TEOREMA TITIK TETAP DI RUANG METRIK CONE PADA JARAK-W

Skripsi

Untuk memenuhi sebagai persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

program Studi Matematika

SYAUQI TAUFIQUR RAHMAN

11610048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2015

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Pemberitahuan
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Syauqi Taufiqur Rahman
NIM	: 11610048
Judul Skripsi	: Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik Cone pada Jarak-w

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 16 April 2015
Pembimbing

Malahayati, M.Sc
NIP. 19840412 201 102 2 010

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1803/2015

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik Cone pada Jarak-w

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Syauqi Taufiqur Rahman
NIM : 11610048
Telah dimunaqasyahkan pada : 22 Mei 2015
Nilai Munaqasyah : A
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Malahayati, M.Sc
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji I

Burhanudin Arif Nurnugroho, M.Sc

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Yogyakarta, 23 Juni 2015
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si
NIP. 19550427 198403 2 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Syauqi Taufiqur Rahman

NIM : 11610048

Prodi / Smt : Matematika / VIII

Fakultas : Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya serupa yang diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi lain dan sepanjang sepengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah diterbitkan orang lain, kecuali secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 24 April 2015

Yang menyatakan

Syauqi Taufiqur Rahman

NIM. 11420107

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini saya persembahkan

untuk bapak, Ibu serta adekku tercinta.

Dan juga teman-teman satu angkatan Prodi Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

MOTTO

"Allah itu Satu, tiada tuhan selain Allah"

"Berusaha memberi sebanyak-banyaknya kepada orang lain"

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum wr.wb

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul, "*Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik Cone pada Jarak-w" ini.* Sholawat dan salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang dengan kehadiran Beliau telah menjadi Rahmat bagi seluruh alam.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar - besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Yogyakarta.
2. Dr. Muhammad Wakhid Mustofa, S.Si, M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Ibu Malahayati, M.Sc., selaku pembimbing pertama yang telah dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan dukungan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Semua Dosen dan Guru yang telah memberikan ilmu, arahan, dan dukungan kepada penulis selama ini.
5. Ibu dan Bapak yang telah memberikan seluruh kasih sayang, do'a dan dukungan kepada penulis.

6. Adikku tersayang Muhammad Ali Akhyari, yang selalu menginspirasi dan menjadi motivator dalam penulisan skripsi ini, serta saudara-saudara kerabat di Rembang yang sudah mendukung penulis.
7. Guru-guru Agama dan Moralku Bapak Syarif dan K.H Basyir terima kasih atas inspirasi, pesan-pesan moral dan spiritual dalam mengiringi langkah hidup penulis.
8. Teman-teman PAL, Sulis, Fuad, Aldi, Lukman, Wakhid, Taufan, Juni, Ridwan, Bang Dayat, Fuji, Dwi, Dina dan Mita. Terima kasih semuanya atas momen-momen yang sangat indah bersama kalian hingga penulis bisa seperti saat ini.
9. Teman-teman matematika dan pendidikan matematika angkatan 2011 serta teman-teman PROLIN. Terima kasih yang setulus-tulusnya selama ini atas semangat, dorongan, nasihat dan dukungannya.
10. Semua pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran untuk menyempurnakan skripsi ini. Semoga karya yang sederhana ini bisa menjadi manfaat dan berkah bagi kita semua. *Amiin*

Wassalamualaikum wr wb

Yogyakarta, 13 Maret 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan real
$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$\vert . \vert$	: Mutlak
$\vert\vert . \vert\vert$	: Norma
$\emptyset$	: Himpunan kosong
P	: Cone
$p: X \text{ x } X \longrightarrow E$	: Jarak-w
■	: Akhir dari suatu pembuktian
E	: Ruang Banach real
$x \in A$	: *x* anggota himpunan A
$\preccurlyeq, \prec, \ll$	: Notasi urutan pada cone
$IntP$	: Himpunan semua titik dalam pada himpunan P
$\Longleftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
$A \subset B$	: Himpunan A bagian *(subset)* himpunan B

$\rightarrow$	: Menuju
∞	: Tak hingga
$\mathcal{L}$	: Ruang Linier
$C[0,1]$	: Koleksi fungsi kontinu pada interval [0,1]

ABSTRAK

Teorema titik tetap di ruang metrik pada jarak-w pertama kali diperkenalkan oleh Wataru Takahashi. Selanjutnya tahun 2007 Huang Long Guang dan Zhang Xian memperkenalkan ruang metrik cone yang merupakan perluasan dari ruang metrik dengan mengganti himpunan bilangan riil dengan ruang Banach terurut.

