

**ANALISIS KESTABILAN SISTEM SUSPensi MOBIL SEPEREMPAT
KENDARAAN DENGAN METODE LYAPUNOV LANGSUNG**

Skripsi
untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1



diajukan oleh

ANDI ARIYANTO
10610017

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2015

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu 'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Andi Ariyanto

NIM : 10610017

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Sistem Suspensi Mobil Seperempat
Kendaraan Dengan Metode Lyapunov Langsung

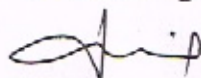
sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang Matematika

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu 'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, September 2015

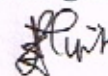
Pembimbing I



Sugiyanto, M.Si

NIP. 19800505 200801 1 028

Pembimbing II



Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

NIP. 19861208 000000 2 301



Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga

FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/3147/2015

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Analisis Kestabilan Sistem Suspensi Mobil Seperempat Kendaraan dengan Metode LYAPUNOV Langsung

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Nama : Andi Ariyanto

NIM : 10610017

Telah dimunaqasyahkan pada : 29 September 2015

Nilai Munaqasyah : A -

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Sugiyanto, M.Si

NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc
NIP.19861208 201503 2 006

Penguji II

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP.19800402 200501 1 003

Yogyakarta, 7 Oktober 2015

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

Dekan



Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si

NIP. 19550427 198403 2 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Andi Ariyanto
NIM : 10610017
Prodi / Smt : Matematika / XI
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesajanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 8 September, 2015



Andi Ariyanto
Andi Ariyanto

MOTTO

***”Hidup ini hanyalah tentang rasa syukur dan bagaimana cara kita
mensyukurinya.”***

– Andi Ariyanto



HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini ku persembahkan untuk ibuku tercinta, yang padanya tak ada kata-kata yang sanggup mengibaratkan kebesaran hati dan keagungan kasih sayang dan cintanya.

Untuk idolaku yang selalu menginspirasi, ayahku yang terbaik dan nomor satu di dunia,

dan untuk adikku yang paling kusayangi, tak ada intan ataupun permata yang lebih berkilau darinya, Novi.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Analisis Kestabilan Sistem Suspensi Mobil Seperempat Kendaraan Dengan Metode Lyapunov Langsung".

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan dan kerjasama berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan tulus ikhlas penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bapak Sugiyanto, M.Si. selaku dosen pembimbing I dan ibu Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc. selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu dan tenaga untuk memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Segenap staf dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
5. Ibu dan Ayah atas segala kasih sayang, kepercayaan, dukungan dan do'a yang tiada hentinya untukku dan adikku, serta keluarga besarku yang telah memberikan motivasi, nasehat, serta semangat kepada penulis dalam menyusun skripsi.
6. Keluarga kos yang telah menjadi keluarga kedua sekian tahun; pak Hartono, bu Muti, mbak Dian, mas Akip, Heri, Susilo, Gaisan dan Rifai.

7. Sahabat-sahabatku; Math Adventure, MatrixX, Integral, GK80.
8. Semua pihak yang telah membantu dan mendukung dalam melaksanakan penelitian ini.

Semoga semua bantuan yang diberikan selama penelitian hingga terselesaikannya skripsi ini mendapatkan balasan yang lebih dari Allah SWT.

Penulis menyadari penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu segala kritikan dan saran yang bersifat membangun guna kesempurnaan skripsi ini sangat diharapkan. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi kita semua dan lebih khusus bagi pengembangan ilmu matematika.

Yogyakarta, 10 September 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN	xv
INTISARI	xvi
ABSTRACT	xvii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Batasan Masalah	4
1.3 Rumusan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Tinjauan Pustaka	6
1.7 Sistematika Penulisan	8
1.8 Metode Penelitian	9

II	LANDASAN TEORI	10
2.1	Matriks	10
2.1.1	Operasi Matriks	11
2.1.2	Transpose Matriks	14
2.1.3	Jenis-Jenis Matriks	14
2.1.4	Aturan-Aturan Ilmu Hitung Matriks	16
2.1.5	Determinan	16
2.2	Ruang Vektor— n Euclidis	21
2.2.1	Operasi Vektor	21
2.2.2	Hasil-kali Dalam Euclidis	21
2.2.3	Norma dan Jarak Euclidis	22
2.2.4	Kombinsi Linier	23
2.2.5	Kebebasan Linier	24
2.2.6	Ruang Hasi Kali Dalam	24
2.3	Nilai Karakteristik dan Bentuk Kuadratis (Quadratic Form)	27
2.3.1	Definisi Nilai Eigen dan Vektor Eigen	27
2.3.2	Nilai Karakteristik	27
2.3.3	Definisi Bentuk Kuadratis	29
2.3.4	Matriks Definit Bentuk Kuadratis	30
2.3.5	Kriteria Sylvester	31
2.4	Turunan	33
2.4.1	Limit Fungsi	33
2.4.2	Kekontinuan fungsi	35
2.4.3	Definisi Turunan	35
2.4.4	Keterdiferensialan Berimplikasi Kekontinuan	36
2.4.5	Notasi Leibniz (Purcell & Varberg, 2003:132)	36

