PENYELESAIAN MASALAH NILAI BATAS PERSAMAAN DIFERENSIAL MATHIEU–HILL

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

Mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh

Santosa
08610023

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2013

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Santosa
NIM	: 08610023
Judul Skripsi	: Penyelesaian Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Mathieu-Hill

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta1, 1 Agustus 2013

Pembimbing I	Pembimbing II
M.Wakhid Musthofa, M.Si	Malahayati, M.Sc
NIP. 19800402 200401 1003	NIP. 19840412 201101 2 010

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/2619/2013

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Penyelesaian Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Mathieu - Hill

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Santosa
NIM : 08610023
Telah dimunaqasyahkan pada : 15 Agustus 2013
Nilai Munaqasyah : B+
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji I

Sugiyanto, M.Si
NIP.19800505 200801 1 028

Penguji II

Malahayati, M.Sc
NIP.19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 03 September 2013
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Santosa
NIM	: 08610023
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, dan atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian Tugas Akhir di Perguruan Tinggi lain, kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 5 Juli 2013
Yang menyatakan

METERAI TEMPEL
TGL. 20
74C9ABF701704177
ENAM RIBU RUPIAH
6000 DJP

Santosa
NIM. 08610023

HALAMAN PERSEMBAHAN

Atas Rahmat dan Ridlo Allah SWT, skripsi ini kupersembahkan kepada:

1. Bapak dan Ibuku yang tercinta.
2. Nurul Istiqomah dan Malinda Pangesti tersayang.
3. Keluarga besar Watugeni dan Sabrangkali.
4. Masyarakat Watugeni.
5. Jati wiyandari.
6. Sahabat-sahabatku Imron, Ranto, Aziz, Nisa yang sangat luar biasa.

HALAMAN MOTTO

- *“ Bismillahirrahmanirrahim “*
- Belajar = Jalan Surga
- Rumput = Duniawi ; Padi = Surgawi
- Janganlah engkau berhenti berkarya sebelum waktu yang kan menghentikan langkahmu.
- Jangan pernah bermimpi menjadi yang terbaik, tapi lakukan apa yang bisa lakukan untuk jadi yang terbaik.
- Amin,,,

KATA PENGANTAR

ألسلا م عليكم ورحمة الله وبر كاته

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT yang telah memberikan nikmat dan kesehatan sehingga peneliti dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan lancar. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Rasulullah Muhammad SAW, yang telah memberikan teladan yang baik lagi mulia untuk hambanya. Semoga esok kita mendapatkan syafaatnya sampai hari akhir.

Skripsi ini berjudul "Penyelesaiain Masalah Nilai Batas pada Persamaan Differensial Mathieu-Hill". Penulisan skripsi ini dapat terwujud karena bimbingan, bantuan dan dukungan berbagai pihak. Sebagai insan yang tak luput dari kurang dan salah, peneliti mengucapkan banyak terima kasih kepada pihak-pihak yang telah membantu menyelesaikan tugas akhir ini, baik bantuan berupa materi atau non-materi. Karenanya dalam penelitian kali ini peneliti mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ketua Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak Sugiyanto, M.Si., selaku dosen pembimbing akademik mahasiswa program studi matematika angkatan 2008.
4. Bapak M. Wakhid Musthofa, M.Si., selaku pembimbing I yang senantiasa mendengarkan keluhan saat penelitian dan memberikan solusi

penyelesaian kepada peneliti sehingga penyusunan skripsi ini berjalan dengan baik.

5. Ibu Malahayati, M.Sc., selaku pembimbing II yang memberikan arahan, saran, dan bimbingan kepada penulis sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
6. Bapak Ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, yang telah memberikan ilmu pengetahun sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi ini.
7. Segenap karyawan di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membantu dan memberikan berbagai fasilitasnya untuk memudahkan mahasiswa khususnya peneliti.
8. Bapak kost yang sudah memberikan kenyamanan tempat tinggal sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan nyaman.
9. Teman-teman Matematika 2008 yang telah memberikan motivasi, diskusi dan pengalaman yang sangat berguna dan berharga.
10. Bapak dan ibuku tersayang yang senantiasa mendo'akan, memberi semangat, berjuang, dan memotivasi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua pihak yang telah memberikan dukungan dan do'a kepada peneliti, serta semua pihak yang membantu terselesaikannya skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT menerima amal kebaikan beliau semua dan memberikan balasan pahala atas kebaikan dan segala yang telah beliau semua berikan kepada penulis dan semoga dapat menjadi pemberat amal kebaikan di akhir kelak.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Maka, penulis mengharap saran dan kritik yang bersifat membangun demi kebaikan dan kesempurnaan skripsi ini. Semoga apa yang terdapat dalam skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