. Skripsi ini memperkenalkan tentang konsep ruang metrik cone pada jarak-w dan membuktikan teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w. Selain itu dibuktikan juga bahwa pemetaan kontraktif di ruang metrik cone lengkap pada jarak-w mempunyai titik tetap tunggal.

Kata kunci: ruang metrik cone, jarak-w, pemetaan kontraktif, titik tetap.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seiring berkembangnya zaman, banyak sekali topik matematika khususnya dalam bidang analisis fungsional yang mengalami perluasan. Misalnya pada konsep ruang metrik sudah banyak dikembangkan seperti ruang metrik quasi, ruang metrik cone dan lain sebagainya.

Teorema titik tetap atau teorema pemetaan kontraktif merupakan hal yang penting dalam ruang metrik. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan pada ruang metrik itu ada dan tunggal, serta metode konstruktif untuk menemukan titik – titik tetap lainnya. Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Stefan Banach pada tahun 1920.

Tahun 1996 Osama Kada, Tomonari Suzuki, dan Wataru Takahashi memperkenalkan konsep ruang metrik dengan jarak-w. Pada tahun 2007 Huang Long-Guang dan Zhang Xian memperkenalkan konsep ruang metrik cone yang merupakan perluasan dari ruang metrik, dengan meneliti teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif. Huang dan Zhang memanfaatkan kelengkapan ruang metrik cone untuk menemukan berbagai teorema titik tetap baru. Selanjutnya pada tahun 2009 dalam paper yang berjudul *"Some Fixed Point Theorems in Cone Metrik Spaces with w-Distance"*, Lakzian dan Arabyani memperkenalkan beberapa konsep teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w.

Pada skripsi ini, penulis tertarik untuk mendalami beberapa teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w. Penelitian ini menjabarkan dari paper Lakzian dan Arabyani. Diharapkan dari penelitian ini dapat memberikan gambaran mengenai beberapa teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w.

1.2 Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu penelitian sangatlah penting untuk membantu penulis lebih fokus dan terarah sesuai dengan tema penelitian Skripsi difokuskan untuk membahas pembuktian teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w dan contohnya, definisi ruang metrik cone, definisi jarak-w dan beberapa teorema yang mendukung beserta beberapa contohnya.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah di atas, maka dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat - sifat jarak-w di ruang metrik cone?
2. Bagaimana teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w?

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji sifat – sifat jarak-w pada ruang metrik cone.
2. Mengkaji beberapa teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan agar memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang sifat – sifat jarak-w.
2. Memberikan pengetahuan tentang beberapa teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w.
3. Memberikan motifasi kepada pembaca supaya terus berkarya dalam matematika.

1.6 Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini mengacu pada sebuah paper yang dipublikasikan pada tahun 2009 yang berjudul *"Some Fixed Point Theorems in Cone Metrik Spaces with w-Distance"*, yang ditulis oleh H. Lakzian dan F. Arabyani. Mereka memperkenalkan konsep ruang metrik cone dengan jarak-w dan beberapa teorema titik tetap pada ruang metrik cone tersebut.

Penulisan skripsi ini juga mengacu pada skripsi yang ditulis Rifki Bahtiar (2012) yang berjudul "Konsep Dasar Ruang Metrik cone". Skripsi tersebut mengkaji dasar – dasar ruang metrik cone dan aplikasinya pada teorema titik tetap.

Selanjutnya dalam skripsi ini akan dijabarkan pembahasan beberapa teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w yang sudah tertera pada paper tersebut. Serta menjelaskan tentang ruang metrik cone beserta contohnya dan menjelaskan beberapa lemma yang ada pada paper tersebut.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini dibagi menjadi empat bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas mengenai latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini membahas tentang ruang metrik, ruang bernorma, ruang metrik cone dan satu teorema titik tetap pada ruang metrik cone beserta contohnya.BAB III PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai jarak-w dan teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w.

BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran – saran dari pokok bab - bab sebelumnya.

1.8 MetodePenelitian

Metode penelitian yang penulis gunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan membahas dan menjabarkan konsep – konsep yang sudah ada didalam literatur. Selain itu penulis juga menggunakan beberapa paper dan buku yang berhubungan dengan ruang metrik cone dan teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w.