2.4.6	Aturan Pangkat	38
2.4.7	Aturan Umum Turunan (Smith, 2002:180)	39
2.4.8	Turunan Parsial	39
2.4.9	Gradien Vektor	40
2.5	Persamaan Diferensial	40
2.5.1	Persamaan Diferensial Linier	41
2.5.2	Persamaan Diferensial Linier Homogen	44
2.5.3	Kondisi Awal (Luenberger, 1979:39)	46
2.6	Sistem Pegas-Massa (Susanta, 2008)	48
2.6.1	Hukum Newton Kedua (Susanta, 2008)	48
2.6.2	Hukum Hooke (Susanta, 2008)	49
2.6.3	Sistem Pegas Dua Massa (Susanta, 2008)	49
2.6.4	Sistem Pegas-Massa-Redaman (Ogata, 2004:59)	51
2.7	Teori Sistem	51
2.7.1	Pengertian Sistem	51
2.7.2	Sistem Persamaan Diferensial Orde-Pertama	52
2.7.3	Sistem Linier Kontinu orde- n	52
2.7.4	Persamaan <i>State-Space</i>	53
2.7.5	Representasi <i>State-Space</i> Pada Sistem (Brogan, 1991:80)	54
2.7.6	Hubungan Antara <i>State</i> , <i>Input</i> dan <i>Output</i> (Subiono, 2013:37)	59
2.7.7	Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier	60
2.7.8	Kestabilan Sistem	66

III ANALISIS KESTABILAN SISTEM SUSPENSİ MOBİL SEPEREMPAT

	KENDARAAN DENGAN METODE LYAPUNOV LANGSUNG	70
3.1	Metode Lyapunov Langsung	70
3.1.1	Fungsi Lyapunov	72

3.1.2	Kriteria Kstabilan Lyapunov	76
3.1.3	Fungsi Kuadratis Lyapunov	80
3.1.4	Langkah-langkah Penentuan Kestabilan Dengan Metode Lya- punov Langsung	84
3.2	Sistem Suspensi	89
3.2.1	Pemodelan Sistem Suspensi Mobil Seperempat Kendaraan . .	90
3.2.2	Kestabilan Model Sistem Suspensi Seperempat Kendaraan . .	95
3.2.3	Simulasi Gerak Osilasi <i>Sprung</i> dan <i>Unsprung</i>	104
IV	KESIMPULAN DAN SARAN	107
4.1	Kesimpulan	107
4.2	Saran	109
A	<i>SOURCE-CODE PROGRAM / M-File</i>	112
1.1	Program 1 : Aturan Cramer	112
1.2	Program 2 : Osilasi $t = 0$	113
1.3	Program 3 : Osilasi $t = 1, x(t_0) = [5; 0; 5; 0]$	115
1.4	Program 4 : Osilasi $t = 6, x(t_0) = [5; 0; 5; 0]$	116

DAFTAR TABEL

1.1	Tinjauan pustaka	7
3.1	Parameter sistem suspensi	96



DAFTAR GAMBAR

2.1	Kemiringan tali busur	37
2.2	Sistem pegas dua massa a	49
2.3	Sistem pegas dua massa b	50
2.4	Elemen peredam kejut	51
2.5	Hubungan <i>state</i> , <i>input</i> dan output sistem	59
2.6	Kestabilan titik ekuilibrium a	68
2.7	Kestabilan titik ekuilibrium b	68
3.1	Diagram <i>fishbone</i>	71
3.2	Representasi geometris himpunan teorema 3.1	77
3.3	Diagram metode Lyapunov	84
3.4	Letak sistem suspensi	90
3.5	Model Sistem Suspensi Mobil Seperempat Kendaraan	91
3.6	Model Gerak Sistem Suspensi Mobil Seperempat Kendaraan	91
3.7	<i>Output sprung</i> dan <i>unsprung-mass</i> a	105
3.8	<i>Output sprung</i> dan <i>unsprung-mass</i> b	106
3.9	<i>Output sprung</i> dan <i>unsprung-mass</i> c	106

DAFTAR LAMBANG

$A_{m \times n}$	= Ruang matriks berdimensi $m \times n$
R^n	= Ruang vektor bilangan real berdimensi- n
λ	= Nilai eigen
$\Re \lambda_i$	= Nilai eigen bagian real
$\dot{x}$	= Turunan fungsi x terhadap waktu t atau $\frac{dx}{dt}$
F	= Gaya
∇	= Gradien vektor (derivatif)
■	= Akhir dari bukti
Σ	= Ruang rtate (ruang berdimensi n)
x_e	= Titik ekuilibrium sistem
m_1	= Massa <i>sprung</i> (Massa bodi kendaraan)
m_2	= Massa <i>unsprung</i> (Massa roda kendaraan)
c	= Peredam kejut
k_1	= Elastitas pegas <i>sprung</i>
k_2	= Elastitas pegas <i>unsprung</i>
u	= <i>Input</i> dari keadaan jalan
a_1	= Perpindahan (gerak vertikal) <i>sprung</i>
a_2	= Perpindahan (gerak vertikal) <i>unsprung</i>
$\dot{a}_1$	= Laju bodi kendaraan,
$\dot{a}_2$	= Laju roda kendaraan,
$\ddot{a}_1$	= Percepatan (akselerasi) bodi kendaraan,
$\ddot{a}_2$	= Percepatan (akselerasi) roda, dan
$u - a_2$	= Defleksi roda.

