PERMAINAN DINAMIS LINEAR KUADRATIK BERJUMLAH NOL LINGKAR TERTUTUP SISTEM DESKRIPTOR DAN APLIKASINYA DALAM STABILISASI KEBIJAKAN FISKAL

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si.
Jurusan Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
email: mwakhid_m@yahoo.com

Abstrak

Dalam makalah ini dibahas syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup dari suatu permainan dinamis linear kuadratik berjumlah nol dengan struktur informasi lingkar tertutup untuk sistem deskriptor. Metode untuk mencari solusi keseimbangan titik pelana tersebut adalah dengan mentransformasi permainan dinamis sistem deskriptor menjadi permainan dinamis sistem biasa (sistem nonsingular) yang tereduksi dengan menggunakan bentuk kanonik Weierstrass. Setelah tertransformasi menjadi permainan dinamis sistem biasa, berikutnya akan diturunkan syarat perlu dan cukup keberadaan keseimbangan titik pelana lingkar tertutup dengan memanfaatkan hasil-hasil yang telah diperoleh pada sistem nonsingular. Selanjutnya permainan dinamis linear kuadratik berjumlah nol tersebut akan diaplikasikan untuk mendesain stabilisasi kebijakan fiskal suatu negara yang tergabung dalam sebuah persekutuan dengan negara-negara yang lain dalam suatu ikatan kerja sama. Hasil desain kebijakan fiskal merekomendasikan kepada otoritas pengambil kebijakan fiskal untuk secepat mungkin bereaksi terhadap segala gangguan fiskal dan menerapkan kebijakan ofensif.

Kata Kunci: *permainan dinamis linear kuadratik berjumlah nol; struktur informasi lingkar tertutup; sistem deskriptor; stabilisasi kebijakan fiskal.*

A. PENDAHULUAN

Permainan dinamis adalah sebuah model matematika yang merepresentasikan suatu konflik diantara berbagai pihak yang mengendalikan suatu sistem dinamik dan masing-masing pihak berusaha meminimalkan fungsi ongkos mereka dengan memberikan sebuah kendali pada sistem dinamik tersebut. Pihak yang dimaksud dalam hal ini dapat berupa dapat berupa orang, organisasi maupun pemerintah. Beberapa subyek kajian yang menerapkan konsep permainan dinamis diantaranya adalah persaingan antar perusahaan, ilmu marketing, desain strategi perang, beberapa topik dalam manajemen sains (Haurie dan Krwaczyk 2000).

Makalah ini mengkaji sebuah metode untuk mencari syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup dari suatu permainan dinamis linear kuadratik berjumlah nol dengan struktur informasi lingkar tertutup untuk sistem deskriptor. Studi tentang permainan dinamis untuk sistem deskriptor pertama kali dipublikasikan oleh Gardner dan Cruz (1978). Mereka berdua meneliti sifat well-posedness pada keseimbangan Nash lingkar tertutup dengan keberadaan perturbasi pada sistem. Berikutnya, kajian pada sistem informasi lingkar terbuka dilakukan oleh Engwerda dan Salmah (2009) sedangkan pada sistem informasi lingkar tertutup dilakukan oleh Xu and Mizukami (1993, 1994a,b) and (Engwerda and Salmah 2012).

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika pada tanggal 12 Desember 2015 di Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Mmuhammadiyah Purwokerto

Dalam semua referensi tersebut pencarian solusi keseimbangan dilakukan secara langsung tanpa melalui metode transformasi.

Berbeda dengan metode yang telah ada sebelumnya, metode yang disajikan dalam makalah ini adalah menggunakan transformasi untuk merubah permainan dinamis dari sistem deskriptor ke sistem nonsinggular. Manfaat terbesar yang didapat melalui metode ini adalah bahwa semua konsep dan teori yang telah berlaku pada sistem nonsingular juga berlaku pada sistem deskriptor setelah ditransformasi.

Sistem deskriptor adalah generalisasi dari sistem biasa (sistem nonsingular). Sistem ini memuat persamaan diferensial dan sekaligus persamaan aljabar. Banyak permasalahan yang disajikan dalam sistem ini, diantaranya adalah proses-proses kimia (Kumar dan Dauotidis 1996), sistem sirkuit listrik (Newcomb 1981, Newcomb dan Dziurla 1989), sistem ekonomi (Luenberger 1977), interkoneksi antar sistem berskala besar (Luenberger dan Arbel 1977, Singh dan Liu 1973), sistem pada teknik mesin (Hemami dan Wyman 1979), sistem pembangkit daya (Scott 1979) dan sistem robot (Mills dan Goldenberg 1989).