Langkah selanjutnya adalah penulis menggunakan beberapa paper dan buku tersebut untuk membuktikan teorema – teorema yang ada dalam literatur dan menjelaskan beberapa contoh yang ada dalam literatur.

Dasar teori pada penelitian ini diawali dengan membahas ruang metrik yang beserta sifat yang berlaku di dalamnya, ruang Banach, dan diberikan pengertian tentang ruang metrik cone beserta sifat yang berlaku didalamnya. Dasar teori tentang ruang metrik cone ini yang akan digunakan untuk membahas titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w. sehingga subbab ini penting untuk diperdalam agar lebih mudah mempelajari jarak-w.

Selanjutnya penulis menjelaskan pengertian dan sifat-sifat jarak-w yang nantinya digunakan untuk membahas teorema titik tetap di ruang metrik cone. Pembahasan inti dari penelitian ini adalah membahas dua teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w. di akhir pembahasan dua teorema titik tetap tesebut penulis berikan satu contoh sebagai gambaran dari pembaca.

$$= f(y) + p(x,y) + p(y,z) - p(x,z)$$

Karena $f(y) \epsilon P$ diperoleh dan berdasarkan definisi 3.1.1 (b) diperoleh

$$p(x,y) + p(y,z) - p(x,z) \epsilon P$$

Oleh karena itu berdasarkan definisi 2.3.1 (ii) diperoleh

$$f(y) + p(x,y) + p(y,z) - p(x,z) \epsilon P$$

Jadi terbukti $q(x,z) \preccurlyeq q(x,y) + q(y,z)$

c. Ambil sebarang $x \epsilon X(fix), y_n \to y$. Akan dibuktikan $q(x,.) \to E$ adalah semikontinu bawah di setiap $x \epsilon X$ yaitu

$$q(x,y) \preccurlyeq \lim_{n\to\infty} inf p(x,y_n).$$

Artinya $\lim_{n\to\infty} inf q(x,y_n) - q(x,y) \epsilon P$

karena p adalah jarak-w maka

$$\lim_{n\to\infty} inf q(x,y_n) - q(x,y) = \lim_{n\to\infty} inf(f(x) + p(x,y_n)) - f(x) - p(x,y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} inf\, f(x) + \lim_{n\to\infty} inf p(x,y_n) - f(x) - p(x,y)$$

$$= f(x) + \lim_{n\to\infty} inf p(x,y_n) - f(x) - p(x,y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} inf p(x,y_n) - p(x,y)$$

Jelas bahwa $\lim_{n\to\infty} inf p(x,y_n) - p(x,y) \ \epsilon P$. sehingga

$$\lim_{n\to\infty} inf q(x,y_n) - q(x,y) \epsilon P$$

Jadi terbukti $q(x,.) \to E$ adalah semikontinu bawah di setiap $x \epsilon X$

d. Ambil sebarang $\varepsilon \epsilon E$ dengan $0 \ll \varepsilon$ dan $x, y, z \epsilon X$.

Akan dibuktikan $d(x,y) \ll \varepsilon$

Karena p jarak-w maka ada $0 \ll \varepsilon$ sehingga $q(z,x) \ll \delta$ dan $q(z,y) \ll \delta$.

Karena $0 \preccurlyeq f(z)$ sehingga $f(z) - 0 \in P$ hal ini berarti

$$f(z) + p(z,x) - p(z,x) \in P$$

Didapat $p(z,x) \preccurlyeq f(z) + p(z,x) = q(z,x) \ll \delta$ dengan kata lain

$$p(z,x) \ll \delta$$

Dengan cara yang sama diperoleh $f(z) + p(z,y) - p(z,y) \in P$

Didapat $p(z,y) \preccurlyeq f(z) + p(z,y) = q(z,y) \ll \delta$ dengan kata lain

$$p(z,y) \ll \delta$$

karena $p(z,x) \ll \delta$ dan $p(z,y) \ll \delta$ maka diperoleh $d(x,y) \ll \varepsilon$

Jadi terbukti bahwa $d(x,y) \ll \varepsilon$.

karena memenuhi ke empat sifat maka terbukti *q(x,y)* jarak-w ■

dibawah ini diberikan contoh jarak-w.