INTISARI

ANALISIS KESTABILAN SISTEM SUSPENSI MOBIL SEPEREMPAT KENDARAAN DENGAN METODE LYAPUNOV LANGSUNG

Oleh

ANDI ARIYANTO

10610017

Beberapa kasus penyelesaian masalah kestabilan sistem dinamik dengan menentukan semua solusi dari persamaan diferensialnya itu sulit. Sehingga diperkenalkan sebuah metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan kestabilan tanpa mencari solusinya terlebih dahulu, yaitu metode Lyapunov langsung. Metode Lyapunov langsung dapat digunakan dengan syarat fungsi Lyapunov sistem ada, yaitu fungsi skalar $V(x) > 0$ dan $\dot{V} \leq 0$. Fungsi Lyapunov dari sistem dapat dicari dari bentuk kuadratis dengan persamaan Lyapunov $A^T P + P A = -Q$.

Sistem suspensi merupakan sebuah sistem kelengkapan pada kendaraan yang dapat memberikan kenyamanan pada pengendaranya sekaligus melindungi komponen-komponen kendaraan dari kerusakan akibat benturan langsung dengan keadaan jalan. Sistem suspensi yang baik mampu menghindarkan kendaraan dari benturan langsung serta dapat memberikan kestabilan.

Simulasi gerak osilasi dan kestabilan sistem suspensi dari model sistem suspensi seperempat kendaraan yang menggambarkan permasalahan nyata diberikan pada akhir bab. Dengan parameter-parameter yang diberikan oleh Tabel 3.1, sistem suspensi mobil seperempat kendaraan merupakan sistem yang stabil asimtotik secara global.

Kata kunci : Lyapunov, kuadratis, kestabilan, suspensi, seperempat kendaraan

ABSTRACT

STABILITY ANALYSIS OF QUARTER CAR SUSPENSION SYSTEM USING DIRECT METHOD LYAPUNOV

By

ANDI ARIYANTO

10610017

Problem solving stability of dynamic systems by determine all solutions of the differential equation for some cases is difficult. Thus introduced a method that can be used to solve stability without finding a solution in advance, namely the direct Lyapunov method. Direct Lyapunov method can be used on condition that Lyapunov function is exist, which is a scalar function $V(x) > 0$ and $\dot{V} \leq 0$. Lyapunov function of the system can be found Lyapunov equation using quadratic form of Lyapunov $A^T P + P A = -Q$.

The suspension system is a completeness of vehicle which can provide comfort to passengers while protecting the components from damage due to collision of vehicles directly with property of the road. Good suspension system is able to prevent the vehicle from impact directly and could provide stability.

Simulation of suspension system including motion and stability in quarter-car model suspension that describes real problems are given at the end of the chapter. With the parameters given in Table 3.1, a quarter-car suspension is globally asymptotically stable sytems.

Keywords : Lyapunov, quadratic form, stability, suspension, quarter-car,

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan disiplin ilmu yang dapat diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan dapat memberikan interpretasi solusi analitis yang lebih rinci. Misalnya pada studi bidang fisika mengenai sistem pegas-massa, dengan menurunkan persamaan-persamaan kemudian didapatkan hukum newton dan hukum hooke. Interpretasi dari sistem pegas-massa kemudian banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari mulai dari yang sangat sederhana yaitu pegas pada pena, sampai sistem pegas yang lebih rumit, misalnya pada sistem suspensi mobil.

Permasalahan-permasalahan nyata tersebut dapat diselesaikan dengan metode teoritis dan matematis setelah melalui tahap-tahap pemodelan matematika. Suatu model matematika dikatakan baik apabila mampu memberikan gambaran objeknya dengan cukup jelas atau secara luas mampu menggambarkan keadaan yang sesungguhnya, sehingga tujuan dari penyusunan model tercapai (Susanta: 2008).

Ada terdapat banyak model matematika yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari. Misalnya permasalahan-permasalahan yang melibatkan banyak parameter yang kompleks dan tersusun dalam satu sistem yang kemudian dalam matematika modern dikenal sebagai sistem dinamik. Sistem dinamik yaitu suatu sistem persamaan yang dipengaruhi oleh perubahan gerak dan waktu. Selanjutnya untuk memudahkan dalam penelitian, persamaan sistem dinamik ini sering ditransformasikan kedalam suatu persamaan keadaan atau dikenal dengan persamaan *state-space*.

Salah satu kajian penting dalam permasalahan sistem dinamik yakni bagaimana

keadaan sistem, apakah sistem merupakan sistem yang stabil atau tak-stabil. Permasalahan kestabilan ini dapat diselesaikan dengan berbagai metode misalnya diagonalisasi, metode nilai karakteristik, metode Routh-Horwitz dan berbagai metode lain.

Telah dijelaskan di dalam buku yang ditulis oleh William L. Brogan yang berjudul "*Modern Control Theory*" dan di dalam buku yang ditulis oleh Subiono dengan judul "*Sistem Linear dan Kontrol Optimal*", bahwa untuk menyimpulkan kestabilan suatu sistem, solusi dari persamaan *state* harus di selesaikan terlebih dahulu. Artinya solusi dari sistem persamaan diferensialnya harus diselesaikan. Tetapi mencari semua solusi dari persamaan diferensial yang tetap terbatas atau menuju nol terkadang menemui kesulitan.