Makalah ini disajikan dengan runtutan alur sebagai berikut. Setelah pendahuluan, bagian kedua dari makalah ini menyajikan formulasi masalah yang ingin diselesaikan yang diikuti dengan memaparkan metode yang dipilih dan diakhiri dengan menyajikan teorema syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup dari suatu permainan dinamis sistem deskriptor. Selanjutnya bagian ketiga mengaplikasikan teorema yang telah dikonstruksikan pada masalah stabilisasi kebijakan fiskal antara dua negara.

B. PEMBAHASAN

B.1. Formulasi Masalah

Permainan dinamis yang dibahas dalam makalah ini adalah permainan dinamis yang didefinisikan pada sistem deskriptor

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u_1(t) + B_2u_2(t), \quad x(0) = x_0 . \tag{1}$$

Pemain pertama berkeinginan untuk meminimalkan fungsi ongkos yang berbentuk kuadratik

$$J(u_1,u_2) = \int_0^\infty \left[x^T(t)\bar{Q}x(t) + u^T(t)\bar{R}_1u_1(t) - w^T(t)\bar{R}_2u_2(t) \right] dt . \tag{2}$$

Sedangkan pemain kedua berkeinginan untuk meminimalkan fungsi ongkos $-J(u_1,u_2)$ dengan matriks-matriks $E, A \in \mathrm{R}^{(n+r)\times(n+r)}$, $\mathrm{rank}(E) = n$, $B_i \in \mathrm{R}^{(n+r)\times m_i}$, $u_i \in \mathcal{U}_s \subseteq \mathrm{R}^{m_i}$, dan $i = 1,2$.

Dalam struktur informasi lingkar tertutup, diasumsikan masing-masing pemain memberikan kendali pada sistem dalam bentuk kendali linear umpan balik yang dinyatakan dengan

$$u_i(t) = F_i x(t), \quad i = 1,2 , \tag{3}$$

dengan F_i adalah matriks kendali umpan balik untuk sistem (1). Lebih lanjut, kendali umpan balik F_i dibatasi pada kendali yang menstabilkan sistem untuk semua nilai awal yang konsisten, yaitu matriks $F = \begin{bmatrix} F_I^T & F_2^T \end{bmatrix}^T$ berada dalam himpunan

$$\mathcal{F} := \left\{ F \,\middle|\, \text{semua nilai eigen} \left(E, A + BF\right) \text{ stabil dan } \left(E, A + BF\right) \text{berindeks satu} \right\}. \tag{4}$$

Untuk permainan dinamis (1,2) di atas, ingin dicari solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1. (Basar, Olsder [1999]) *Himpunan kendali yang diperkenankan*[1] $\left(u_1^*, u_2^*\right)$ *disebut keseimbangan titik pelana untuk dua pemain, dimana pemain pertama memiliki fungsi ongkos* $J\left(u_1, u_2\right)$ *dan pemain kedua* $-J\left(u_1, u_2\right)$, *jika setiap kendali* $\left(u_1, u_2^*\right), \left(u_1^*, u_2\right) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_s$ *memenuhi ketaksamaan berikut*

$$J\left(u_1^*, u_2\right) \le J\left(u_1^*, u_2^*\right) \le J\left(u_1, u_2^*\right). \tag{5}$$

Masalah yang ingin diselesaikan dalam makalah ini adalah mencari syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (1,2) . Berikutnya, jika solusi tersebut ada maka akan dikarakterisasi himpunan $\left(u_1, u_2\right) \in \mathcal{U}_s \times \mathcal{U}_s$ yang memenuhi solusi tersebut. Selanjutnya, konstruksi solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis yang telah diturunkan akan digunakan untuk mendesain strategi kebijakan fiskal pada suatu negara yang tergabung dalam sebuah persekutuan dengan negara-negara yang lain dalam suatu ikatan kerja sama.

B.2. Transformasi Permainan Dinamis Sistem Deskriptor ke Sistem Nonsingular

Ide untuk mendapatkan solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup untuk permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) adalah dengan mentransformasi permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) ke dalam permainan dinamis sistem biasa (sistem nonsingular). Berikut diberikan teorema dan lemma yang diperlukan untuk mencapai tujuan tersebut.