Contoh 3.1.3 (Sushanta, dkk. 2012: 4)

Diberikan $E = \mathbb{R}^2, P = \{(x,y) \in E : x,y \geq 0\}, X = \mathbb{R}$ dan $d: X \times X \to E$.

didefinisikan $d(x,y) = (|x-y|, a|x-y|)$ dimana konstanta $a \geq 0$. Maka *(X,d)* adalah ruang metrik cone. Pemetaan $d: X \times X \to E$ untuk setiap $x, y \in X$. maka d merupakan jarak-w pada *X*.

Penjelasan: Berdasarkan contoh 2.3.8 terbukti bahwa *(X,d)* adalah ruang metrik cone dan P adalah normal cone. Selanjutnya akan dibuktikan *d* merupakan jarak-w pada X. Ambil sebarang $x, y, z \epsilon X$

1. Akan dibuktikan 0 $\preccurlyeq d(x,y)$, yaitu $(|x-y|, a|x-y|) - 0 \epsilon P$

   Sesuai contoh 2.3.7 karena 0 $\preccurlyeq (|x-y|, a|x-y|)$ berarti

   $(|x-y|, a|x-y|) - 0 \epsilon P$ jadi terbukti 0 $\preccurlyeq d(x,y)$.

2. Akan dibuktikan $d(x,z) \preccurlyeq d(x,y) + d(y,z)$.

   Sesuai pembuktian contoh 2.3.7 (iii) terbukti bahwa:

$$d(x,z) \preccurlyeq d(x,y) + d(y,z)$$

3. Ambil sebarang $x \epsilon X(fix), y_n \to y$. Akan dibuktikan $p(x,.) \to E$ adalah semikontinu bawah di setiap $x \epsilon X$ yaitu

$$d(x,y) \preccurlyeq \lim_{n\to\infty} inf d(x,y_n).$$

   Disini akan dibuktikan $\lim_{n\to\infty} inf d(x,y_n) - d(x,y) \epsilon P$

$$\lim_{n\to\infty} inf d(x,y_n) - d(x,y) = \lim_{n\to\infty} inf (|x-y_n|, a|x-y_n|)$$
$$-(|x-y|, a|x-y|)$$

$$= (\lim_{n\to\infty} inf |x-y_n|, \lim_{n\to\infty} inf \text{ a}|x-y_n|)$$
$$-(|x-y|, a|x-y|)$$
$$= (\lim_{n\to\infty} inf \ |x-y_n| - |x-y|, \lim_{n\to\infty} in\ f\ a|x-y_n| - a|x-y|)$$

$$= (\left|x - \lim_{n\to\infty} inf y_n\right| - |x-y|, a\left(\left|x - \lim_{n\to\infty} inf y_n\right| - |x-y|\right))$$

$$= (|x - y| - |x - y|, a(|x - y| - |x - y|))$$

$$= (0,0)$$

Karena $(0,0) \epsilon P$ jelas bahwa $\lim_{n\to\infty} inf d(x, y_n) - d(x, y) \ \epsilon P$

Sehingga $\lim_{n\to\infty} inf d(x, y_n) - d(x, y) \epsilon P$

Jadi terbukti $p(x, .) \to E$ adalah semikontinu bawah di setiap $x \epsilon X$.

4. Ambil sebarang $\varepsilon \epsilon E$ dengan $0 \ll \varepsilon$ dan $x, y, z \epsilon X$.

   Akan dibuktikan $d(x, y) \ll \varepsilon$

   dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ berarti jika $d(z, x) \ll \delta$ dan $d(z, y) \ll \delta$ diperoleh

$$d(x, y) \preccurlyeq d(x, z) + d(z, y)$$

$$= d(z, x) + d(z, y)$$

$$\ll \delta + \delta$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   terbukti bahwa $d(x, y) \ll \varepsilon$

karena memenuhi ke empat sifat maka terbukti $d(x, y)$ jarak-w ■

Definisi berikut ini menjelaskan tentang barisan yang berlaku pada ruang metrik cone dengan jarak-w *y*ang berguna untuk menjelaskan teorema – teorema pada subbab selanjutnya.