Untuk tujuan ini, di akhir abad kesembilan belas, matematikawan Rusia, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov mengembangkan pendekatan untuk analisis kestabilan, sekarang dikenal sebagai metode Lyapunov langsung (*direct Lyapunov method*).

Hal yang unik dari metode Lyapunov langsung adalah, bahwa untuk menyelesaikan permasalahan kestabilan sistem, yang perlu diketahui adalah bentuk persamaan diferensial sistemnya atau bentuk fisisnya bukan solusinya (Brogan, 1991, Hal. 350).

Penyelesaian kestabilan sistem dinamik dengan menggunakan metode Lyapunov langsung mensyaratkan suatu fungsi, yang disebut sebagai fungsi Lyapunov. Yaitu fungsi skalar yang memenuhi beberapa syarat diantaranya jika ada sebuah fungsi definit-positif $V(x)$ sedemikian sehingga turunan dari yaitu semidefinit negatif. Metode Lyapunov Langsung banyak diterapkan untuk menganalisis kestabilan baik sistem linear maupun sistem non linier, sistem *time-invariant* dan juga sistem *time-varying*.

Dalam tugas akhir ini akan diperlihatkan bahwa metode Lyapunov langsung ini terbukti sangat berguna untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan

kestabilan dengan studi kasus pada permasalahan sistem suspensi mobil.

Saat ini, kenyamanan dalam berkendara sudah menjadi komoditas penting bagi pengendaranya. Gangguan pada kenyamanan dalam berkendara ditimbulkan oleh beberapa faktor, diantaranya adalah guncangan akibat permukaan jalan yang tidak rata. Selain menyebabkan ketidak-nyamanan dalam berkendara, guncangan-guncangan yang terjadi juga mengakibatkan cepat rusaknya komponen-komponen pada kendaraan. Sehingga diciptakan sebuah sistem yang mampu meredam guncangan tersebut untuk memberi kenyamanan pada pengendaranya sekaligus melindungi komponen-komponen kendaraan dari benturan yang terlalu keras, yakni sistem suspensi.

Namun dalam perkembangannya tidak semua sistem suspensi mampu memberikan kenyamanan yang baik. Oleh karena itu studi untuk menganalisis kemampuan sistem suspensi dalam peredaman guncangan kemudian dikembangkan. Suspensi yang baik mampu meredam osilasi yang terus menerus akibat guncangan. Dalam hal ini analisis kenyamanan dalam berkendara difokuskan pada kemampuan sistem suspensi dalam menstabilkan guncangan.

Satu unit sistem suspensi pada kendaraan pada umumnya terdiri atas sebuah pegas dan sebuah peredam kejut yang terdiri dari besaran massa, gaya yang bekerja pada pegas dan konstantan pegas dan peredam kejut. Terdapat banyak jenis dan model sistem suspensi yang terdapat pada kendaraan. Ada sistem suspensi yang menggunakan menggunakan pegas daun (per) sampai sistem suspensi yang menggunakan *coil spring* (pegas ulir). Sistem suspensi yang menggunakan pegas daun pada umumnya digunakan pada kendaraan berat seperti truk dan bus, sedangkan pegas coil spring banyak digunakan pada mobil kendaraan ringan misalnya mobil jenis sedan. Perbedaan penggunaan jenis pegas mungkin akan mendapatkan hasil peredaman yang berbeda, namun dalam tugas akhir ini penggunaan jenis pegas diasumsikan sama un-

tuk mewakili model sistem suspensi yang dipakai, yaitu model sistem suspensi mobil seperempat kendaraan.

Model sistem suspensi seperempat kendaraan (sistem suspensi pada satu roda) digunakan sebagai kasus dalam tugas akhir ini dengan mengasumsikan jika masing-masing sistem suspensi pada satu roda tersebut mampu menstabilkan guncangan maka gangguan kenyamanan dalam berkendara dapat berkurang.

Berdasarkan latar belakang ini, penulis bermaksud melakukan penelitian studi literatur tentang Metode Lyapunov Langsung dan penerapannya dalam menganalisis kemampuan sistem suspensi mobil dalam meredam guncangan. Studi literatur ini diharapkan dapat memberikan sumbangan ilmu pengetahuan secara umum dan perkembangan ilmu pengetahuan khususnya di Matematika UIN Sunan Kalijaga.

1.2 Batasan Masalah

Batasan-batasan masalah dalam tugas akhir ini, adalah sebagai berikut.

1. Permasalahan sistem yang dibahas terbatas pada sistem waktu-kontinu linier dengan koefisien konstan atau *linear time-invariant*.
2. Sistem suspensi yang digunakan yaitu sistem suspensi model seperempat kendaraan.

1.3 Rumusan Masalah

Dari latar belakang dan batasan masalah tersebut dapat dibentuk rumusan masalah sebagai berikut :

1. Menjelaskan bagaimana konsep kestabilan pada sistem *linear time-invariant*.
2. Menjelaskan metode Lyapunov langsung dalam analisis kestabilan dan langkah-langkah menentukan fungsi Lyapunov.

