SIFAT TITIK TETAP PADA RUANG METRIK – G

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan guna

mencapai derajat sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh

Dika Ardian Susanto Putra

11610017

Kepada

Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

Yogyakarta

2015

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Dika Ardian Susanto Putra
NIM	: 11610017
Judul Skripsi	: Sifat Titik Tetap pada Ruang Metrik – G

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 16 April 2015
Pembimbing

Malahayati, M.Sc
NIP.19840412 201101 2 010

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1813/2015

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Sifat Titik Tetap pada Ruang Metrik- G

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Dika Ardian Susanto Putra
NIM : 11610017
Telah dimunaqasyahkan pada : 20 Mei 2015
Nilai Munaqasyah : A -
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Malahayati, M.Sc
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji I

Burhanudin Arif Nurnugroho, M.Sc

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Yogyakarta, 23 Juni 2015
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
YOGYAKARTA
UIN SUNAN KALIJAGA

Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si
NIP. 19550427 198403 2 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : Dika Ardian Susanto Putra

NIM : 11610017

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

menyatakan dengan sesungguhnya bahwa dalam skripsi saya ini **tidak terdapat karya serupa yang diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan disuatu perguruan tinggi lain** dan skripsi saya ini adalah asli karya saya sendiri dan bukan meniru hasil skripsi karya orang lain.

Yogyakarta, 28 April 2015

Yang menyatakan,

METERAI TEMPEL

TGL. 20

75F06ADF198413549

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Dika Ardian S.P

NIM. 11610017

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada

Bapak Trubus Susanto dan Ibunda Jumirah Tersayang

Serta Almamaterku Tercinta

Jurusan Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

Yogyakarta

"Barangsiapa bersungguh – sungguh, sesungguhnya kesungguhannya itu adalah untuk dirinya sendiri."(Q.S. Al – Ankabut: 6)

"Sesungguhnya, bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai dari suatu urusan tetaplah bekerja keras untuk urusan yang lain, dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap." (Q.S. Al – Insyirah:5 – 8)

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala rahmat dan hidayah-Nya, sehingga skripsi yang berjudul ***“Sifat Titik Tetap pada Ruang Metrik – G”*** dapat terselesaikan. Shalawat dan salam senantiasa dicurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang dengan kehadiran Beliau telah menjadi rahmat bagi sekalian alam.

Penulis menyadari skripsi ini tidak akan selesai tanpa motivasi, bantuan, bimbingan, dan arahan dari berbagai pihak baik moril maupun materiil. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan rasa terima kasih yang sedalam – dalamnya kepada :

1. Ibu Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Dr. M. Wakhid Musthofa, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Ibu Malahayati S.Si, M.Sc. selaku Pembimbing dan penasehat akademik yang telah meluangkan waktu untuk memotivasi serta membimbing sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Bapak dan Ibuku tercinta yang senantiasa memberikan doa, kasih sayang dan pengorbanan yang sangat besar.
5. Seluruh keluarga besarku yang menjadi motivasiku untuk sukses.

6. Dwi Murtiningsih yang telah memberikan semangat, menemani dan membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Keluarga baruku dijogja yang selalu memberikan keceriaan dan mendengarkan keluh kesahku setiap hari Dudung (Durahman) dan Fadhil terima kasih banyak.
8. Kepada teman – teman matematika 2011 yang selalu memberikan dukungan dan motivasi hingga terselesaikanya skripsi ini.
9. Kepada semua pihak yang tidak dapat saya sebutkan satu per satu, atas doa dan motivasinya yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Peneliti menyadari masih banyak kesalahan dan kekurangan dalam penulisan skripsi ini, untuk itu diharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun demi kesempurnaan penelitian ini. Namun demikian, peneliti tetap berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat dan dapat membantu memberi suatu informasi yang baru. *Aamiin Ya Robbal 'aalamiin*