Definisi 3.1.4 (Lakzian, dkk. 2009: 1083) *Diberikan ruang metrik cone (X,d) dan p merupakan* jarak-w *di X,* $x \in X$ dan $\{x_n\}$ *adalah barisan di X, maka*

a) $\{x_n\}$ *disebut p-barisan Cauchy jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon \in E$, $0 \ll \varepsilon$, *terdapat bilangan asli* $\mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap m,n* $\geq \mathbb{N}$ *berlaku* $p(x_m, x_n) \ll \varepsilon$.

b) *Barisan* $\{x_n\}$ *konvergen ke* x, $x \in X$, *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon \in E, 0 \ll \varepsilon$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq n_0$ *berlaku* $p(x, x_n) \ll \varepsilon$. *Notasinya* $\lim_{n\to\infty} x_n = x\ atau\ x_n \to x$.

c) *(X,d) disebut ruang metrik cone lengkap dengan* jarak-w *jika setiap barisan Cauchy konvergen.*

Dibawah ini akan diberikan lemma yang berguna untuk membuktikan salah satu teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w.

Lemma 3.1.5 (Ljubomir, dkk. 2012: 4) *Diberikan (X,d) ruang metrik cone dan p jarak-w pada X. Diberikan barisan* $\{x_n\}$ *dan* $\{y_n\}$ *di X, diberikan* $\{a_n\}$ *dengan* $0 \preccurlyeq a_n$ *dan* $\{b_n\}$ *dengan* $0 \preccurlyeq b_n$ *merupakan barisan di E yang konvergen ke 0 dan* $x, y, z \in X$. *Maka*

a. *Jika* $p(x_n, y) \preccurlyeq a_n$ *dan* $p(x_n, z) \preccurlyeq b_n$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *maka y = z. dan jika p(x,y)=0 dan p(x,z)=0 maka y = z.*

b. *Jika* $p(x_n, y) \preccurlyeq a_n$ *dan* $p(x_n, z) \preccurlyeq b_n$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *maka* $\{y_n\}$ *konvergen ke z.*

Bukti :

a. Ambil sebarang $\varepsilon \epsilon E$ dengan $0 \ll \varepsilon$. Berdasarkan definisi 3.1.1 (d) terdapat $\delta \epsilon E$ dengan $0 \ll \delta$ sedemikian hingga $p(x_n, y) \preccurlyeq \delta$ *dan* $p(x_n, z) \preccurlyeq \delta$ maka $d(y, z) \ll \varepsilon$.

Ketika $a_n \to 0$ dan $b_n \to 0$ ada $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian hingga $a_n \preccurlyeq \delta$ dan $b_n \preccurlyeq \delta$ untuk setiap $n \geq n_0$. Maka untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$p(x_n, y) \preccurlyeq a_n \preccurlyeq 0 \text{ dan } p(x_n, z) \preccurlyeq a_n \preccurlyeq 0.$$

Karena $p(x_n, y) \preccurlyeq 0$ dan $p(x_n, z) \preccurlyeq 0$ jelas bahwa y = z.

b. Ambil sebarang $\varepsilon \epsilon E$ dengan $0 \ll \varepsilon$. Berdasarkan definisi 3.1.1 (d) terdapat $\delta \epsilon E$ dengan $0 \ll \delta$ sedemikian hingga $p(x_n, y_n) \preccurlyeq \delta$ *dan* $p(x_n, z) \preccurlyeq \delta$ maka $d(y_n, z) \ll \varepsilon$.

Ketika $a_n \to 0$ dan $b_n \to 0$ ada $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ sedemikian hingga $a_n \preccurlyeq \delta$ dan $b_n \preccurlyeq \delta$ untuk setiap $n \geq n_0$. Maka untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$p(x_n, y_n) \preccurlyeq a_n \ll \delta \text{ dan } p(x_n, z) \preccurlyeq a_n \ll \delta.$$

Dari definisi 3.1.1 (d) berlaku $d(y_n, z) \ll \varepsilon$. Sehingga $y_n \to z \;\; n \to \infty$. ■

Dibawah ini merupakan penjelasan dari teorema titik pada ruang metrik cone dengan jarak-w.

3.2 Teorema titik Tetap di Ruang Metrik cone pada Jarak-w

Subbab ini akan menjelaskan dua teorema titik tetap di ruang metrik cone pada jarak-w beserta satu contohnya.

Teorema 3.2.1 (Lakzian, dkk. 2009: 1084) *Diberikan ruang metrik cone lengkap (X,d) dengan p adalah jarak-*w *pada X dan pemetaan* $F : X \to X$. *Ada* $r \in [0,1)$ *sedemikian hingga*

$$p(Fx, F^2x) \preccurlyeq rp(x, Fx)\ , \forall x \in X \qquad (3.1)$$

dan

$$0 < \inf\{p(x, y) + p(x, Fx) : x \in X\}, \forall y \in X, y \neq Fy \qquad (3.2)$$

maka ada z ϵ X sedemikian hingga z = Fz.