Teorema 1. (Gantmacher, [1959]) *Jika sistem deskriptor (1) regular maka terdapat dua matriks nonsingular* $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}$ *dan* $Y = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}$ *sedemikian sehingga*

$$Y^T E X = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \text{ dan } Y^T A X = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \tag{6}$$

dengan A_1 *adalah matriks dalam bentuk Jordan yang elemen-elemennya nilai-nilai eigen dari* A, I_k *adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan.*

Lemma 1. (Engwerda et al, [2009]) *Asumsikan pasangan matriks* $\left(E, A + BF\right)$ *regular dan memiliki indeks satu. Maka untuk semua* $F \in F$, *matriks* $G := I + \begin{bmatrix} B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} F X_2$ *invertibel.*

Lemma 2. (De Carlo, Seeks, [1981]) *Asumsikan* $C \in \mathrm{R}^{n \times m}$ *dan* $D \in \mathrm{R}^{m \times n}$. *Maka, dua hal berikut dipenuhi:*

1. *Matriks* $I_n + CD$ *invertibel jika dan hanya jika matriks* $I_m + DC$ *invertibel.*
2. *Jika matriks* $I_n + CD$ *invertibel maka matriks* $C\left(I_m + DC\right)^{-1} = \left(I_n + CD\right)^{-1} C$.

[1] Sebuah kendali disebut diperkenankan (admissible) jika kendali tersebut mampu menstabilkan sistem yang dikendalikan.

Dengan menggunakan bentuk kanonik Weierstrass (Gantmacher [1959]), diperoleh terdapat dua matriks nonsingular X dan Y sedemikian sehingga bentuk persamaan (6) dipenuhi. Kemudian dengan mendefinisikan variabel state $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := X^{-1}x(t)$ dengan $x_1(t) \in \mathrm{R}^n$ dan $x_2(t) \in \mathrm{R}^r$ maka permainan dinamis (1,2) mempunyai keseimbangan titik pelana lingkar tertutup $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ jika dan hanya jika $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ merupakan keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis yang didefinisikan pada sistem dinamik

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + Y^T B_1 u_1(t) + Y^T B_2 u_2(t),$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x_0, \tag{7}$$

dengan fungsi ongkos kuadratik untuk pemain pertama diberikan oleh persamaan

$$J(u_1, u_2) = \int_0^\infty \left[\begin{bmatrix} x_1^T(t) & x_2^T(t) \end{bmatrix} X^T \bar{Q} X \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + u_1^T(t)\bar{R}_1 u_1(t) - u_2^T(t)\bar{R}_2 u_2(t) \right] dt. \tag{8}$$

Dari persamaan (7) dan berdasarkan Lemma 1 maka bentuk substate $x_2(t)$ menjadi

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} Y^T \left(B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t)\right) \\ &= -\begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} Y^T \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{9}$$

Setelah beberapa langkah penyederhanaan dilakukan pada persamaan (9) didapat

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\left(I + \begin{bmatrix} B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} F X_2\right)^{-1} \begin{bmatrix} B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} F X_1 x_1(t) \\ &=: H x_1(t). \end{aligned} \tag{10}$$

Substitusikan persamaan (10) ke dalam permainan dinamis (7,8) didapat bahwa $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (1,2) jika dan hanya jika $\left(u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis

$$\dot{x}_1(t) = \left(A_1 + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix} \right) x_1(t),$$

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} X^{-1} x_0, \tag{11}$$

dengan fungsi ongkos bagi pemain pertama diberikan oleh persamaan

$$J\left(F_1(t),F_2(t)\right)=\int_0^\infty\left\{\begin{bmatrix}x_1^T(t) & x_1^T(t)H^T\end{bmatrix}X^T\bar{Q}X\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_1(t)H\end{bmatrix}\right.$$
$$+\begin{bmatrix}x_1^T(t) & x_1^T(t)H^T\end{bmatrix}X^TF_1^T(t)\bar{R}_1F_1(t)X\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_1(t)H\end{bmatrix}$$
$$\left.-\begin{bmatrix}x_1^T(t) & x_1^T(t)H^T\end{bmatrix}X^TF_2^T(t)\bar{R}_2F_2(t)X\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_1(t)H\end{bmatrix}\right\}dt$$

yang ekuivalen dengan

$$J\left(F_1(t),F_2(t)\right)=\int_0^\infty\left\{x_1^T(t)\begin{bmatrix}I & H^T\end{bmatrix}X^T\begin{bmatrix}I & F_1^T(t) & F_2^T(t)\end{bmatrix}\right.$$
$$\left.\times\begin{bmatrix}\bar{Q} & 0 & 0\\ 0 & \bar{R}_1 & 0\\ 0 & 0 & -\bar{R}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ F_1(t)\\ F_2(t)\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}I\\ H\end{bmatrix}x_1(t)\right\}dt. \tag{12}$$