3. Menjelaskan bagaimana pemodelan sistem suspensi pada mobil model seperempat kendaraan dan mentransformasikannya kedalam persamaan *state-space*.
4. Mengaplikasikan metode Lyapunov langsung dalam menganalisis kemampuan sistem suspensi dalam meredam guncangan.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan tugas akhir ini, yaitu untuk.

1. Mengetahui konsep kestabilan sistem linier *time-invariant*.
2. Mengetahui langkah-langkah menentukan fungsi Lyapunov dari suatu sistem dan aplikasinya dalam menyelesaikan permasalahan kestabilan sistem.
3. Mengetahui penerapan Matematika khususnya dalam studi bidang Matematika teknik.
4. Menyelesaikan permasalahan kestabilan pada sistem suspensi mobil model seperempat kendaraan.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

Penelitian ini memberikan manfaat sebagai wawasan keilmuan Matematika, bukan hanya sebagai ilmu teori melainkan suatu ilmu yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu hasil penelitian ini menambah referensi terhadap mahasiswa untuk menyusun tugas akhir.

2. Bagi Program Studi Matematika

Penelitian ini dapat menambah referensi pada penerapan studi matematika teknik dan bermanfaat sebagai rujukan dalam penelitian lebih lanjut mengenai metode Lyapunov langsung.

3. Bagi Ilmu Pengetahuan

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan dan alternatif dalam menyelesaikan permasalahan kestabilan suatu sistem dinamik.

1.6 Tinjauan Pustaka

Rujukan pada penulisan tugas akhir ini diambil dari berbagai literatur-literatur yang tersebut dalam daftar pustaka. Penulisan tugas akhir ini terinspirasi dari beberapa penelitian sebelumnya, antara lain, sebagai berikut.

Tabel 1.1: Tinjauan pustaka

No.	Nama Peneliti	Judul Penelitian	Perbedaan dengan penelitian sebelumnya
1.	Nyoman Bangsin	Pengujian Prototip Suspensi Aktif Tegar (Robust) Model Seperempat Kendaraan	Pemodelan pada sistem suspensi tidak memakai gangguan sinusida dan dengan nilai serta konstanta yang sama kestabilan di analisis dengan menggunakan metode Lyapunov langsung.
2.	Anggoro Aristianto dkk.	Aplikasi Fuzzy Logic Control Pada Sistem Suspensi Semi-Aktif Model Kendaraan Seperempat	Kemampuan sistem suspensi dalam meredam guncangan dinalisis menggunakan metode Lyapunov langsung.
3.	Amirul Huda dan Unggul Wasi-witono	Analisis Sistem Suspensi Kendaraan Multi-guna Pedesaan (GEA)	Kemampuan sistem suspensi dalam meredam guncangan dinalisis menggunakan metode Lyapunov langsung.
4.	Andi Ariyanto	Analisis Kestabilan Sistem Suspensi Mobil Seperempat Kendaraan Dengan Metode Lyapunov Langsung	Kemampuan sistem suspensi dalam meredam guncangan dinalisis menggunakan metode Lyapunov langsung.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan penelitian ini, adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dipaparkan tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustakan, sistematika penulisan serta metode penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai landasan teori yang digunakan dalam penyusunan tugas akhir ini yang meliputi matriks, turunan, sistem pegas-massa dan teori sistem dinamik.

BAB III ANALISIS SISTEM SUSPENSI DALAM MEREDAM GONCANGAN DENGAN METODE LYAPUNOV LANGSUNG

Pada bab ini akan diuraikan mengenai mengenai fungsi Lyapunov, metode Lyapunov langsung, masalah pemodelan sistem suspensi mobil model seperempat kendaraan dan analisis kestabilan kendaraan oleh sistem suspensi.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab ini akan dipaparkan kesimpulan sebagai jawaban dari rumusan permasalahan yang diajukan serta saran untuk pengembangan tulisan yang berbeda dimasa yang akan datang.

DAFTAR PUSTAKA

1.8 Metode Penelitian

Dalam penyusunan tugas akhir ini, penulis menggunakan metode studi literatur yaitu membahas konsep-konsep yang sudah ada di dalam literatur. Dalam hal ini penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dari buku dan jurnal.

Adapun langkah langkah yang dilakukan penulis dalam penelitian ini, adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan materi dan informasi dari buku sehingga diperoleh Metode Lyapunov Langsung dalam menyelesaikan permasalahan kestabilan sistem.
2. Rujukan utama dalam penelitian ini diambil dari buku "*Modern Control Theory*" edisi ke-3 yang di tulis oleh William L. Brogan pada tahun 1991 dan buku "*Introduction to Dynamic Systems Theory, Model and Applications*" yang ditulis oleh David G. Leunberger.
3. Referensi lain diambil dari buku yang di tulis oleh Katsuhiko Ogata yang berjudul "*System Dynamics*" edisi ke-4.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari latar belakang masalah, rumusan masalah dan pembahasan bab 1, bab 2 dan bab 3 diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Permasalahan kestabilan sistem linier *time-invariant* dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Lyapunov langsung, yaitu dengan menentukan fungsi Lyapunov untuk sistem.
2. Langkah-langkah menyelesaikan permasalahan kestabilan dengan menggunakan metode Lyapunov yaitu :
 - (a) Masalah pada kehidupan nyata di modelkan terlebih dahulu menjadi sistem persamaan diferensial sehingga diperoleh model matematika sistem fisis.
 - (b) Model matematika sistem fisis tersebut kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan *state-space*.
 - (c) Dari bentuk model persamaan *state space*, ditentukan bentuk kuadratis fungsi Lyapunov.
 - (d) Jika fungsi kuadratis Lyapunov dapat ditentukan selanjutnya kestabilan sistem dapat di periksa dengan Teorema 3.1.3. , Teorema 3.1.4 dan Teorema 3.1.6.
 - (e) Setelah langkah 1 samapi 4 ditempuh akan didapatkan hasil sistem yang stabil, stabil asimtotik atau tidak stabil.