Lebih lanjut, jika P cone normal dengan konstanta normal M dan z = Fz, maka p(z,z) = 0.

Bukti: Diberikan $x \in X$ dan suatu barisan $F^n x$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

berdasarkan pada persamaan (3.1) diperoleh

$$p(F^2x, F^3x) \preccurlyeq rp(Fx, F^2x) \preccurlyeq r^2p(x, Fx)$$

$$p(F^3x. F^4x) \preccurlyeq r\, p(F^2x, F^3x) \preccurlyeq r^3p(x, Fx)$$

sehingga untuk $n \epsilon \mathbb{N}$ diperoleh

$$p(F^n x, F^{n+1}x) \preccurlyeq rp(F^{n-1}x, F^n x) \preccurlyeq r^2 p(F^{n-2}x, F^{n-1}x) \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq r^n p(x, Fx)$$

diasumsikan $m > n$. akan dibuktikan barisan $F^n x$ merupakan barisan Cauchy. berdasarkan definisi 3.1.1 (b) didapat:

$$\begin{aligned} p(F^n x, F^m x) &\preccurlyeq p(F^n x, F^{n+1}x) + p(F^{n+1}x, F^m x) \\ &\preccurlyeq p(F^n x, F^{n+1}x) + p(F^{n+1}x, F^{n+2}x) \\ &\quad + p(F^{n+2}x, F^{n+3}x) + \cdots + p(F^{m-1}x, F^m x) \\ &\preccurlyeq r^n p(x, Fx) + r^{n+1} p(x, Fx) + \cdots + r^{m-1} p(x, Fx) \\ &= r^n p(x, Fx)(1 + r + \cdots + r^{m-n-1}) \\ &\preccurlyeq r^n p(x, Fx)(1 + r + \cdots + r^{m-n-1} + \cdots) \\ &= \frac{r^n}{1 - r} p(x, Fx) \end{aligned}$$

karena $r \epsilon [0,1)$ dan $n \to \infty$ maka $\frac{r^n}{1-r} \to 0$. Untuk $m, n \to \infty$ berakibat $p(F^n x, Fx) \to 0$. Lebih lanjut $\{F^n x\}$ adalah barisan Cauchy di X. Karena X ruang metrik *cone* lengkap maka ada titik $z \epsilon X$ sedemikian hingga $\{F^n x\}$ konvergen ke z. Diberikan $n, m \epsilon X$ (fix) maka $\{F^m x\}$ juga konvergen ke z.

Dan $p(F^n x,.)$ adalah semi kontinu bawah, kita dapatkan

$$p(F^n x, z) \preccurlyeq \lim_{n\to\infty} inf p(F^n x, F^m x) \preccurlyeq \frac{r^n}{1-r}\, p(x, Fx) \;\ldots\ldots \quad .\,(3.3)$$

Akan dibuktikan *z* = *Fz.* Andaikan $z \neq Fz$ berarti

$$\inf\{p(x,z) + p(x,Fx)\} \preccurlyeq \inf\{p(F^n x, z) + p(F^n x, F^{n+1}x) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\preccurlyeq \inf\{\frac{r^n}{1-r}\, p(x,Fx) + r^n p(x,Fx) : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

Jadi $\inf\{p(x,z) + p(x,Fx) = 0$

Kontradiksi dengan persamaan (3.2) berarti pengandaian salah sehingga terbukti

z = *Fz.* Lebih lanjut akan dibuktikan *p(z,z)=0*

Diketahui *z*=*Fz* berarti

$$p(z,z) = p(z,Fz)$$

$$= p(Fz, F^2 z)$$

$$\preccurlyeq rp(z,Fz)$$

$$= rp(z,z)$$

Jadi $p(z,z) \preccurlyeq r^k p(z,z), k \in \mathbb{N}$. Karena p normal cone berdasarkan definisi 2.4.4 berarti ada *M* > *0* sedemikian hingga:

$$||p(z,z)|| \leq Mr^k ||p(z,z)||$$

Karena $r \epsilon [0,1)$ dan $Mr^k < 1$ sehingga $\|p(z, z\| = 0$ berarti $p(z, z) = 0$

Jadi terbukti $p(z, z) = 0$.