Selanjutnya didefinisikan notasi

$$\tilde{F}_i := F_iX\begin{bmatrix}I\\ H\end{bmatrix}, \tag{13}$$

maka permainan dinamis (11,12) dapat disajikan dalam bentuk

$$\dot{x}_1(t)=\left(A_1+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{21}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{F}_1\\ \tilde{F}_2\end{bmatrix}\right)x_1(t),\quad x_1(0)=\begin{bmatrix}I & 0\end{bmatrix}X^{-1}x_0 \tag{14}$$

dan

$$J\left(\tilde{F}_1(t),\tilde{F}_2(t)\right)=\int_0^\infty\left\{x_1^T(t)\left[\begin{bmatrix}I & H^T\end{bmatrix}X^T \quad \tilde{F}_1^T(t) \quad \tilde{F}_2^T(t)\right]\right.$$
$$\left.\times\begin{bmatrix}\bar{Q} & 0 & 0\\ 0 & \bar{R}_1 & 0\\ 0 & 0 & -\bar{R}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\begin{bmatrix}I\\ H\end{bmatrix}\\ \tilde{F}_1(t)\\ \tilde{F}_2(t)\end{bmatrix}x_1(t)\right\}dt. \tag{15}$$

Selanjutnya, berdasarkan Lemma 2,

$$\begin{aligned}H&=-\left(I+\begin{bmatrix}B_{12} & B_{22}\end{bmatrix}FX_2\right)^{-1}\begin{bmatrix}B_{12} & B_{22}\end{bmatrix}FX_1\\ &=-\begin{bmatrix}B_{12} & B_{22}\end{bmatrix}F\left(I+X_2\begin{bmatrix}B_{12} & B_{22}\end{bmatrix}F\right)^{-1}X_1\\ &=\left(B_{12}\tilde{F}_1+B_{22}\tilde{F}_2\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Menggunakan hasil (16) maka didapat bahwa $\left(F_1^*, F_2^*\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (11,12) jika dan hanya jika $\left(\tilde{F}_1^*, \tilde{F}_2^*\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (14) dengan fungsi ongkos bagi pemain pertama

$$J\left(\tilde{F}_1(t), \tilde{F}_2(t)\right) = \int_0^\infty \left\{ x_1^T(t) \begin{bmatrix} I & \tilde{F}_1^T(t) & \tilde{F}_2^T(t) \end{bmatrix} \tilde{M} \begin{bmatrix} I \\ \tilde{F}_1(t) \\ \tilde{F}_2(t) \end{bmatrix} x_1(t) \right\} dt \qquad (17)$$

dengan

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{Q} & \tilde{V} & \tilde{W} \\ \tilde{V}^T & \tilde{R}_{11} & \tilde{N} \\ \tilde{W}^T & \tilde{N}^T & \tilde{R}_{22} \end{bmatrix}$$

dan

$\tilde{Q} := X_1^T \bar{Q} X_I$, $\quad \tilde{N} := B_{12}^T X_2^T \bar{Q} X_2 B_{22}$ $\quad \tilde{V} := -X_1^T \bar{Q} X_2 B_{12}$

$\tilde{R}_{11} := B_{12}^T X_2^T \bar{Q} X_2 B_{12} \bar{R}_1$, $\quad \tilde{W} := -X_1^T \bar{Q} X_2 B_{22}$, $\quad \tilde{R}_{22\gamma} := B_{22}^T X_2^T \bar{Q} X_2 B_{22} - \bar{R}_2$.

Dengan demikian telah ditunjukkan ekuivalensi permainan dinamis sistem deskriptor (1,2) dengan permainan dinamis sistem nonsingular (tereduksi) (14,17).

Selanjutnya, hasil transformasi di atas akan digunakan untuk menentukan syarat perlu dan cukup keberadaan keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (14,17). Berikut diberikan teorema yang menyajikan hal tersebut.

Teorema 2. Diberikan permainan dinamis linear kuadratik berjumlah nol lingkar tertutup untuk sistem deskriptor (14,17) dengan $x_0 \in \mathrm{R}^n$ adalah sembarang nilai awal yang konsisten. Diasumsikan sistem dapat distabilkan dan pasangan matriks $\left(A_1, \tilde{Q}^{\frac{1}{2}}\right)$ terdeteksi. Maka, permainan dinamis (14,17) mempunyai solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup jika dan hanya jika persamaan aljabar Riccati berikut

$$A_1^T K + KA + \tilde{Q} - \begin{bmatrix} \tilde{V} + KB_{11} & \tilde{W} + KB_{21} \end{bmatrix} \tilde{G}_\gamma^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{V} + KB_{11} & -\left(\tilde{W} + KB_{21}\right) \end{bmatrix}^T = 0 \qquad (18)$$

