

SIFAT TITIK TETAP PADA JARAK-W

DI RUANG METRIK LENGKAP

Skripsi

Untuk memenuhi sebagai persyaratan

Mencapai derajat Sarjana S-1

Jurusan Matematika



LILIS TIANA

11610012

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2015

SIFAT TITIK TETAP PADA JARAK-W

DI RUANG METRIK LENGKAP

Skripsi

Untuk memenuhi sebagai persyaratan

Mencapai derajat Sarjana S-1

Jurusan Matematika



Diajukan Oleh:

LILIS TIANA

11610012

Kepada

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2015



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta .*

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Lilis Tiana

NIM : 11610012

Judul Skripsi : Sifat Titik Tetap pada Jarak - W di Ruang Metrik Lengkap

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 16 April 2015

Pembimbing

Malahayati, M.Sc

NIP.19840412 2011 0 2 010



Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1314/2015

Skrripsi/Tugas Akhir dengan judul : Sifat Titik Tetap pada Jarak -w di Ruang Metrik Lengkap

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Nama : Lilis Tiana

NIM : 11610012

Telah dimunaqasyahkan pada : 4 Mei 2015

Nilai Munaqasyah : A

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Malahayati, M.Sc
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji I

Burhanudin Arif Nurnugroho, M.Sc

Penguji II

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP.19800402 200501 1 003

Yogyakarta, 13 Mei 2015

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

Dekan



Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si
NIP.19550427 198403 2 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan dibawah ini saya:

Nama : Lilis Tiana

Nim : 11610012

Prodi/ Smt : Matematika/ VIII

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahawa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan disuatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali dalam naskah ini dan disebutkan daftar pustaka.

Yogyakarta, 20 April 2015

Yang menyatakan,



Lilis Tiana

NIM. 11610012

Karya sederhana ini saya persembahkan untuk
Bapak ibu terkasih dan tersayang
Kakak-kakak ku tersayang Mbak Tanti, Mbak Puji
Sahabat-Sahabat yang selalu mendukung
Teman-teman dan Prodi Matematika
Fakultas Sains dan teknologi, dan UIN Sunan Kalijaga

*"Dan Allah akan senantiasa menolong seorang hamba,
selama ia mau menolong saudaranya (H.R. Muslim)"*

*"Barangsiapa menempuh suatu jalan untuk menuntut ilmu,
niscaya Allah memudahkan baginya dengan (ilmu) itu jalan menuju surga
(H.R. Muslim) "*

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul, “*Sifat Titik Tetap pada Jarak- w di Ruang Metrik Lengkap*” ini. Sholawat beserta salam semoga senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang dengan kehadiran Beliau telah menjadi rahmat bagi sekalian alam.

Penulis menyadari bahwa proses penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, kerjasama, dan bimbingan dari bergai pihak. Oleh karena itu, penullis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Muchamad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku ketua Jurusan Matematika.
3. Ibu Malahayati, M.Sc., selaku pembimbing yang telah dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan dukungan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Semua dosen dan guru yang telah memberikan ilmu, arahan, dan dukungan kepada penulis selama ini.
5. Ibu dan Bapak tercinta yang tiada henti memberikan dukungan, doa dan kasih sayang kepada penulis.

6. Mbak Tanti, Mbak puji yang selalu memberi semangat dan dukungannya kepada penulis.
7. Teman-teman tercinta Dwi Murtiningsi, Rike Nur S, Rizdhita Dian A, Annisa Damasari, Zulfa Sayidah B yang telah memberikan semangat, dukungan dan doa kepada penulis.
8. Teman-teman Matematika 2011 yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, yang senantiasa menjadi teman belajar penulis selama menempuh pendidikan di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
9. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penuli mengharapkan kritik dan saran untuk menyempurnakan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak bagi yang membaca khususnya.