Teorema 3.2.2 (Ljubomir, dkk. 2012: 8)

Diberikan ruang metrik cone lengkap (X,d) dengan jarak-w *p dan* $r \epsilon [0,1)$. *diberikan pemetaan* $F: X \longrightarrow X$ *dengan F memenuhi kondisi kontraktif yaitu*

$$p(Fx, Fy) \preccurlyeq rp(x, y) \textit{ untuk setiap } x, y \,\epsilon\, X$$

maka F mempunyai sebuah titik tetap tunggal z ϵ *X, Dan p(z,z) = 0*

Bukti :

Ambil sebarang $x \epsilon X$ dan didefinisikan barisan $x_{n+1} = F^n x$ untuk setiap $n \epsilon \mathbb{N}$. Berdasarkan teorema 3.2.1 pada persamaan (3.3) dan diperoleh $F^n x = z \epsilon X$ sehingga berlaku

$$p(F^n x, z) \preccurlyeq \frac{r^n}{1-r} p(x, Fx)$$

dengan kondisi kontraktif diatas diperoleh

$$p(F^n x, Fz) \preccurlyeq rp(F^{n-1}x, z) \preccurlyeq r\frac{r^{n-1}}{1-r} p(x, Fx) = \frac{r^n}{1-r} p(x, Fx)$$

berdasarkan lemma 3.1.5 (b) misal $a_n = b_n = \frac{r^n}{1-r} p(x, Fx)$ dan

$\frac{r^n}{1-r} p(x, Fx) \longrightarrow 0$ Sehingga $a_n = b_n = 0$ dapat disimpulkan bahwa *Fz = z.*

Selanjutnya

$$p(z,z) = p(Fz,Fz) = p(Fz,F^2z) \preccurlyeq rp(z,Fz) = rp(z,z)$$

Jadi $p(z,z) \preccurlyeq r^k p(z,z), k \in \mathbb{N}$. Karena p normal cone berdasarkan definisi 2.4.4 berarti ada $M > 0$ sedemikian hingga:

$$||p(z,z)|| \leq Mr^k||p(z,z)||$$

Karena $r \in [0,1)$ dan $Mr^k < 1$ sehingga $\|p(z,z\| = 0$ berarti $p(z,z) = 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa titik tetap pada F adalah tunggal

Missal $u \in X$ sebarang titik. Maka

$$p(z,u) = p(Fz,Fu) \preccurlyeq rp(z,u)$$

Sehingga diperoleh $p(z,u) = 0$. karena $p(z,u) = 0$ berdasarkan lemma 3.1.5 (a) diperoleh $u = z$. ■

Jadi terbukti *T* mempunyai titik tetap tunggal di *X*. ■

Dibawah ini diberikan satu contoh teorema titik tetap pada ruang metrik cone dengan jarak-w.

Contoh 3.2.3

Diberikan ruang metrik cone lengkap *(X,p)* dengan jarak-w p dan cone normal P dengan $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\}$ dengan konstanta normal M=1. Dengan

$$p(x, y) = (|x - y|, a|x - y|)$$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $Fx = \frac{3}{4}x$ dimana $r \epsilon [0,1)$ meupakan pemetaan kontraktif pada *(X,d)* dan mempunyai titik tetap tunggal yaitu 0

Bukti:

Akan ditunjukkan $Fx = \frac{3}{4}x$ memenuhi kondisi kontraktif pada *(X,d).*

$$p(Fx, Fy) = p\left(\frac{3}{4}x, \frac{3}{4}y\right)$$

$$= \left(\left|\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y\right|, a\left|\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}y\right|\right)$$

$$= \left(\left|\frac{3}{4}(x - y)\right|, a\left|\frac{3}{4}(x - y)\right|\right)$$

$$= \frac{3}{4}\ (|x - y|, a|x - y|)$$

Karena $p(Fx, Fy) \preccurlyeq rp(x, y)$, maka $rp(x, y) - p(Fx, Fy) \epsilon P$

Jadi $0 \preccurlyeq r(|x - y|, a|x - y|) - \frac{3}{4}(|x - y|, a|x - y|) \Leftrightarrow \frac{3}{4} \preccurlyeq r$

Didapatkan $\frac{3}{4} \preccurlyeq r$ dimana $r \epsilon [0,1)$ sehingga $p(Fx, Fy) \preccurlyeq rp(x, y)$. Artinya $Fx = \frac{3}{4}x$ memenuhi kondisi kontraktif pada ($\mathbb{R}$,p).