mempunyai solusi semi-definit positif yang menstabilkan K^+. Lebih lanjut, bentuk keseimbangan titik pelana lingkar tertutup diberikan oleh persamaan

$$F_i^* = \tilde{F}_i^* O^+ + Z_i \left(I - OO^+\right), \qquad (19)$$

dengan $Z_i \in \mathrm{R}^{m_i \times n}$, $O = X \begin{bmatrix} I \\ -B_{12}\tilde{F}_1^* - B_{22}\tilde{F}_2^* \end{bmatrix}$ dan $\left(\tilde{F}_1^*, \tilde{F}_2^*\right)$ diberikan oleh

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_1^* \\ \tilde{F}_2^* \end{bmatrix} = -\tilde{G}_\gamma^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}^T K_\gamma^+ + \tilde{V}^T \\ -B_{21}^T K_\gamma^+ - \tilde{W}^T \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Dalam hal solusi keseimbangan titik pelana tersebut ada, maka nilai dari permainan dinamis (14,17) diberikan oleh persamaan

$$L_\gamma^{\infty *} = x_0^T X^{-T} \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}^T \bar{K}_\gamma^+ \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} X^{-1} x_0 .$$

Bukti:

Berdasarkan bentuk (19) dan (20), dapat dibuktikan bahwa $\left(\tilde{F}_1^*, \tilde{F}_2^*\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (1,2) untuk setiap nilai awal jika dan hanya jika $\left(F_1^*, F_2^*\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (14,17). Lebih lanjut, $\left(F_1^*, F_2^*\right)$ adalah penyelesaian dari persamaan $\tilde{F}_i := F_i X \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix}$. Sehingga solusi dari permainan dinamis (14,17) dikarakterisasi oleh persamaan (19). Selanjutnya, berdasarkan Teorema 8.5 pada Engwerda (2005) terbukti bahwa $\left(F_1^*, F_2^*\right)$ adalah keseimbangan titik pelana lingkar tertutup bagi permainan dinamis (14,17) jika dan hanya jika K^+ adalah solusi yang menstabilkan bagi persamaan aljabar Riccati (18).

B.3. Aplikasi Permainan Dinamis pada Stabilisasi Kebijakan Fiskal

Diberikan permainan dinamis antara dua otoritas fiskal suatu negara yang merepresentasikan interaksi kebijakan stabilisasi fiskal dalam kondisi dalam dua negara tersebut telah diberlakukan secara penuh penerapan *Economic and Monetary Union* (EMU) (Engwerda 2002). EMU adalah kesepakatan antar negara anggotanya untuk mengatur regulasi kebijakan ekonomi dan fiskal secara bersama-sama yang dimplementasikan dengan menyatukan mata uang antar negara anggotanya dan mendirikan bank sentral yang mengatur kebijakan fiskal mereka. Model matematika yang merepresentasikan perputaran ekonomi antara dua negara anggota EMU disajikan oleh persamaan-persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \phi_2 s(t) - \phi_1 f_1(t) + \phi_1 f_2(t) \\ y_1(t) &= bs(t) - ci^E(t) + af_1(t) + \frac{\rho}{k} af_2(t) \\ y_2(t) &= -bs(t) - ci^E(t) + \frac{\rho}{k} af_1(t) + af_2(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Variabel $s(t)$ mengukur nilai kompetisi negara satu dengan negara lainnya, $f_i(t),\ i=1,2$ adalah besarnya defisit fiskal riil yang dipatok oleh otoritas fiskal negara ke-*i*, $y_i(t),\ i=1,2$ menyatakan output real bagi negara ke-*i*, dan $i^E(t)$ adalah nominal suku bunga bersama. Kedua otoritas fiskal ingin menimimalkan fungsi kerugian bersama yang diasumsikan berbentuk kuadratik terhadap laju inflasi ($\dot{p}_i(t)$), output dan defisit fiskal

$$J^{\hat{F}_1} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\alpha \dot{p}_1^2(t) + \beta y_1^2(t) + \chi f_1^2(t)\right\} e^{-\theta t} dt \tag{22}$$

$$J^{\hat{F}_2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{\alpha \dot{p}_2^2(t) + \beta y_2^2(t) + \chi f_2^2(t)\right\} e^{-\theta t} dt .$$

Nilai θ menyatakan laju penyesuaian waktu dan α, β, χ merepresentasikan preferensi bobot yang dipilih untuk menstabilkan secara berturut-turut inflasi, output dan defisit fiskal.