Yogyakarta, 04 Mei 2015
Penulis

Dika Ardian Susanto Putra
NIM. 11610017

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$x \in A$	: x anggota himpunan A
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$\Rightarrow$	: Jika … maka …
$\rightarrow$	: Menuju
$<$	: Kurang dari
$>$	: Lebih dari
$\leq$	: Kurang dari sama dengan
$\geq$	: Lebih dari sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$A \subset B$	: Himpunan A bagian (*subset*) himpunan B
∞	: Tak terhingga
(X, d)	: Ruang metrik pada himpunan X dengan metric d
$\blacksquare$	: Akhir dari suatu pembuktian
$\mathbb{R}^+$	: Himpunan bilangan real *non*-negatif

ABSTRAK

Tahun 1960an Gähler mencoba menyatakan secara umum ide tentang metrik dan memperkenalkan konsep ruang metrik – 2. Tahun 1992 Dhage memperkenalkan konsep ruang metrik – D. Ruang metrik – ruang metrik tersebut tidaklah memiliki properti yang bagus sebagaimana yang dinyatakan oleh pencetusnya. Mustafa dan Sims memperkenalkan konsep ruang metrik – G untuk menutupi kekurangan dari ruang metrik – ruang metrik tersebut.

Ruang metrik – G merupakan ruang dengan fungsi jarak diantara pasangan elemen yang memenuhi lima kondisi dan merupakan generalisasi dari ruang metrik. Skripsi ini mengkaji tentang sifat titik tetap pada ruang metrik – G. Di dalam skripsi ini diberikan pula suatu contoh penggunaan sifat titik tetap berdasarkan sifat yang telah dibahas.

Kata Kunci : Titik tetap, Ruang metrik, Ruang metrik – G.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Berdasarkan perkembangan teknologi dalam era globalisasi saat ini, konsep – konsep matematika juga mengalami perkembangan. Hal ini, dikarenakan munculnya berbagai masalah dan fenomena baik dunia nyata maupun abstrak yang semakin komplek, sehingga dibutuhkan pengembangan konsep – konsep matematis untuk menangani masalah – masalah tersebut. Sebagai contoh adalah sifat titik tetap. Penggunaan sifat titik tetap diantaranya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier aljabar dan untuk menentukan solusi khusus persamaan differensial. Sifat titik tetap juga banyak digunakan dalam menentukan berbagai macam model persamaan matematika, baik dalam bidang ekonomi, maupun bidang kesehatan. Salah satu contoh penerapan titik tetap dalam bidang kesehatan adalah menentukan model persamaan nonlinear pada penyakit diabetes.

Pada abad ke – 19 seorang Matematikawan asal Prancis yang bernama H.Poincare (1854 – 1912) menemukan pendekatan titik tetap. Seiring perkembangannya, Spencer (1906 – 1980) berhasil membuktikan lemma kombinatorial pada penguraian segitiga yang sangat berguna dalam sifat titik tetap. Serta pada tahun 1922, sebuah karya yang terkenal dan dihargai dalam bidang teori titik tetap untuk fungsi kontraksi pada ruang metrik lengkap, berhasil dibuktikan oleh Banach.

Teori titik tetap telah banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap dari fungsi – fungsi dengan domain ruang metrik, ruang hasil kali dalam, ruang bernorm, ruang Hilbert, ruang Banach, serta perluasan pada masing – masing konsep ruang tersebut.

Salah satu konsep dasar penting yang menjadi pembahasan dalam analisis matematika adalah kajian tentang ruang metrik. Dikatakan penting karena ruang metrik sering digunakan dalam teori – teori analisis matematika yang lain. Metrik adalah jarak diantara pasangan elemen yang memenuhi sifat – sifat tertentu.