Akan dibuktikan titik tetap pada $Fx = \frac{3}{4}x$ adalah 0.

Ambil sebarang $x^* \epsilon \mathbb{R}$ sedemikian hingga $Fx^* = x^*$

Dengan $\frac{3}{4} \preccurlyeq r$ dimana $r \epsilon [0,1)$ maka $Fx^* = \frac{3}{4}x^* \iff x^* = \frac{3}{4}x^*$ dipenuhi jika x^*= 0.

Jadi x^*= 0 adalah titik tetap dari *F*.

Selanjutnya akan ditunjukkan titik tetap dari *F* tunggal.

Jika y^* adalah titik tetap yang lain dari *F* dan Fy^*= y^* maka:

$$p(x^*, y^*) = p(Fx^*, Fy^*) \preccurlyeq rp(x^*, y^*)$$

Oleh karena itu $p(x^*, y^*) = 0$ dan $x^* = y^* = 0$ sehingga titik tetap dari *F* tunggal.

■

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa barisan konvergen dan barisan Cauchy di ruang metrik cone berlaku juga di jarak-w, selanjutnya pembuktian pemetaan kontraktif di ruang metrik cone lengkap dan normal cone dengan menggunakan jarak-w mempunyai titik tetap tunggal.

4.2 Saran

Setelah menyelesaikan penelitian ini, saran yang disampaikan penulis adalah:

1. Pembuktian pemetaan kontaktif pada penelitian ini hanya menggunakan 2 kondisi kontraktif saja. Sehingga masih banyak kondisi kontraktif yang belum penulis jelaskan.
2. Penelitian ini hanya membahas konsep dasar jarak-w yang diaplikasikan ke teori titik tetap.
3. Ruang metrik cone dan pembuktian teorema titik tetap dengan jarak-w masih bisa di generalisasi lagi diantaranya dengan menggeneralisasi teorema titik tetap Caristi dan prinsip e-variasi.

Demikian saran – saran yang penulis sampaikan, semoga menjadi inspirasi bagi pembaca untuk mengembangkan lagi aplikasi titik tetap di ruang metrik cone dengan menggunakan jarak-w.

DAFTAR PUSTAKA

Bahtiar, A. Rifqi. 2012. *Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*. *Skrpsi.* Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Sunan Kalijaga.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Gadjah Mada.

Dhanorkar, G. A. and J. N. Salunke. 2011. *A Generalization on Fixed Point Theorem on Cone Metric Spaces with w-Distance.* Int. Mathematical Forum, Vol. 6. 1915 – 1919.

Guang, Huang Long and Zhang Xian. 2006. *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mapping.* J.Math Anal . Appl. 332(2007) 1468-1476.

Khan, Sami Ullah and Arjamand Bano. 2013. *Common Fixed Point Theorems in Cone Metric Spaces using –Distance.* Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7. 657 – 663.

Lakzian, H and F. Arabyani. 2009. *Some Fixed Point Theorems in Cone Metric Spaces with w-Distance.* Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 3, 1081 – 1086.

Ljubomir, Ciric, dkk. 2012. *Fixed Point Theorems for w-Cone Distance Contraction Mapping in tvs-Cone Metric Spaces.* Springer: Fixed Point Theory and Aplications.

Mohanta, Sushanta Kumar and Rima Maitra. 2012. *Some Fixed Point Theorems Via w-Distance on Cone Metric Spaces.* Global Journals Inc. (USA). Vol. 12 Issue 1.

Murti, Hajar Grestika, dkk. 2013. *Teorema Titik Tetap pada Ruang Bernorma Cone* $\mathbb{R}$ *Bernilai*-$\mathbb{R}^2$. Jurnal Sains dan Seni Pomits. Vol. 1, No. 1. 1 -6.

Pratama, Bayu Adhi. 2013. *Teorema Titik Tetap di Ruang Banach Cone*. *Skrpsi.* Yogyakarta: Jurusan matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Sunan Kalijaga.

Shirali, Satish dan Harkrishan, L. Vasudeva. 2006. *Metric Spaces*. London: Springer – Verlag.

Tuwankotta, Johan Matheus. 2013. *Teori Ukuran dan Integral.* Bandung: FMIPA Institut Teknologi Bandung.

Turgoklu, Duran and Muhib Abuloha. 2010. *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems in Diametrically Contractive Mapping.* Acta Mathematica Sinic, English Series. Vol. 26. No. 3. 489 – 496.