Selanjutnya, dengan mendefinisikan variabel state yang baru $x^T(t) := e^{-\frac{1}{2}\theta t}\begin{bmatrix} s(t) & i^E(t) & y_1(t) & y_2(t)\end{bmatrix}^T$ dan variabel kendali baru $u_1(t) := e^{-\frac{1}{2}\theta t} f_1(t)$ dan $u_2(t) := e^{-\frac{1}{2}\theta t} f_2(t)$, maka masalah minimisasi fungsi kerugian bersama (22) yang terkait dengan sistem dinamik (21) dapat dinyatakan sebagai

$$\min_{u_i(t)} \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{ \begin{bmatrix} x^T(t) & u_1^T(t) & u_2^T(t)\end{bmatrix} M_\gamma \begin{bmatrix} x(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t)\end{bmatrix}\right\} dt \tag{23}$$

dengan kendala persamaan dinamis

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t),\ x(0) = 0 \tag{24}$$

dengan

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} \phi_2 - \frac{1}{2}\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\theta & 0 & 0 \\ b & -c & -1 & 0 \\ -b & -c & 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} -\phi_1 & \phi_1 \\ 0 & 0 \\ a & ra \\ ra & a \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} \phi_3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \text{and}$$

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} \mu b^2 & -\mu bc & \mu ab & r\mu ab \\ -\mu bc & \mu c^2 & -\mu ac & -r\mu ab \\ \mu ab & -\mu ac & \mu a^2 + \chi & r\mu a^2 \\ r\mu ab & -r\mu ab & r\mu a^2 & r^2 \mu a^2 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, dengan memilih dua matriks nonsingular

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & -c & -1 & 0 \\ -b & -c & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dapat didefinisikan variabel state tereduksi yang baru $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} := X^{-1}x(t)$. Kemudian, dengan mengasumsikan bahwa $u_1(t) = F_1 x(t)$ and $u_2(t) = F_2 x(t)$ maka masalah minimisasi fungsi kerugian bersama (21,22) dapat ditulis ulang sebagai

$$\min_{u_i(t)} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ x_1^T(t) \begin{bmatrix} I & \tilde{F}_1^T & \tilde{F}_3^T \end{bmatrix} \tilde{M}_\gamma \begin{bmatrix} I \\ \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix} x_1(t) \right\} e^{-\theta t} \, dt \tag{25}$$

dengan kendala persamaan dinamis

$$\dot{x}_1(t) = \left(A_1 + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{bmatrix} \right) x_1, \quad x_1(0) = 0 \tag{26}$$

dengan $\tilde{M}_\gamma = \begin{bmatrix} \mu b^2 & -\mu bc & \mu ab & r\mu ab \\ -\mu bc & \mu c^2 & -\mu ac & -r\mu ab \\ \mu ab & -\mu ac & \mu a^2 + \chi & r\mu a^2 \\ r\mu ab & -r\mu ab & r\mu a^2 & r^2 \mu a^2 \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{2\times 2} & \tilde{V}_{2\times 2} & \tilde{W}_{2\times 1} \\ \tilde{V}^T & \tilde{R}_{11_{2\times 2}} & \tilde{N}_{2\times 1} \\ \tilde{W}^T & \tilde{N}^T & \tilde{R}_{22_\gamma} \end{bmatrix}$ dan $A_1 = \begin{bmatrix} \phi_2 - \frac{1}{2}\theta & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\theta \end{bmatrix}$. Untuk mengestimasi parameter-parameter dalam model (21,22) diambil nilai-nilai yang digunakan oleh Engwerda et al, (2002) yaitu $a = 1.216$, $b = 0.154$, $c = 0.8$, $\varphi = 1$, $\mu = 5.125$, $r = 0.444$, $\chi = 2.5$, $\phi_1 = 0.192$, $\phi_2 = -0.077$, $\phi_3 = 1$, and $\theta = 0.15$. Dengan $K := \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$, substitusikan nilai-nilai parameter di atas ke dalam persamaan aljabar Riccati (18) didapat sistem persamaan aljabar nonlinear sebagai berikut

$$3.03 - 1.953k_{11} + 2.393k_{11}^2 - 2k_{11}^2\gamma = 0$$

$$129.70k_{11} - 1.05k_{12} + 2.39k_{11}k_{12} - 2k_{11}k_{12}\gamma = 0$$

$$1958.30 - 9.72k_{12} - 0.15k_{22} + 2.39k_{12}^2 - 2k_{12}^2\gamma = 0.$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan di atas didapat

