ANALISIS KESTABILAN DAN DESAIN KENDALI OPTIMAL UNTUK MODEL PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN *EXOGENOUS REINFECTION*

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

Disusun Oleh :

Titin Lismawati
10610032

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA
2016

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Surat Persetujuan Skripsi
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Titin Lismawati
NIM	: 10610032
Judul Skripsi	: Aplikasi Kestabilan dan Desain Kendali Optimal Untuk Model Penyakit Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 3 Maret 2016

Pembimbing

M. Wakhid Musthofa, S.Si, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga **FM-UINSK-BM-05-07/R0**

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1630/2016

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul	:	Analisis Kestabilan dan Desain Kendali Optimal untuk Model Penyakit Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection* .
Yang dipersiapkan dan disusun oleh	:	
Nama	:	Titin Lismawati
NIM	:	10610032
Telah dimunaqasyahkan pada	:	5 April 2016
Nilai Munaqasyah	:	A -

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji I

Much. Abrori, S.Si, M.Kom
NIP.19720423 199903 1 003

Penguji II

Malahayati, M.Sc
NIP.19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 10 Mei 2016
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

Dr. Maizer Said Nahdi, M.Si
NIP. 19550427 198403 2 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Titin Lismawati

Nomor Induk Mahasiswa : 10610032

Fakultas : Sains dan Teknologi

Prodi/ Semester : Matematika/ X1I

Menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, dan atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian Tugas Akhir di Perguruan Tinggi lain, kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 22 Februari 2016

Mhs Pembuat Pernyataan

METERAI TEMPEL

6000

ENAM RIBU RUPIAH

Titin Lismawati

NIM. 10610032

MOTTO

“Jadilah seperti karang di lautan yang kuat dihantam ombak dan kerjakanlah hal yang bermanfaat untuk diri sendiri dan orang lain, karena hidup hanyalah sekali. Ingat hanya pada Allah apapun dan dimanapun kita berada kepada Dia-lah tempat meminta dan memohon.”

HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

KARYA TULIS INI SAYA PERSEMBAHKAN KEPADA :

Almamater tercinta Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga, Yogyakarta, Khususnya teman-temanku Matematika 2010.

Kedua Orang Tuaku Bapak Maman Suryaman, Ibu Tursiti Megawati, serta adik-adik ku Lilis Lisnawati, Deby Retnasari dan Annysa yang selalu memberikan doa dan memberi banyak nasehat dan pelajaran hidup yang tak ternilai harganya.

SEMOGA KARYA INI DAPAT BERMANFAAT BAGI SIAPAPUN, KAPANPUN DAN DIMANAPUN

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah, dengan memohon Ridha dari Allah SWT penulis mempersembahkan sepuluh jari semoga taufik dan hidayah-Nya selalu dilimpahkan kepada segenap insan yang selalu bertaqwa kepada-Nya dan semoga seluruh nikmat senantiasa mendatangkan keberkahan, aamiin. Bersholawat kita kepada Nabi Muhammad SAW dengan harapan semoga safaatnya dapat kita terima.

Penulisan skripsi ini ajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta. Judul yang penulis ajukan adalah "**Analisis Kestabilan dan Desain Kendali Optimal untuk Model Penyakit Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection***".

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa dalam Skripsi ini terdapat banyak sekali kekurangan baik dari segi penggunaan kata dan bahasa yang belum memenuhi kaidah yang tepat, maupun dari penelitian ini sendiri. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan bantuan, kritik, dan saran yang membangun dari berbagai pihak yang membaca skripsi ini.

