3.3 Setiap ideal dalam  $R$  dibangun secara hingga
4. Suatu ring  $R$  disebut ring Noether jika setiap idealnya dibangun secara berhingga.
5. Setiap bayangan homomorfisma dari ring Noether merupakan ring Noether. Sebagai akibatnya diberikan homomorfisma natural maka  $R/I$  ring faktor juga merupakan ring Noether.
6. Diberikan  $R$  ring Noether, jika  $I$  adalah ideal dari  $R$ , maka terdapat ideal maksimal  $M$  dalam  $R$  yang memuat  $I$ . Dengan kata lain, setiap ring Noether memiliki ideal maksimal

7. Terdapat hubungan antara ring Noether dengan ring polinomialnya yaitu jika  $R$  ring Noether maka  $R[x]$  adalah ring Noether. Pernyataan tersebut yang dinamakan Teorema Basis Hilbert.
8. Akibat dari teorema tersebut menyatakan bahwa jika  $R$  ring Noether maka  $R[x_1, x_2, \dots, x_n]$  adalah ring Noether.

## 5.2 Saran-saran

Beberapa saran yang dapat saya sampaikan berdasar studi literatur yang penulis lakukan, sebagai berikut:

1. Penelitian yang dilakukan penulis pada ideal yang memenuhi kondisi rantai naik sehingga dimungkinkan ada penelitian lebih lanjut mengenai ring yang rantai idealnya memenuhi kondisi rantai turun.
2. Penelitian ini dibatasi pada ring polinomial dengan koefisien berhingga, sehingga dimungkinkan penelitian mengenai teorema basis hilbert pada ring polinomial dengan koefisien tak berhingga.

Semoga tugas akhir ini dapat menginspirasi pembaca untuk mengembangkan lebih lanjut mengenai ring Noether dan Teorema Basis Hilbert pada khususnya dan aljabar abstrak pada umumnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Dummit, David. S. dan Richard. M. Foote. 2004. *Abstract Algebra*. Third Edition. John Willey and Sons, inc.
- Gallian, Joseph A. 1996. *Contemporary Abstract Algebra*. Toronto: D.C.Haeath Company
- Grillet, Pierre A. 2000. *Abstract Algebra*. Second Edition. USA: Springer.
- Rotman, Joseph J. 2002. *Anvanced Modern Algebra*. English: Prentice Hall.
- Wibowo, Dominucus P. 2001. *Ring Noether Dan Ring Artin*. Skripsi. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma