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{1.95 - \sqrt{a}}{4.79 - 4\gamma} & \dfrac{b}{c} \\ \dfrac{b}{c} & 6.67\left(\dfrac{d}{c^2} - \dfrac{e}{c} + 1958.30 \right) \end{bmatrix}$$

dengan $a = -25.19 + 24.22\gamma$, $b = -253.05 + 129.69\sqrt{a}$, $c = \left(-0.35 - 2.39\sqrt{a}\right) + \left(0.3 - 2\sqrt{a}\right)\gamma$,

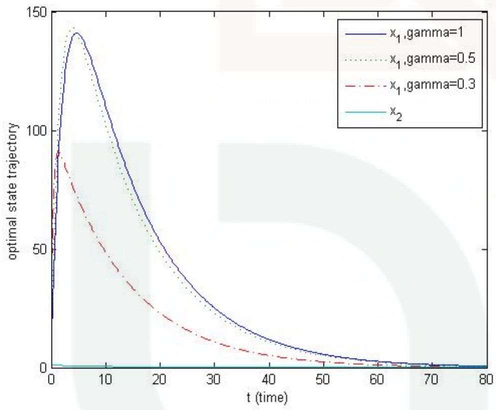
$d = 21795.97 - 12947.57\sqrt{a} - 6636.03a$ dan $e = 2459.92 - 1263.41\sqrt{a}$ sebagai solusi non-negatif dari persamaan aljabar Riccati (20). Selanjutnya, dengan melakukan beberapa proses perhitungan diperoleh matriks-matriks $\begin{bmatrix} \tilde{F}^*_{1\gamma_\varepsilon} \\ \tilde{F}^*_{2\gamma_\varepsilon} \end{bmatrix}$, O dan O^+ berturut-turut sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}^*_{1\gamma_\varepsilon} \\ \tilde{F}^*_{2\gamma_\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.959 & -2115.310 \\ 22.569 & -1654.924 \\ 0 & -129.697 \end{bmatrix}, \; O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -38.753 & 3336.730 \\ -39.473 & 3025.659 \end{bmatrix} \text{ dan } O^+ = \begin{bmatrix} 0.088 & 0.001 & 0.190 & -0.210 \\ 0.001 & 0 & 0.002 & -0.002 \end{bmatrix}$$

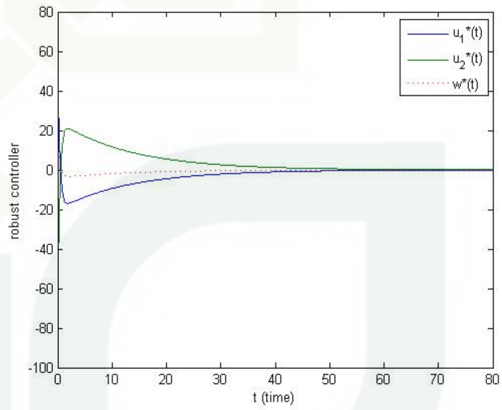
Masukkan matriks-matriks di atas ke dalam persamaan (19) memberikan desain kebijakan fiskal yang akan meminimalkan kerugian bersama kedua negara adalah

$$F^*_{1\gamma_\varepsilon} = \begin{bmatrix} -0.351 & -0.004 & -1.106 & 0.521 \\ 0.202 & 0.002 & 0.163 & -0.726 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.916 & -0.001 & -0.191 & 0.210 \\ -0.001 & 0.999 & -0.003 & 0.003 \\ -0.191 & -0.003 & 0.040 & -0.004 \\ 0.210 & 0.002 & -0.004 & 0.048 \end{bmatrix}.$$

Gambar 1 menyajikan trayektori optimal dari state $x_1^*(t)$ ketika otoritas kebijakan fiskal dua negara mengimplementasikan desain kebijakan fiskal di atas. Selanjutnya Gambar 2 menyajikan performa dari desain kebijakan fiskal yang dipilih dalam meminimalkan kerugian bersama dua negara tersebut.



Gambar 1. Trayektori optimal state $x_1^*(t)$



Gambar 2. Kebijakan fiskal $u^*(t)$

Berdasarkan kedua gambar di atas dapat disimpulkan bahwa hal terbaik yang harus dilakukan oleh otoritas fiskal kedua negara agar dapat meminimalkan kerugian fiskal adalah secepat mungkin bereaksi terhadap segala gangguan fiskal dan menerapkan kebijakan ofensif.