Tahun 60 – an Gahler mengklaim dan memperkenalkan konsep tentang ruang metrik – 2 (*2 – metric space*) yang merupakan generalisasi dari ruang metrik. Tahun 1992 Led Baphure Dhage memperkenalkan konsep tentang metrik – D ($D -$ *metric)* dan pasangan (X, D) disebut ruang metrik – D ($D -$ *metric space).* Tetapi pada tahun 2004 Zead Mustafa, dkk dalam jurnalnya yang berjudul "*Some Remarks Concerning D – Metric Spaces"* menunjukkan bahwa ruang metrik – D memiliki kelemahan. Hal ini yang menjadi pertimbangan Zead Mustafa, dkk untuk mencari gagasan yang lebih tepat untuk mengeneralisasi ruang metrik.

Selanjutnya pada tahun 2006 Zead Mustafa dan Brailey Sims dalam jurnalnya yang berjudul *"A New Approach to Generalized Metric Spaces"* memperkenalkan konsep tentang ruang metrik – G ($G -$ *metric space)* sebagai generalisasi dari ruang metrik. Tahun 2012 Binayak S, dkk melakukan penelitian tentang sifat titik tetap pada ruang metrik – G dalam jurnalnya yang berjudul *"Some Fixed Point Theorems in G – Metric Spaces"*.

Mengkaji dan membahas penelitian yang dilakukan oleh Binayak S, dkk dianggap perlu dan penting, karena hal tersebut merupakan penelitian yang baru. Pembahasan ruang metrik – G dan pembuktian sifat titik tetap dalam jurnal yang berjudul *"Some Fixed Point Theorems in G – Metric Spaces"* tersebut juga masih sangat singkat.

1.2. Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu penelitian sangatlah penting, guna menghindari kesimpangsiuran terhadap objek dari suatu penelitian dan untuk membantu penulis lebih fokus dan terarah sesuai dengan tema penelitian. Sesuai dengan latar belakang masalah maka skripsi ini akan difokuskan untuk membahas sifat titik tetap pada ruang metrik – G.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan, maka dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat – sifat yang berlaku pada ruang metrik – G?
2. Bagaimana sifat titik tetap pada ruang metrik – G?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji dan menjelaskan sifat – sifat yang berlaku pada ruang metrik – G.

2. Mengkaji dan menjelaskan langkah – langkah pembuktian sifat titik tetap pada ruang metrik – G.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang ruang metrik – G beserta sifat – sifat yang berlaku didalamnya.
2. Memberikan salah satu gambaran bahwa ternyata pengembangan analisis abstrak khususnya tentang teori titik tetap pada perluasan ruang metrik masih sangat luas.

1.6. Tinjauan Pustaka

Berawal dari jurnal yang ditulis oleh Zead Mustafa dan Brailey Sims pada tahun 2006 yang berjudul "*A New Approach to Generalized Metric Spaces*" yang menjelaskan tentang konsep awal dari ruang metrik – G. Zead Mustafa dan Brailey Sims juga melanjutkan penelitiannya untuk meneliti eksistensi titik tetap pada ruang metrik – G dalam jurnalnya yang berjudul *"Fixed Point Theorems for Kontraktive Mappings in Complete G – Metric Spaces"*.

Tahun 2012 Binayak, dkk melakukan penelitian lebih lanjut tentang sifat titik tetap pada ruang metrik – G dalam jurnal yang berjudul "*Some Fixed Point Theorems in G – Metric Spaces*". Jurnal tersebut menjelaskan tentang definisi ruang metrik – G, sifat – sifat yang berlaku pada ruang metrik – G, dan beberapa sifat titik tetap pada ruang metrik – G. Penulisan skripsi ini mengacu pada jurnal yang ditulis Binayak, dkk dan dijadikan sebagai literatur utama.

Referensi lain yang digunakan sebagai materi pendukung dalam mempelajari jurnal – jurnal tersebut antara lain: buku "*Introduction to Real Analysis*" edisi keempat pada tahun 2010 karya Bartle dan Sherbert. Buku tersebut membahas tentang dasar – dasar analisis real. Selanjutnya adalah buku "*Metric Spaces*" yang di tulis oleh Shirali dan Vasudeva pada tahun 2006. Buku tersebut membahas tentang ruang metrik beserta sifat – sifat yang berlaku didalamnya.