Yogyakarta, 20 April 2015

Lilis Tiana

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN.....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN.....	vi
HALAMAN MOTTO.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR LAMBANG.....	xii
ABSTRAK.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang Masalah.....	1
1.2. Batasan Masalah.....	4
1.3. Rumusan Masalah.....	4
1.4. Tujuan Penelitian.....	4
1.5. Manfaat Penelitian.....	4
1.6. Tinjauan Pustaka.....	5
1.7. Sistematika Penulisan.....	6
1.8. Metode Penelitian.....	7

BAB II LANDASAN TEORI.....	9
2.1. Dasar-Dasar Analisis Real.....	9
2.2. Ruang Metrik.....	23
2.3. Fungsi Semikontinu.....	36
2.4. Kontinuitas fungsi.....	38
2.5. Teori Titik Tetap.....	39
BAB III SIFAT TITIK TETAP PADA JARAK –w DI RUANG METRIK LENGKAP.....	42
3.1. Pengertian jarak- w	42
3.2. Sifat Titik Tetap Pada Jarak- w di Ruang Metrik Lengkap.....	52
BAB IV PENUTUP.....	60
4.1. Kesimpulan.....	60
4.2. Saran.....	60
DAFTAR PUSTAKA.....	62

DAFTAR LAMBANG

\mathbb{N}	: Himpunan bilangan asli
\mathbb{R}	: Himpunan bilangan real
$x \in A$: x anggota himpunan A
\Leftrightarrow	: Jika dan hanya jika
\rightarrow	: menuju
$<$: Kurang dari
$>$: Lebih dari
\leq	: Kurang dari sama dengan
\geq	: Lebih dari sama dengan
\neq	: Tidak sama dengan
$A \subset B$: Himpunan A subset himpunan B
(X, d)	: Ruang metrik pada himpunan X dengan metrik d
(a, b)	: Himpunan terbuka a sampai b
$[a, b]$: Himpunan tertutup a sampai b
∞	: Tak terhingga
■	: Akhir dari suatu pembuktian
$\liminf_n x_n$: Limit inferior barisan $\{x_n\}$
$S^{(n)}(x)$: Barisan Fungsi pada S
$\psi^n(x)$: Komposisi fungsi ψ

ABSTRAK

Jarak- w merupakan suatu fungsi yang terdefinisi pada ruang metrik, dengan tiga syarat yang harus terpenuhi yaitu sifat simetri, fungsi *lower semicontinuous* (LSC) dan yang terakhir adalah hubungan dari jarak- w dengan metrik d itu sendiri.

Skripsi ini mengkaji tentang sifat titik tetap pada jarak- w diruang metrik lengkap. Di dalam skripsi ini diberikan pula suatu contoh penggunaan sifat titik tetap berdasarkan sifat yang telah dibahas.

Kata kunci: ruang metrik lengkap, jarak- w , titik tetap.

ABSTRACT

w -distance is a function defined on a metric space, with three conditions that must be satisfied such as the nature of the symmetry, the lower semicontinuous function and the relationship of the w -distance with metric d itself.

The aim of this study is to recite the fixed point theorems for a w -distance on complete metric space. This paper also gives an example of the use of fixed point properties based on the discussed properties.

Key word: complete metric space, fixed point, w -distance.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Titik tetap mempunyai peranan yang penting dalam analisis fungsional. Banyak masalah matematis yang dapat dipecahkan dengan menggunakan prinsip titik tetap. Beberapa diantaranya adalah masalah persamaan linear, persamaan diferensial biasa, persamaan integral, dan persamaan diferensial parsial. Eksistensi titik tetap (*fixed point*) untuk suatu fungsi telah banyak dikaji oleh para ahli sebagai salah satu metode menyelesaikan problem matematika.

Pada kehidupan sehari-hari teorema titik tetap banyak digunakan dalam menentukan berbagai macam model persamaan matematika, baik dalam bidang ekonomi, maupun bidang kesehatan. Salah satu contoh penerapan teorema titik tetap dalam bidang kesehatan adalah menentukan model persamaan non linear pada penyakit diabetes (Ekawati:2011).

Pada abad XIX seorang matematikawan asal Perancis yang bernama H. Poincare (1854-1912) menemukan pendekatan titik tetap. Pada perkembangannya, L.E.Y. Brouwer (1881-1966) seorang matematikawan asal Belanda berhasil membuktikan titik tetap untuk pemetaan dengan domain dan kodomain berupa interval, persegi, bola, dan titik tetap dalam dimensi-n. Pada masa berikutnya Spencer (1906-1980) berhasil membuktikan lemma

kombinatorial penguraian segitiga yang sangat berguna dalam teorema titik tetap. Teorema ini telah banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap dari pemetaan-pemetaan dengan domain ruang metrik, ruang hasil kali dalam, ruang bernorm, ruang Hilbert, dan ruang Banach serta perluasan pada masing-masing konsep tersebut. (Suwarno, 2011)

Salah satu konsep dasar penting yang menjadi pembahasan dalam analisis matematika adalah kajian tentang metrik. Metrik adalah jarak diantara pasangan elemen yang memenuhi sifat-sifat tertentu, selanjutnya himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu disebut ruang metrik. Ruang metrik sering digunakan dalam teori-teori analisis matematika yang lain dan dipakai juga dalam ilmu fisika lanjut salah satunya yaitu kajian tertulis tentang medan gravitasi Einstein dengan transformasi metrik Scwarzchild.

Pada tahun 1996 Wataru Takahashi memperluas konsep ruang metrik dalam jurnal yang berjudul "*Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric space*" yaitu dengan mendefinisikan fungsi yang terdefinisi pada suatu ruang metrik dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu sehingga dapat diterapkan pada sifat titik tetap. Selanjutnya konsep tersebut dikenal dengan *w-distance* (jarak-*w*).

Jarak-*w* merupakan suatu fungsi yang terdefinisi pada ruang metrik, dengan tiga syarat yang harus terpenuhi yaitu sifat simetri, fungsi *lower*

semicontinuous (LSC) dan yang terakhir adalah hubungan dari jarak- w dengan metrik itu sendiri.

Kemudian pada tahun 2001 Branciari pada jurnalnya yang berjudul “A *Fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type*” mengembangkan lagi konsep jarak- w yaitu di ruang metrik lengkap tetapi pada tipe integral. Beliau menganalisis eksistensi titik tetap pada jarak- w di ruang metrik tipe integral, pada pembahasannya ia menggunakan integral Lebesgue.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan W. Takahashi dan Branciari, Razani dkk pada tahun 2009 membahas jarak- w pada ruang metrik lengkap dengan menganalisis ketunggalan titik tetapnya.¹

Jurnal tersebut merupakan jurnal yang menarik untuk dipelajari dan dibahas hanya saja ada beberapa bagian yang belum terdapat pembuktiannya yaitu belum ada pembuktian tentang sifat yang berlaku pada jarak- w salah satunya tentang barisan *Cauchy*, sehingga penulis berusaha untuk menjelaskan dan membuktikan sifat tersebut. Selain itu terdapat bagian-bagian yang belum dijelaskan diantaranya pada pembuktian sifat titik tetapnya sehingga penulis berusaha menjabarkan sendiri

¹ Razani dkk. *A fixed point theorem for jarak-w*. vol.11(Applied sciens, 2009).pp.114-117.

1.2. Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu penelitian sangatlah penting, guna menghindari pembahasan objek yang terlalu meluas dan kesimpangsiuran objek kajian, sehingga lebih membantu penulis untuk lebih fokus dan terarah sesuai dengan tema penelitian. Penulisan skripsi ini dibatasi pada jarak- w diruang metrik lengkap, dan tidak membahas jarak- w diruang yang lain.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah diatas, maka dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat yang berlaku pada jarak- w ?
2. Bagaimana pembuktian sifat titik tetap pada jarak- w di ruang metrik lengkap ?

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji dan menjelaskan sifat-sifat yang berlaku pada jarak- w di ruang metrik.
2. Mengkaji dan menjelaskan langkah-langkah pembuktian sifat titik tetap pada jarak- w di ruang metrik lengkap.

1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang sifat-sifat yang berlaku pada jarak- w di ruang metrik.
2. Memberikan salah satu gambaran bahwa pengembangan analisis abstrak khususnya tentang teori titik tetap tidak hanya pada ruang metrik biasa tetapi dapat diperluas lagi, contohnya jarak- w yang akan dibahas oleh penulis.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini berawal dari jurnal yang ditulis oleh W. Takahashi pada tahun 1996 dengan judul "*Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric space*" yang berisi tentang titik tetap pada jarak- w di ruang metrik. Kemudian pada tahun 2001 Branciari meneliti tentang eksistensi titik tetap pada ruang metrik lengkap tetapi pada tipe integral. Berangkat dari dua penelitian tersebut Razani dkk. pada tahun 2009 dalam jurnalnya yang berjudul "*A fixed point theorem for w -distance*" beliau menggabungkan kedua penelitian tersebut dengan mengambil definisi dan sifat jarak- w dari jurnal Wataru Takahashi dengan mengkombinasikan titik tetap dari jurnal Branciari. Sehingga didapatkan hasil yaitu sifat titik tetap pada jarak- w di ruang metrik lengkap. Kemudian digunakan penulis sebagai acuan utama dalam penulisan skripsi.

Referensi lain yang digunakan sebagai materi pendukung dalam mempelajari jurnal – jurnal tersebut antara lain : buku “*introduction to Real Analysis*” edisi keempat pada tahun 2010 karya Bartle dan Sherbert. Buku tersebut membahas tentang dasar-dasar analisis real. Selanjutnya adalah buku yang ditulis oleh Shirali dan Vasudeva pada tahun 2006 dengan judul “*metric spaces*”. Buku tersebut membahas tentang ruang metrik beserta sifat-sifat yang berlaku didalamnya. Selanjutnya untuk memahami teori titik tetap, penulis menggunakan buku yang ditulis oleh Khamsi dan Kirk pada tahun 2001 dengan judul “*An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*”.

1.7. Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terdiri atas empat bab dengan sistematika sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas mengenai latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, serta metode penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini membahas tentang landasan teori yang mendasari dasar dalam penulisan ini untuk dipahami agar mudah mengikuti pembahasan yang akan dibicarakan pada bab-bab selanjutnya, seperti : dasar-dasar analisis real,

definisi ruang metrik dan sifat-sifatnya yang berlaku dildalamnya, serta teori titik tetap pada ruang metrik.

BAB III SIFAT TITIK TETAP PADA JARAK-W DI RUANG METRIK LENGKAP

Pada bab ini akan dijelaskan secara rinci tentang sifat titik tetap untuk jarak- w pada ruang metrik lengkap. langkah-langkah pembuktiannya, dan diakhiri dengan memberikan contoh.

BAB IV PENUTUP

Bab ini merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran-saran yang diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

1.8. Metode Penelitian

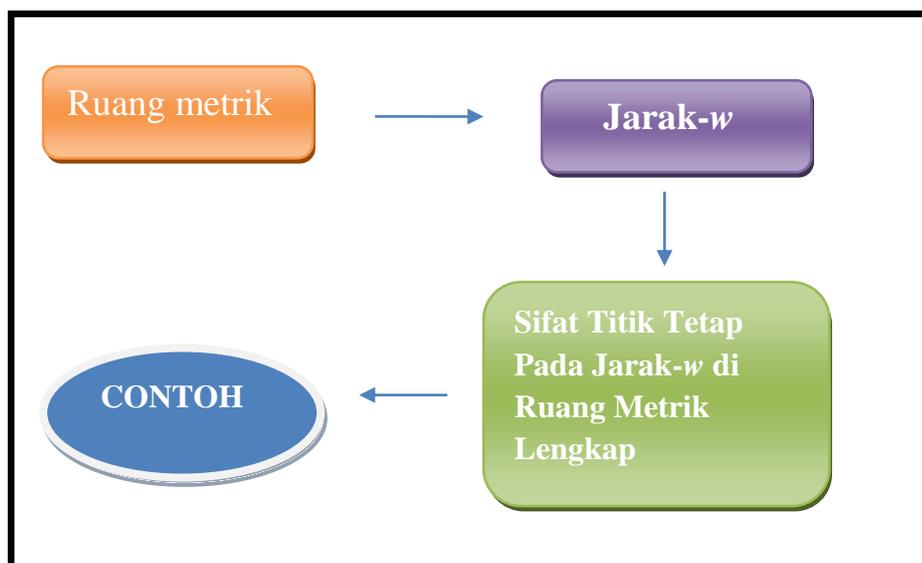
Penelitian yang dilakukan penulis dalam penulisan skripsi ini adalah penelitian studi literatur, yaitu penulis mempelajari sumber tertulis tentang jarak- w pada ruang metrik beserta sifat yang berlaku didalamnya, dan teorema titik tetap untuk jarak- w pada ruang metrik. Sifat penelitian dalam studi literatur adalah kualitatif.

Penulis melakukan klarifikasi dan pembuktian teorema-teorema yang terdapat dalam buku acuan, dan jurnal. Penulis juga mencoba mengkontruksi beberapa contoh secara mandiri, maupun seperti dalam buku acuan atau jurnal.

Sebelum mempelajari jarak- w penulis menjelaskan terlebih dahulu tentang definisi ruang metrik serta sifat yang berlaku di dalamnya. Selanjutnya penulis menjelaskan pengertian dan sifat-sifat jarak- w yang meliputi kekonvergenan dan definisi barisan Cauchy. Penulis menyertakan sebuah contoh untuk memudahkan dalam memahami definisi jarak- w .