C. SIMPULAN

Dalam makalah ini telah disajikan sebuah metode baru untuk mencari syarat perlu dan cukup keberadaan solusi keseimbangan titik pelana lingkar tertutup dari suatu permainan dinamis linear kuadratik berjumlah nol dengan struktur informasi lingkar tertutup untuk sistem deskriptor, yaitu dengan mentransformasi permainan dinamis sistem deskriptor menjadi permainan dinamis sistem biasa (sistem nonsingular) yang tereduksi dengan memanfaatkan bentuk kanonik Weierstrass. Melalui metode baru ini diperoleh suatu kelebihan penting yaitu bahwa semua teori permainan dinamis yang berlaku pada sistem nonsingular juga berkalu pada sistem deskrirptor yang telah tereduksi. Selanjutnya kelebihan metode ini telah diaplikasikan dalam mendesain stabilisasi kebijakan fiskal negara anggota EMU.

Desain stabilisasi kebijakan fiskal yang disajikan masih belum mempertimbangkan faktor-faktor gangguan dan ketidakpastian yang mungkin muncul dalam sistem ekonomi negara tersebut. Oleh karena itu mendesain kebijakan fiskal yang mampu mengatasi faktor-faktor gangguan dan ketidakpastian yang mungkin muncul dalam sistem menjadi masalah terbuka yang dapat diteliti lebih lanjut.

D. DAFTAR PUSTAKA

Basar, T. dan Olsder, G. J.(1999). *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Academic Press SIAM, New York.

De Carlo, R.A. dan Saeks, R.(1981), *Interconected Dynamical Systems*, Marcel Dekker, New York, 1981.

Engwerda, J.C., (2005) *Linear Quadratic Dynamic Optimization and Differential Games*. John Wiley & Sons, West Sussex.

Engwerda, J. C., Aarle, B. v. dan Plasmans, J. E. J. 2002. Cooperative and non Coperative Fiscal Stabilisation Policies in the EMU, *Journal of Economic Dynamics and Control,* vol. 26, tahun 451 – 481.

Engwerda, J.C., Salmah, dan I.E. Wijayanti, 2009, The (multi-player) linear quadratic feedback state regulator problem for index one descriptor systems, *Proceedings European Control Conference (Budapest)*, tahun 2009.

Engwerda, J.C., Salmah, 2009, The open-loop linear quadratic differential game for index one descriptor systems, *Automatica*, vol. 45, tahun 2009, 585-592.

Engwerda, J.C., Salmah, 2012, Feedback Nash Equilibria for Linear Quadratic Descriptor Differential Games, *Automatica*, vol. 48, tahun 2012, 625-631.

Gantmacher, F., (1959) *Theory of Matrices*. vol II, Chelsea Publishing Company, New York.

Haurie, A., Krawczyk, J. dan Zaccour, G. 2012. *Games and Dynamic Games*, Vol. 1, World Scientific Publishing Company, Singapore.

Hemami, H. and Wyman, B. F., 1979, Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, tahun 1979, 526-535.

Kumar, A. and Daoutidis, P, 1996, State-Space Realizations of Linear Differential Algebraic-Equation Systems with Control-Dependent State Space, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, Tahun 1996, 269-274.

Luenberger, D. G., 1977, Dynamic Equation in Descriptor Form, *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 22, tahun 1977, 312-321.

Luenberger, D. G. and Arbel. 1977. *Singular Dynamic Leontief Systems*, pp 991-995.

Mills, J. K. and Goldenber, A. A., 1989, Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks, *IEEE Transactions on Robot Automatic*, vol. 5, tahun 1989, 30-46.

Newcomb, R. W., 1981, The Semistate Description of Nonlinear Time-Variable Circuits", *IEEE Transactions on Circuits Systems*, vol. 28, tahun 1981, 62-71.

Newcomb, R. W. dan Dziurla, B. 1989, Some Circuits and Systems Applications of Semistate Theory, *Circuits Systems Signal Processes*, vol. 8, tahun 1989, 235-260.

Scott, B., 1979, Power system Dynamic Response Calculations, *IEEE Proceeding*, vol. 67, tahun 1979, 219-247.

Singh, S. and Liu, R. W., 1973, Existence of State Equation Representation of Linear Large-Scale Dynamical Systems, *IEEE Transaction Circuits Systems*, vol. 20, tahun 1973, 239-246.

Xu, H. and Mizukami, K. 1993. Two-person two-criteria decision making problem for descriptor systems, *JOTA* 39, tahun 1993, 163 – 173.

Xu, H. and Mizukami, K. 1994a. Linear-quadratic zero-sum differential games for generalized state space systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39 tahun 1994.

Xu, H. and Mizukami, K. 1994b. On the isaacs equation of differential games for descriptor systems, *JOTA* vol. 83 tahun 1994.