1.7. Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terdiri atas empat bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, serta metode penelitian.

BAB II DASAR TEORI

Bab ini membahas tentang teori – teori yang menjadi dasar dalam penulisan ini untuk dipahami agar mudah mengikuti pembahasan yang akan dibahas pada bab – bab selanjutnya, seperti: dasar – dasar analisis real, definisi ruang metrik dan sifat – sifat yang berlaku di dalamnya, serta teori titik tetap pada ruang metrik.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini membahas definisi ruang metrik – G, sifat – sifat yang berlaku pada ruang metrik – G, definisi konvergen – G, definisi Cauchy – G, definisi kontinu – G, dan sifat titik tetap pada ruang metrik – G.

BAB IV PENUTUP

Bab ini merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran – saran yang diambil berdasarkan materi – materi yang telah dibahas pada bab – bab sebelumnya.

1.8. Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan penulis dalam penulisan skripsi ini adalah penelitian studi literatur, yaitu penulis mempelajari beberapa sumber tertulis tentang ruang metrik – G beserta sifat – sifat yang berlaku didalamnya dan sifat titik tetap pada ruang metrik – G. Sifat penelitian dalam suatu studi literatur adalah kualitatif.

Penulis melakukan klarifikasi dan pembuktian sifat – sifat yang terdapat dalam buku acuan, dan jurnal. Penulis juga mencoba mengkontruksi beberapa contoh secara mandiri, maupun seperti dalam buku acuan atau jurnal dan mempelajari tentang pengertian ruang metrik beserta sifat – sifat yang berlaku didalamnya. Selanjutnya penulis mempelajari pengertian ruang metrik – G beserta sifat – sifat yang berlaku pada ruang metrik – G, yang meliputi: definisi barisan konvergen – G, barisan Cauchy – G, kontinu – G, dan ruang metrik – G lengkap.

Selajutnya pembahasan inti dari penelitian ini adalah membahas suatu sifat titik tetap pada ruang metrik – G. Pada bagian ini penulis menjelaskan langkah – langkah pembuktian yang dilakukan Binayak S, dkk (2012). Langkah pembuktian yang tidak dijelaskan dalam jurnal peneliti coba paparkan dengan menggunakan bantuan referensi lain. Diharapkan tidak ada kebingungan bagi pembaca dan di akhir pembuktian sifat titik tetap tersebut penulis berikan suatu contoh sebagai gambaran bagi pembaca.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Hasil pembahasan diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Sifat – sifat yang berlaku pada ruang metrik – G antara lain: Konvergen – G, Cauchy – G, Kontinu – G, *jointly continuous* pada ketiga variabelnya, simetrik, lengkap – G, *compatible*, dan Sifat 3.1.3.
2. Salah satu syarat cukup agar diperoleh ketunggalan titik tetap yang umum untuk fungsi – fungsi f dan g pada ruang metrik – G adalah fungsi – fungsi f dan g mempunyai titik tetap tunggal $z \in X$ pada ruang metrik – G lengkap (X, G) dengan $f, g : X \to X$ apabila dipenuhi:

   (1). $f(X) \subseteq g(X)$

   (2). f atau g merupakan fungsi kontinu

   (3). $G\big(f(x), f(y), f(z)\big) \leq \alpha G\big(f(x), g(y), g(z)\big)$
   $$+\beta G\big(g(x), f(y), g(z)\big) + \gamma G(g(x), g(y), f(z))$$

   $\forall x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ dengan $0 \leq \alpha + 3\beta + 3\gamma < 1$, sehingga f dan g mempunyai titik tetap umum yang tunggal di X serta f dan g merupakan fungsi *compatible*.