Dan fungsi Lyapunov dicari dari bentuk kuadratis menggunakan persamaan Lyapunov dengan menentukan matriks simetris definit-positif P dan matriks definit-positif Q yang memenuhi persamaan Lyapunov $A^T P + P A = -Q$.

3. Dari sub-bab 3.2, model sistem suspensi mobil seperempat kendaraan yaitu,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_1}{m_1} (x_3 - x_1) + \frac{c}{m_1} (x_4 - x_2) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -\frac{k_1}{m_2} (x_3 - x_1) - \frac{c}{m_2} (x_4 - x_2) + \frac{k_2}{m_2} (u - x_3)\end{aligned}$$

Dengan mendefinisikan variabel *state* diperoleh matriks persamaan ruang keadaan

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c}{m_2} & -\left(\frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}\right) & -\frac{c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} u(t)$$

dan persamaan *output*

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

4. Dengan model sistem suspensi yang diperoleh dan dengan parameter-parameter yang diberikan oleh Tabel 3.1, sistem suspensi mobil seperempat kendaraan merupakan sistem stabil asimtotik secara global. Dan fungsi Lyapunov sistem-

nya yaitu

$$\begin{aligned}
 V(x) = & 67,2351z_1^2 + 0,2786z_2^2 + 553,6017z_3^2 + 0,0286z_4^2 + \\
 & 0,2208z_1z_2 - 107,0166z_1z_3 + 0,0286z_1z_4 \\
 & - 1,2210z_2z_3 + 0,0018z_2z_4 - 0,0284z_3z_4
 \end{aligned}$$

5. Berdasarkan analisis secara teoritis dari nomor 3 dan 4 dan simulasi grafik yang di tunjukkan oleh Gambar 3.7-3.9, Model sistem suspensi mampu mewakili keadaan sebenarnya.

4.2 Saran

Untuk penelitian lebih lanjut di masa mendatang mengenai metode Lyapunov langsung, disarankan :

1. Peneliti dapat menggunakan kasus sistem non-linier, sistem linier *time-varying* dan sistem diskret.
2. Peneliti dapat menggunakan metode Schultz-Gibson, Metode Krasovskii, Metode Gradien, metode Fermat untuk mencari fungsi Lyapunov sistem.
3. Peneliti dapat meminimalkan error perhitungan secara numerik dalam komputasi dan dapat membuat simulasi dengan simulink atau program lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., 1987, *Aljabar Linier Elementer (Edisi Kelima ed.)*, Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Anton, H., (2000), *Dasar-Dasar Aljabar Linier (Jilid 2.)*, Tangerang : Binarupa Aksara Publisher.
- Bangsing, N., 2004, Pengujian Prototip Suspensi Aktif Tegar (Robust) Model Seperempat Kendaraan, *PROC. ITB Sains & Tek.*, Vol. 36 A, No. 1, 2004, 83-95.
- Brogan, W. L., 1991, *Modern Control Theory (Third Edition ed.)*, Las Vegas: Prentice Hall.
- Bronson, R., & Costa, G. B., 2006, *Differential Equations*, New York: McGraw-Hill.
- Bronson, R., & Costa, G., 2007, *Persamaan Differensial*, Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Leon, S. J., 2001, *Aljabar Linier dan Aplikasinya (Ke-Lima ed.)*, Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Luenberger, D. G., 1979, *Introduction to Dynamic Systems Theory, Model and Applications*, New York: John Wiley & Sons.
- Lynch, S., 2014, *Dynamical Systems with Applications using MATLAB Second Edition*, New York: Birkhauser.
- Ogata, K., 2004, *System Dynamics Fourth Edition*, New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Olsder, G., 2003, *Mathematical Systems Theory Second Edition*, Delft: Delft University Press.

- Palm, W. J., 2000, *Modelling, Analysis, and Control of Dynamic Systems III*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Purcell, E. J., & Varberg, D., 2005, *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid I Edisi Keempat*, Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Smith, R. T., 2002, *Calculus Multivariable (2nd Edition ed.)*, New York: Mc Graw Hill.
- Susanta, B., 2008, *Pemodelan Matematis*, Jakarta: Universitas Terbuka.
- Widodo, R. J., 2008, *Sistem Kendali Dengan Format Vektor Matriks*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Williams II, R. L., & Lawrance, D. A., 2007, *Linear State-Space Control Systems*, Canada: John Wiley & Sons, Inc.