وألسلا م عليكم ورحمة الله وبر كاته

Yogyakarta, 20 Maret 2013

Santosa

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

R	: Bilangan Real
$\varnothing$	: Himpunan Kosong
∞	: Bilangan tak hingga
$\frac{dy}{dx}$	: Turunan pertama fungsi y terhadap x
$\frac{d^n y}{dx^n}$	: Turunan ke-n fungsi y terhadap x
$\neq$	: Tidak sama dengan
e	: Bilangan Eksponen
i	: Bilangan Imajiner
$\sum_{a}^{b}$	: Jumlah suku ke-a sampai suku ke-b
$\int$	: Integral tak tentu
$\int_{a}^{b}$	: Integral tertentu dengan batas a sampai b
$\lvert A \rvert$	: Determinan Matriks A
A^{-1}	: Invers Matriks A
$\exists$	: Ada
$\forall$	: Untuk setiap
$\langle\ \rangle$	: Hasil Kali Dalam
$(\Rightarrow)$	: Syarat perlu
$(\Leftarrow)$	: Syarat cukup

$\wedge$: Dan

$\vee$: Atau

$\in$: Anggota

$>$: lebih besar dari

$<$: lebih kecil dari

$\leq$: kurang dari sama dengan

ABSTRAK

Berbagai masalah fisis dan geometri yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Salah satu analisis fisis tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial. Ilmuwan matematika yang bernama George W. Hill dan Mathieu meneliti tentang getaran pada pendulum gantung yang bisa dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial Mathieu-Hill. Persamaan diferensial Mathieu-Hill adalah persamaan diferensial orde dua yang didalam fungsi tersebut terdapat fungsi periodik.

Persamaan diferensial Mathieu-Hill dapat diselesaikan dengan menggunakan metode aljabar matriks. Pada tahun 2005 sudah diteliti tentang solusi dari persamaan diferensial Mathieu-Hill. Penelitian tugas akhir ini menjelaskan tentang penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu Hill yang akan manghasilkan suatu solusi dalam bentuk persamaan periodik.

Untuk lebih memahami penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill diberikan salah satu contoh aplikasinya dalam menghitung getaran pada mesin lokomotif kereta yang dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial Hill-Meissner.

Kata kunci: Nilai batas, Diferensial Mathieu-Hill, Aljabar matriks, Diferensial Hill-Meissner.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Segala sesuatu yang diciptakan di muka bumi ini tidaklah sia-sia, karena hal itu sudah diatur oleh Allah swt dengan hitungan yang tepat dan teliti. Hal tersebut dapat dilihat dalam surat Maryam ayat 94 sebagai berikut:

لَقَدْ اَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ○

Artinya: " Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti".

Segala hal dalam kehidupan ini sudah ada hitungannya. Allah swt menciptakan sesuatu di bumi ini sudahlah dengan hitungan yang tepat, dengan kata lain segala sesuatu di bumi ini pasti sudah dihitung Allah swt dengan teliti. Manusia tak akan pernah lepas dari masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu, manusia dituntut untuk selalu berpikir kreatif dalam menyelesaikan masalah tersebut. Untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari maka manusia dituntut untuk mencari ilmu setinggi-tingginya.

Perkembangan suatu ilmu pengetahuan banyak memegang peranan penting dalam perkembangan suatu teknologi. Tanpa ilmu pengetahuan, teknologi akan sulit bisa berkembang dengan cepat.

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai ciri berbeda dengan disiplin yang dimiliki oleh ilmu pengetahuan lain. Hal-hal yang dipelajari dalam matematika terdiri atas beberapa kelompok ilmu, seperti: aljabar, geometri, analisis, dan matematika terapan. Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang matematika yang termasuk dalam kelompok terapan.

Salah satu kajian matematika terapan adalah persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu (atau beberapa) turunan fungsi yang tak diketahui. Suatu persamaan diferensial yang memiliki satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa, sedangkan persamaan diferensial yang memiliki lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial (Rochmad, 2002 : 3).

Beberapa persamaan diferensial memiliki solusi dengan jumlah yang tidak terbatas, sedangkan persamaan-persamaan lain ada yang tidak memiliki solusi sama sekali, tetapi terdapat pula persamaan diferensial yang memiliki satu solusi penyelesaian. Penyelesaian dalam persamaan diferensial memiliki dua solusi yaitu solusi umum dan solusi khusus. Dikatakan solusi umum jika persamaan fungsi masih memuat konstanta, dan disebut solusi khusus jika tidak terdapat konstanta yang didapatkan dengan menggantikan nilai-nilai awal dan syarat batas yang diketahui.

Berbagai masalah fisis yang melibatkan dua fungsi atau lebih peubah bebas sangat berkaitan dengan persamaan diferensial. Masalah fisis yang paling sederhana dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial biasa, sedangkan masalah fisis yang lebih komplek seperti mekanika fluida, teori elekromagnetik, dan sebagainya merupakan masalah-masalah fisis yang harus dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial.

Salah satu analisis matematis dari masalah fisis tersebut dapat menghasilkan suatu persamaan diferensial yang dapat disederhanakan ke bentuk umum berikut,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(t)y = 0; \qquad \text{dengan } 0 \leq t \leq T \tag{1.1}$$

dan *F(t)* suatu fungsi periodik bernilai tunggal, dengan periode pokok *T*. Persamaan (1) disebut persamaan diferensial Mathieu-Hill (Pipes, 1991 : 911). Persamaan Mathieu-Hill ini ditemukan oleh ilmuwan yang bernama Mathieu dan George W. Hill.

Woro Raharjanti sudah meneliti tentang penyelesaian persamaan diferensial Mathieu-Hill, dalam penelitiannya Woro Raharjanti sudah menuliskan gambaran umum persamaan umum diferensial Mathieu-Hill beserta solusinya. Penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian tersebut dengan menambahkan persamaan syarat batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill. Penulis menambahkan persamaan syarat batas bertujuan untuk menghilangkan konstanta pada penyelesaian umum persamaan diferensial Mathieu-Hill.

Suatu persamaan diferensial bersama dengan kondisi-kondisi tambahan terhadap fungsi yang dicari dan turunannya, yang semuanya diberikan pada nilai variabel bebas yang sama maka disebut permasalahan diferensial dengan nilai awal. Jika kondisi-kondisi tambahan diberikan untuk lebih dari satu nilai variabel bebas maka disebut permasalahan diferensial dengan nilai batas.

Penenlitian ini akan menyajikan langkah-langkah penyelesaian persamaan (1) yang terikat oleh syarat-syarat nilai batas yang ditentukan. Penyelesaian persamaan diferensial akan lebih mudah dan cepat apabila digunakan suatu alat bantu seperti komputer. Saat ini perkembangan perangkat lunak komputer yang berbasis matematika sangatlah pesat. Hal ini terbukti dengan munculnya perangkat lunak yang dapat digunakan untuk kepentingan pengembangan matematika maupun penerapannya. Salah satu perangkat lunak yang dikembangkan untuk kepentingan Sistem Komputer Aljabar (*Computer Algebaric System*) adalah Maple. Maple banyak digunakan oleh para ilmuwan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan matematika, karena Maple merupakan perangkat lunak yang lengkap dan komunikatif pada jenisnya.

Permasalahan yang dapat diselesaikan dengan Maple merupakan permasalahan matematika murni, seperti aljabar, geometri, kalkulus, matematika diskret, dan statistika. Dengan kemajuan teknologi tersebut penulis tertarik untuk menggunakan Maple dalam menghitung masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.

1.2 Batasan Masalah

Penulis membatasi ruang lingkup dalam penulisan skripsi ini, yaitu menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill dengan syarat-syarat nilai batas yang ditentukan apabila penyelesaiannya hanya satu periodik.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan pendahuluan dan batasan masalah di atas maka dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimanakah penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.
2. Bagaimanakah visualisasi program Maple untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.
2. Mengetahui aplikasi program Maple untuk visualisai masalah nilai batas persamaan diferensial Mathieu-Hill.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah, sebagai berikut:

1. Membantu mahasiswa dalam mempelajari penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.
2. Menambah pengetahuan dalam penggunaan program Maple untuk visualisasi masalah nilai batas persamaan diferensial Mathieu-Hill.

1.6 Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka ini adalah buku yang berjudul " Ordinary Differential with Applications " yang disusun oleh Carmen Chicone dan buku yang berjudul "*Matematika Terapan: untuk Para Insinyur dan Fisikawan* " yang disusun oleh

Louis A Pipes. Kedua buku tersebut hanya sedikit menjelaskan tentang persamaan Diferential Mathieu-Hill belum disertai dengan contoh penyelesaian dan terapannya.

Selanjutnya dalam penulisan ini akan diteliti penerapan dan penyelesaian pada persamaan diferensial Mathieu-Hill khususnya penyelesaian masalah nilai batas persamaan diferensial Mathieu-Hill. Penulis juga menggunakan acuan lain seperti: skripsi yang disusun oleh Woro Raharjanti yang berjudul "Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill" dan buku acuan yang berjudul "Elementary Differensial Equations and Boundary Value Problems" yang disusun oleh William E. Boyce dan Richard C. DiPrima. Skripsi yang disusun oleh Woro Raharjanti membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial Mathieu-Hill. Penulis melanjutkan penelitian skripsi Woro Raharjanti dengan memberikan nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi bertujuan untuk mempermudah pembaca dalam memahami isi skripsi. Adapun sistematika penulisan skripsi yang penulis susun ini terdiri dari 3 (tiga) bagian besar yaitu bagian awal, bagian isi dan bagian akhir.

Bagian awal, memuat halaman judul, abstraksi, halaman pengesahan, halaman motto dan persembahan, kata pengantar, dan daftar isi.

Bagian isi terbagi atas 4 bab, yaitu:

BAB I Pendahuluan

Membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan dan metode penelitian.

BAB II Landasan Teori

Mencakup pembahasan materi-materi pendukung yang digunakan dalam pemecahan masalah diantaranya persamaan diferensial elementer, persamaan syarat batas, pengertian persamaan diferensial Mathieu-Hill dan aljabar matriks.

BAB III Pembahasan

Bab III akan membahas penyelesaian umum dan khusus persamaan diferensial Mathieu-Hill, penyelesaian persamaan Hill-Meisner, penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill dan visualisasi program Maple.

BAB IV Aplikasi Persamaan Diferensial Mathieu-Hill

Pada bab ini akan membahas aplikasi persamaan diferensial Mathieu-Hill beserta visualisasinya dengan program Maple.

BAB V Penutup

Berisi tentang kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran yang ditujukan untuk pembaca umumnya dan bagi penulis sendiri khususnya.

Bagian akhir memuat daftar pustaka sebagai acuan penulisan yang mendukung kelengkapan dan kesempurnaan skripsi ini.

1.8 Metode Penelitian

Penelitian tugas akhir ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur yaitu dengan membahas dan menjabarkan konsep-konsep yang sudah ada di dalam literatur, dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan atau penelitian literatur, yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di dalam ruang perpustakaan, seperti buku-buku, dokumen-dokumen, catatan, dan kisah-kisah sejarah. Masing-masing literatur dipilah menurut kategori tertentu dan dipilih yang sesuai dengan permasalahan yang diangkat.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis di dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami konsep dasar persamaan diferensial Mathieu-Hill yang ditulis oleh Woro Raharjanti yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill”.
2. Memahami konsep dasar masalah nilai batas yang kemudian diterapkan pada persamaan diferensial Mathieu-Hill.
3. Menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial Mathieu-Hill beserta memberikan contoh aplikasinya.

BAB V

PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang sudah dilakukan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

5.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada penelitian ini, kesimpulan yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Bentuk persamaan Mathieu-Hill adalah $\frac{d^2y}{dx^2} + F(t)y = 0$ pada interval $0 \le t \le T$. Dengan metode matriks diperoleh penyelesaian persamaan diferensial Mathieu-Hill pada sembarang *t > 0* yang dinyatakan dalam nilai awal untuk $y(t)$ dan $\frac{dy}{dt}(t) = v(t)$ dengan dua penyelesaian bebas linear dan $u = \sqrt{F(t)}$ adalah:

   Pada saat *t = 0*

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix} \cos ut & \dfrac{\sin ut}{\frac{du}{dt}} \\ -\dfrac{du}{dt}\sin ut & \cos ut \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Pada saat $t = T$

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_T = \begin{bmatrix} \cos uT & \dfrac{\sin uT}{\frac{du}{dt}} \\ -\dfrac{du}{dt}\sin uT & \cos uT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Demikian juga dapat dilihat pada akhir periode ke-n, berlaku