4.2. Saran

Dari beberapa kesimpulan diatas, perlu adanya penelitian lebih lanjut untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap yang umum, diantaranya:

1. Menyelidiki ketunggalan sifat titik tetap yang lain pada ruang metrik – G.
2. Menyelidiki ketunggalan sifat titik tetap umum menggunakan fungsi ekspansif pada ruang metrik – G.
3. Menyelidiki ketunggalan titik tetap umum menggunakan fungsi kontraktif pada ruang yang lain seperti ruang Quasi metrik, ruang Fuzzy metrik, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., and Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Dhage, BC., 1992. *Generalized metric space and mapping with fixed point.* Bull. Calcutta Math. Soc. 84.329 – 336

G. Jungck, 1986 *Compatible mappings and common fixed points*, Int. J. Math. Math. Sci. 9. 771 – 779.

Gä hler, S. 1966. *Zur geometric 2 – Metrische Rä ume*. Rev. Roum. Math. Pures Appl. XL, 664 – 669.

Gä hler, S. 1963. *2 – Metrische Rä ume und ihr topologische struktur*. Math. Nochr. 26. 115 – 148.

S. Binayak, dkk. 2012. *Some fixed point theorems in G – metric spaces*. Natural Sciences Publishing Cor.

Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces.* London: Springer – Verlag.

Z. Mustafa and B. Sims, 2004, *Some remarks concerning D-metric spaces*, Proceedings of International Conference on Fixed Point Theory and Application, pp. 189198, Yokohama, Japan.

Z. Mustafa and B. Sims, 2006, *A new approach to generalized metric spaces*, Journal of Nonlinear Analysis, 7, 289 – 297.

Z. Mustafa and B. Sims, 2009, *Fixed point theorems for contractive mappings in complete G-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., Article ID 917175, 10 pages.

Z. Mustafa and H. Obiedat, 2010, *A Fixed point theorems of Reich in G-metric spaces*, CUBO A Mathematical Journal.

Z. Mustafa, H. Obiedat and F. Awawdeh, 2008, *Some fixed point theorem for mapping on complete G-metric spaces*, Hindawi Publishing Corporation, Fixed Point Theory and Applications, Article ID 189870, 12 pages.

Z. Mustafa, 2012, *Some new common fixed point theorems under strict contractive conditions in G-metric spaces* , Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics, Article ID 248937, 21 pages.

Z. Mustafa, W. Shatanawi and M. Bataineh, 2009, *Existence of fixed point results in G-metric spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Article ID 283028, 10 pages.

LAMPIRAN

Sebelum membuktikan pertidaksamaan Minkowski akan diberikan terlebih dahulu sebuah lemma dan pertidaksamaan Holder. Lemmanya sebagai berikut:

Lemma 1.

$a, b \geq 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ *berlaku:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Pertidaksamaan Holder.

$p, q > 1\ , \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ *dan* $a_i, b_i \geq 0, \forall i = 1,2, \ldots, n$ *berlaku:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i . b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Bukti :

Misalkan $A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \forall i = 1,2, \ldots, n$ dengan menggunakan Lemma 1. diperoleh:

$$\frac{a_i}{A} . \frac{b_i}{B} \leq \frac{\left(\frac{a_i}{A}\right)^p}{p} + \frac{\left(\frac{b_i}{B}\right)^q}{q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} . \frac{b_i}{B} \ \leq \ \frac{1}{pA^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{qB^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} . \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q\left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)} \sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{q\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)} \sum_{i=1}^{n} b_i^q$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \cdot \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1$$

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^{n} a_i . b_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i . b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} . \blacksquare$$

Selanjutnya akan diberikan pertidaksamaan Minkowski beserta pembuktiannya.

Pertidaksamaan Minkowski.

$1 \leq p < \infty$, $a_i, b_i \geq 0, \forall i = 1,2,\ldots,n$ *berlaku:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bukti :

Untuk $p = 1$, jelas terbukti.

Untuk $1 < p < \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p-1} . (a_i + b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i (a_i + b_i)^{p-1}$$

Berdasarkan pertidaksamaan Holder diperoleh:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} ((a_i + b_i)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} ((a_i + b_i)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} ((a_i + b_i)^{p-1})^q\right)^{\frac{1}{q}} . \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} . \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

diperoleh:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \blacksquare$$