LAMPIRAN A

SOURCE-CODE PROGRAM / M-File

1.1 Program 1 : Aturan Cramer

```
1 %Aturan Cramer
2 %Program 1
3 display('Aturan Cramer')
4 display('_____')
5 display('_____')
6 P_Star=[0 2*-247.475 0 2*1878.780 0 0 0 0 0 0;
7         1 -2.247 0 17.058 -247.474 0 1878.780 0 0 0;
8         0 247.475 0 -19286.672 0 -247.475 0 0 1878.780 0;
9         0 2.247 1 -17.058 0 0 -247.475 0 0 1878.780;
10        0 2 0 0 2*-2.247 0 2*17.058 0 0 0;
11        0 0 1 0 247.475 -2.247 -19286.672 0 17.058 0;
12        0 0 0 1 2.247 1 -17.058-2.247 0 0 17.058;
13        0 0 0 0 0 2*247.475 0 0 2*-19286.672 0;
14        0 0 0 0 0 2.247 247.475 1 -17.058 -19286.671;
15        0 0 0 0 0 0 2*2.247 0 2 -2*17.058];
16 Q=[-1;0;0;0;-1;0;0;-1;0;-1];
17 P_Star1=P_Star; P_Star2=P_Star; P_Star3=P_Star; P_Star4=P_Star;
18 P_Star5=P_Star; P_Star6=P_Star; P_Star7=P_Star; P_Star8=P_Star;
19 P_Star9=P_Star; P_Star10=P_Star;
20 P_Star1(:,1)=Q;
21 P_Star2(:,2)=Q;
22 P_Star3(:,3)=Q;
23 P_Star4(:,4)=Q;
24 P_Star5(:,5)=Q;
25 P_Star6(:,6)=Q;
26 P_Star7(:,7)=Q;
27 P_Star8(:,8)=Q;
28 P_Star9(:,9)=Q;
29 P_Star10(:,10)=Q;
30 display('p11=det(P_Star1)/det(P_Star)')
```

```

31 p11=det(P_Star1)/det(P_Star)
32 display('p12=det(P_Star2)/det(P_Star)')
33 p12=det(P_Star2)/det(P_Star)
34 display('p13=det(P_Star3)/det(P_Star)')
35 p13=det(P_Star3)/det(P_Star)
36 display('p14=det(P_Star4)/det(P_Star)')
37 p14=det(P_Star4)/det(P_Star)
38 display('p22=det(P_Star5)/det(P_Star)')
39 p22=det(P_Star5)/det(P_Star)
40 display('p23=det(P_Star6)/det(P_Star)')
41 p23=det(P_Star6)/det(P_Star)
42 display('p24=det(P_Star7)/det(P_Star)')
43 p24=det(P_Star7)/det(P_Star)
44 display('p33=det(P_Star8)/det(P_Star)')
45 p33=det(P_Star8)/det(P_Star)
46 display('p34=det(P_Star9)/det(P_Star)')
47 p34=det(P_Star9)/det(P_Star)
48 display('p44=det(P_Star10)/det(P_Star)')
49 p44=det(P_Star10)/det(P_Star)
50 P=[p11 p12 p13 p14;p12 p22 p23 p24;
51     p13 p23 p33 p34;p14 p24 p34 p44]

```

1.2 Program 2 : Osilasi $t = 0$

```

1 %program 2
2 %SISTEM MOBIL SUSPENSI SEPEREMPAT KENDARAAN
3 %kestabilan sistem pada saat t=0, x0=[0;0;0;0]
4 m1=42.757;
5 m2=5.632;
6 c=96.073;
7 k1=10581.292;
8 k2=98041.246;
9 A=[0 1 0 0;-(k1/m1) -(c/m1) k1/m1 c/m1;0 0 0 1;k1/m2 c/m2 -
10     ((k1/m2)+(k2/m2)) -(c/m2)]; %Define the staespace model
11 B=[0;0;0;k2/m2];

```

```

12 C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
13 D=[0];
14 seperempat=ss(A,B,C,D);
15 seperempatss=ss(seperempat)
16 t=[0:0.001:1];
17 U=[zeros(size(t))];
18 x0=[0;0;0;0];
19 CharPoly=poly(A);
20 Poles=roots(CharPoly);
21 E=eig(A)
22 damp(A);
23 [Yo,t,Xo]=lsim(seperempat,U,t,x0);
24 Xo(1,:);
25 figure
26 subplot(211),plot(t,Yo(:,1),'b*');grid;
27 set(gca,'FontSize',18)
28 ylabel('output y_1(sprung)')
29 subplot(212),plot(t,Yo(:,2),'r*');grid;
30 set(gca,'FontSize',18)
31 ylabel('output y_2(unsprung)')
32 xlabel('output sprung dan unsprung terhadap waktu t (detik)dengan
33 keadaan awal x_0=[0;0;0;0]')
34 if(real(E(1))==0 | real(E(2))==0 | real(E(3))==0 | real(E(4))==0)
35     %lyapunov will fail
36     if (real(Poles(1))<=0 | real(Poles(2))<=0 | real(Poles(3))<=0
37         | real(Poles(4))<=0)
38         disp('system is marginally stabil')
39     else
40         disp('system is unstable.')
41     end
42 else
43     Q=eye(4)
44     P=lyap(A',Q)
45     pm1=det(P(1,1))
46     pm2=det(P(1:2,1:2))
47     pm3=det(P(1:3,1:3))
48     pm4=det(P(1:4,1:4))
49     if (pm1>0 &pm2>0 &pm3>0 &pm4>0)
50         disp('asimtotik stabil')
51     else
52         disp('unstabil')
53     end
54 end