Pembahasan inti dari penelitian ini adalah membahas teorema titik tetap pada jarak- w di ruang metrik. Penulis menjelaskan langkah-langkah pembuktian yang dilakukan oleh Razani dkk (2009). Langkah pembuktian yang tidak dijelaskan dalam jurnal penulis coba paparkan dengan menggunakan bantuan referensi lain. Sehingga diharapkan tidak ada kebingungan bagi pembaca. Pembuktian sifat titik tetap tersebut diakhiri dengan memberikan contoh sebagai ilustrasi bagi pembaca.

Agar lebih jelas dalam memahami metode penelitian dalam skripsi ini, berikut ini diberikan gambaran diagram alur penelitian sebagai berikut.



Gambar 1.1. Diagram Alur penelitian

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa jarak- w merupakan suatu fungsi yang terdefinisi pada ruang metrik, dengan tiga syarat yang harus terpenuhi yaitu sifat simetri, fungsi *lower semicontinuous* (LSC) dan yang terakhir adalah hubungan dari jarak- w dengan metrik d itu sendiri.

Pemetaan f yang memenuhi kondisi (3.5), serta terdefinisi pada jarak- w di ruang metrik lengkap (X, d) mempunyai titik tetap yang tunggal. Pembuktian sifat ketunggalan tersebut memanfaatkan sifat fungsi kontraksi serta sifat kelengkapan pada ruang metrik.

4.2. Saran

Setelah menyelesaikan penelitian ini, penulis menyarankan:

1. Penelitian ini hanya sebatas membahas konsep dasar jarak- w di ruang metrik lengkap dan sifat titik tetap yang berlaku di dalamnya. Pembuktian sifat titik tetap pada jarak- w di ruang metrik lengkap ini dapat di kembangkan lagi agar dapat diaplikasikan pada sifat titik tetap pada fungsi yang lebih umum, misalnya sifat titik tetap pada perumuman jarak- w .

2. Contoh-contoh pada jarak- w di ruang metrik lengkap ini dirasa masih sangat minim sehingga perlu adanya penelitian yang membahas dan mengembangkannya agar diperoleh contoh-contoh yang lain.

Semoga tugas akhir ini dapat menjadi inspirasi bagi pembaca untuk mengembangkan lebih lanjut tentang sifat titik tetap khususnya, dan konsep analisis abstrak pada umumnya.

DAFTAR PUSTAKA

- A. Branchiari. *A fixed point theorem for mapping satisfying a general contractive condition of integral type*, *Internasional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences* **10** (2002). 531-536.
- A. Latif and W. A. Albar. *Fixed points result in complete metric space*. *Demonstratio Mathematica*, XLI (2008). 145-150.
- Agarwal, Ravi P., Donald D Reagen dan D.R. Sahu. 2009. *Fixed Point Theory for Lipschitzian Type Mappings with Applications*. USA. Springer.
- Bahtiar, A. Rifqi. 2012. *Konsep Dasar Ruang Metrik Cone. Skripsi*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
- Bartle, R.G., and Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Khamsi, Mohammad A., and Krik, William A. 2001. *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- O. Kada. T. Suzuki and W. Takashashi. *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*. *Math. Japonico* **44** (1996), 381-591.

- P. Vijayaraju, B.E. Rhoades and R. Mohanraj. *A fixed point theorems for pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type*, Internasional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **15** (2005). 2359-2364.
- Purcell, Edwin J dan Varberg, Dale. 2007. Kalkulus. Jakarta: Erlangga.
- Shirali, Staish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces*. London: Springer-Verlag.
- Siddiqi, Abul Hasan. 2004. *Applied Functional Analysis: Numerical Methods, Wavelet Method, and Image Processing*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- T. Suzuki. *meir-Keeiler contractions of integral type are still Meir-Keeiler contractions*. Internasional Journal of Mathematics and Mathematical Sciences Article ID 39281 (2007). 1-6.
- T. Suzuki and W. Takahashi, *Fixed Point theorems and characterizations of Metric Completeness*. Topol. Methods Nonlinear Anal., 8 (1996), 371-382
- T. Suzuki. *Several fixed point theorems in complete metric space*. Yokohama Math. J., 44 (1997), 61-72.
- Tuwankotta, Johan Matheus. 2012. Analisis Real A: Teori Ukuran dan Integral. Bandung: ITB.