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}_{nT} = \begin{bmatrix} \cos uT & \dfrac{\sin uT}{\frac{du}{dt}} \\ -\dfrac{du}{dt}\sin uT & \cos uT \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} y_0 \\ v_0 \end{bmatrix}.$$

2. Penyelesaian masalah nilai batas diferensial Mathieu-Hill dengan batas

$$a_1 y(0) + b_1 \frac{dy}{dt}(T) = 0$$

$$a_2 y(0) + b_2 \frac{dy}{dt}(T) = 0$$

adalah

$$y(t) = \frac{\sqrt{2T}\sin ut}{\left(T - \int_0^T \cos 2ut\,dt\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Penginterpretasian hasil output dari program *Maple* identik dengan penyelesaian dengan penghitungan manual. Namun penghitungan dengan manggunakan *Maple* akan lebih akurat dan lebih mudah dalam menggambar grafik penyelesaiaannya.

5.1 Saran-saran

Dari kesimpulan diatas, saran yang dapat penulis berikan adalah perlu diadakan penelitian lebih lanjut tentang penyelesaian masalah nilai batas diferensial Mathieu-Hill dengan metode yang berbeda.

Semakin berkembang ilmu pengetahuan maka menuntut kita untuk terus bereksplorasi dan berinovasi dengan konsep matematika dan fasilitas *software* yang ada untuk memecahkan masalah-masalah dalam matematika.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linier Elementer*, Alih bahasa Pantur Silaban dan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Arnold, Vladimir I. 1973. "*Ordinary Differential Equations*". USA: Halliday Lithograph Corp.

Boyce, William E and Richard C. Diprima, 2000, "*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*". London: John Wiley and sons,inc.

Chicon, Carmen. 1988. "Ordinary Differential with Applications". London: Blackwell Scientific Publications.

Grimshaw, R. 1990. "*Nonlinear Ordinary Differential Equations*". London: Blackwell Scientific Publications.

Hutahean, E. 1993. "*Matematika Teknik Lanjutan*". Jakarta: Erlangga.

Martono, Koko. 1999. " *Kalkulus* ". Jakarta: Erlangga.

Pinsky, Mark A, 1998, "Pa*rtial Differential Equations and Boundary-Value Problems with Applications 3rd edition*", McGraw-Hill International Editions.

Pipes, Louis A. 1991. *Matematika Terapan: untuk Para Insinyur dan Fisikawan*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press. Rochmad.

Purcell, Varbarg, and Rigdon. 2003. "Kalkulus jilid 1". Jakarta: Erlangga.

Raharjanti,Woro. 2007. "*Penyelesaian Persamaan Diferensial Jenis Mathieu-Hill*". Semarang: UNES.

Waluya, Budi. 2006. "*Buku Ajar Persamaan Diferensial*". Semarang : UNES.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran:

Aplikasi Program Maple Untuk Penyelesaian Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Hill-Meissner

Berdasarkan perhitungan pada BAB IV solusi umum dari persamaan diferensial Hill-Meisner pada interval $0 \le t \le \pi$ diperoleh:

1. Jika $\alpha+\beta>0$dan $\alpha-\beta>0$ diperoleh:

$$y_1(t)=A\sqrt{\alpha+\beta}\cos\sqrt{\alpha+\beta}t-B\sqrt{\alpha+\beta}\sin\sqrt{\alpha+\beta}t;$$

$$y_2(t)=C\sqrt{\alpha-\beta}\cos\sqrt{\alpha-\beta}t-D\sqrt{\alpha-\beta}\sin\sqrt{\alpha-\beta}t;$$

2. Jika $\alpha+\beta>0$dan $\alpha-\beta<0$ solusinya adalah

$$y_1(t)=A\sin\sqrt{\alpha+\beta}t+B\cos\sqrt{\alpha+\beta}t;$$

$$y_2(t)=C\exp(\sqrt{\alpha-\beta}t)+D\exp(-\sqrt{\alpha-\beta}t);$$

Untuk mencari α dan β fungsi gunakakan determinan dengan nilai determinannya adalah nol:

1. Jika $\alpha+\beta>0$ dan $\alpha-\beta>0$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\sin\pi\sqrt{\alpha-\beta} & -\cos\pi\sqrt{\alpha-\beta} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\pi\sqrt{\alpha-\beta} & \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\pi\sqrt{\alpha-\beta} \\ \sin\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & \cos\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} & -\cos\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} \\ \cos\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} & \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2} \end{vmatrix}=0$$

Untuk mempermudah penghitungan nilai determinan gunakan aplikasi program Maple sebagai berikut:

> *restart*;

> *with*(*LinearAlgebra*)

[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct, EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition, LeastSquares, LinearSolve, Map, Map2, MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, QRDecomposition, RandomMatrix, RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip] (1)

> $S := Matrix\left(\left[\left[0, 1, -\sin\left(\pi\sqrt{a-b}\right), -\cos\left(\pi\sqrt{a-b}\right)\right], \left[1, 0, -\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cos\left(\pi\sqrt{a-b}\right), \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sin\left(\pi\sqrt{a-b}\right)\right], \left[\sin\left(\frac{\pi\sqrt{a+b}}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi\sqrt{a+b}}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi\sqrt{a-b}}{2}\right), -\cos\left(\frac{\pi\sqrt{a-b}}{2}\right)\right], \left[\cos\left(\frac{\pi\sqrt{a+b}}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi\sqrt{a+b}}{2}\right), -\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{a-b}}{2}\right), \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sin\left(\frac{\pi\sqrt{a-b}}{2}\right)\right]\right]\right);$

$$S := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\sin\left(\pi\sqrt{a-b}\right) & -\cos\left(\pi\sqrt{a-b}\right) \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cos\left(\pi\sqrt{a-b}\right) & \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sin\left(\pi\sqrt{a-b}\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a+b}\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a+b}\right) & -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a-b}\right) & -\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a-b}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a+b}\right) & -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a+b}\right) & -\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a-b}\right) & \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a-b}\right) \end{bmatrix} \tag{2}$$

> *Determinant*(S);

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha+\beta}\Bigg(\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\alpha+\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\beta+\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\alpha+\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\beta \\
&\quad-2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\alpha-2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\beta \\
&\quad-2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\alpha-2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\beta \\
&\quad+\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\beta+\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\alpha+\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\beta \\
&\quad+\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\alpha+\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\beta \\
&\quad+2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\alpha-2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\alpha \\
&\quad+\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\alpha+\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\sin\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\beta+\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\cos\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)^2\alpha\Bigg)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Jika $\alpha = 0$ maka akan diperoleh $\beta = 0$.

2. Jika $\alpha+\beta>0$ dan $\alpha-\beta<0$.

$$
\begin{vmatrix}
0 & 1 & -\exp(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & -\exp(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) \\
1 & 0 & -\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(\pi\sqrt{\alpha-\beta}) & \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(-\pi\sqrt{\alpha-\beta}) \\
\sin\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & \cos\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\exp(\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) & -\exp(-\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) \\
\cos\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sin\dfrac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2} & -\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}) & \sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp(-\dfrac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2})
\end{vmatrix} = 0
$$

> $A := Matrix\left(\left[\left[0, 1, -\exp\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right), -\exp\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\right], \left[1, 0, -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp\left(\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right), \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp\left(-\pi\sqrt{\alpha-\beta}\right)\right], \left[\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2}\right), -\exp\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\right), -\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\right)\right], \left[\cos\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2}\right), -\sin\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha+\beta}}{2}\right), -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp\left(\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\right), \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\exp\left(-\frac{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}{2}\right)\right]\right]\right);$

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}} & -e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}} \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}} & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}} \\ \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) & \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) & -e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}} & -e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}} \\ \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) & -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) & -\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}} & \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}} \end{bmatrix} \tag{4}$$

> $Determinant(A);$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha+\beta}\Bigg(& -\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha - \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta \\ & + \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha + \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta + 2\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha \\ & + 2\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta + 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha \\ & - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha - \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta \\ & + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\left(e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\alpha + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\left(e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\beta + \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\left(e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\right)^2\alpha \\ & + \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\left(e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\right)^2\beta - \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha - \cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\, e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta \\ & - 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha - 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right) e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta \\ & + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2 e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\alpha + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2 e^{\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\, e^{-\pi\sqrt{\alpha-\beta}}\,\beta\Bigg) \end{aligned} \tag{5}$$

:

Jika $\alpha = 0$ diperoleh $\beta = \sqrt{\frac{12,5}{\pi}}$.