```

1.3 Program 3 : Osilasi $t = 1, x(t_0) = [5; 0; 5; 0]$

```

1  %Program 3
2  %SISTEM MOBIL SUSPensi
3  %SISTEM MOBIL SUSPensi SEPEREMPAT KENDARAAN
4  %kestabilan SISTEM PADA SAAT t=1, x0=[5;0;5;0]
5  m1=42.757;
6  m2=5.632;
7  c=96.073;
8  k1=10581.292;
9  k2=98041.246;
10 A=[0 1 0 0;-(k1/m1) -(c/m1) k1/m1 c/m1;0 0 0 1;k1/m2 c/m2 -
11     ((k1/m2)+(k2/m2)) -(c/m2)]; %Define the staespace model
12 B=[0;0;0;k2/m2];
13 C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
14 D=[0];
15 seperempat=ss(A,B,C,D);
16 seperempatss=ss(seperempat)
17 t=[0:0.001:1];
18 U=[zeros(size(t))];
19 x0=[5;0;5;0];
20 CharPoly=poly(A);
21 Poles=roots(CharPoly);
22 E=eig(A)
23 damp(A);
24 [Yo,t,Xo]=lsim(seperempat,U,t,x0);
25 Xo(1,:);
26 figure
27 subplot(211),plot(t,Yo(:,1),'b*');grid;
28 set(gca,'FontSize',18)
29 ylabel('output y_1(sprung)')
30 subplot(212),plot(t,Yo(:,2),'r*');grid;
31 set(gca,'FontSize',18)
32 ylabel('output y_2(unsprung)')
33 xlabel('output sprung dan unsprung terhadap waktu t=1(detik)dengan
34 keadaan awal x_0=[5;0;5;0]')
35 if(real(E(1))==0 | real(E(2))==0 | real(E(3))==0
36     | real(E(4))==0)%lyapunov will fail

```

```

37     if (real(Poles(1))<=0 | real(Poles(2))<=0
38         ||real(Poles(3))<=0|real(Poles(4))<=0)
39         disp('system is marginally stabel')
40     else
41         disp('system is unstable.')
42     end
43 else
44     Q=eye(4)
45     P=lyap(A',Q)
46     pm1=det(P(1,1))
47     pm2=det(P(1:2,1:2))
48     pm3=det(P(1:3,1:3))
49     pm4=det(P(1:4,1:4))
50     if (pm1>0 &pm2>0 &pm3>0 &pm4>0)
51         disp('asimtotik stabil')
52     else
53         disp('unstabel')
54     end
55 end

```

1.4 Program 4 : Osilasi $t = 6, x(t_0) = [5; 0; 5; 0]$

```

1  %PROGRAM 4
2  %SISTEM MOBIL SUSPensi
3  %SISTEM MOBIL SUSPensi SEPEREMPAT KENDARAAN
4  %kestabilan SISTEM PADA SAAT t=6, x0=[5;0;5;0]
5  m1=42.757;
6  m2=5.632;
7  c=96.073;
8  k1=10581.292;
9  k2=98041.246;
10 A=[0 1 0 0;-(k1/m1) -(c/m1) k1/m1 c/m1;0 0 1;k1/m2 c/m2 -

```

```

11      ((k1/m2)+(k2/m2)) -(c/m2)]; %Define the staespace model
12 B=[0;0;0;k2/m2];
13 C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
14 D=[0];
15 seperempat=ss(A,B,C,D);
16 seperempatss=ss(seperempat)
17 t=[0:0.001:6];
18 U=[zeros(size(t))];
19 x0=[5;0;5;0];
20 CharPoly=poly(A);
21 Poles=roots(CharPoly);
22 E=eig(A)
23 damp(A);
24 [Yo,t,Xo]=lsim(seperempat,U,t,x0);
25 Xo(1,:);
26 figure
27 subplot(211),plot(t,Yo(:,1),'b*');grid;
28 set(gca,'FontSize',18)
29 ylabel('output y_1(sprung)')
30 subplot(212),plot(t,Yo(:,2),'r*');grid;
31 set(gca,'FontSize',18)
32 ylabel('output y_2(unsprung)')
33 xlabel('output sprung dan unsprung terhadap waktu t=6(detik)dengan
34 keadaan awal x_0=[5;0;5;0]')
35 if(real(E(1))==0 | real(E(2))==0 | real(E(3))==0 | real(E(4))==0)
36     %lyapunov will fail
37     if (real(Poles(1))<=0 | real(Poles(2))<=0 | real(Poles(3))<=0
38         |real(Poles(4))<=0)
39         disp('system is marginally stabil')
40     else
41         disp('system is unstable.')
42     end
43 else
44     Q=eye(4)
45     P=lyap(A',Q)
46     pm1=det(P(1,1))
47     pm2=det(P(1:2,1:2))
48     pm3=det(P(1:3,1:3))
49     pm4=det(P(1:4,1:4))
50     if (pm1>0 &pm2>0 &pm3>0 &pm4>0)
51         disp('asimtotik stabil')
52     else
53         disp('unstabil')
54     end
55 end

```