Dalam menyelesaikan skripsi ini penulis cukup banyak mendapatkan bimbingan, pengarahan dan bantuan dari berbagai pihak baik secara moril maupun material. Oleh sebab itu penulis mengucapkan terima kasih kepada

1. Ibu Drs. Hj Maizer Said Nahdi M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Bapak Dr. M Wakhid Musthofa M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta dan selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membantu, memotivasi, membimbing serta mengarahkan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan
3. Bapak Muhammad Noor Saif Mussafi, M.Sc selaku Dosen Penasehat Akademik Program Studi Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Ibu Malahayati, M. Sc, selaku Dosen Penguji yang telah memberikan ilmu, kritik dan saran sehingga penulisan ini dapat terselesaikan.
5. Bapak Muchammad Abrori, S.Si, M.Kom selaku Dosen Penguji yang telah memberikan ilmu, kritik dansaran sehingga penulisan ini dapat terselesaikan.
6. Semua Staf Tata Usaha dan karyawan di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah membantu menyelesaikan perjalanan penulisan ini.
7. Keluargaku tersayang penuh cinta kasih Bapak, Ibu dan adik yang selalu memberikan motivasi, doa dan semangat kepada penulis yang begitu terasa manfaatnya.
8. Kepada teman-teman Matematika angkatan 2010, khususnya sahabatku Anita Dwi Purnomosari S.Mat, Teti Sulastri S.Mat dan Widyastutik yang selalu memberikan motivasi, bantuan, dan dorongan kepada penulis.

9. Serta semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu. Semoga Tuhan Yang Maha Esa membalas semua kebaikan yang telah kalian berikan kepada penulis.

Demikian Skripsi ini penulis susun, semoga dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis ucapkan syukur kepada Ilahi Rabbi semoga ilmu yang didapatkan mendatangkan makna dan manfaat dalam kehidupan siapapun kapanpun dan dimanapun, terima kasih.

Yogyakarta, Februari 2016

Penulis

ABSTRAK

Penyakit tuberkulosis adalah penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Mycobacterium Tuberkulosis (Mtb*). Model matematis kontrol epidemik tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection* sebagai permasalahan kendali optimal yang diselesaikan menggunakan metode langsung dengan mentransformasikan ke dalam bentuk kendali kuadratik. Kendali dalam penelitian ini terdiri dari kendali isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan yang bertujuan untuk meminimalkan jumlah individu tuberkulosis yang terinfeksi dan menular melalui penerapan pengendali optimal. Pada skripsi ini ditinjau dari dua keadaan R_0 (*Basic Reproduction Ratio*), dengan $R_0 > 1$ untuk kasus terjadinya endemik dan $R_0 < 1$ untuk kasus tidak terjadinya endemik.

Kata Kunci : Tuberkulosis, Kendali Optimal, *Exogenous Reinfection*, Model Tuberkulosis.

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL ..... **i**

HALAMAN PERSETUJUAN ..... **ii**

HALAMAN PENGESAHAN ..... **iii**

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN ..... **iv**

MOTTO ..... **v**

HALAMAN PERSEMBAHAN ..... **vi**

KATA PENGANTAR ..... **vii**

ABSTRAK ..... **x**

DAFTAR ISI ..... **xi**

DAFTAR GAMBAR ..... **xiii**

DAFTAR LAMBANG ..... **xiv**

BAB I PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang Masalah 1

1.2 Rumusan Masalah 3

1.3 Batasan Masalah 3

1.4 Tujuan Penelitian 3

1.5 Manfaat Penelitian 4

1.6 Tinjauan Pustaka 4

1.7 Metode Penelitian 5

1.8 Sistematika Penulisan 6

BAB II DASAR TEORI 8

2.1. Aljabar Linear 8
2.2. Persamaan Diferensial 16
2.3. Teori Sistem 18
2.4. Bilangan Reproduksi Dasar 26
2.5. Teori Kendali Optimal 29
2.6. Kalkulus Variasi 34
2.7. Prinsip Maksimum Pontryagin 36

BAB III ANALISIS KESTABILAN DAN DESAIN KENDALI OPTIMAL UNTUK MODEL PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN *EXOGENOUS REINFECTION* 40

3.1. Karakteristik Tuberkulosis 40
3.2. Proses Pemodelan 43
3.3. Formulasi Model Penyakit Tuberkulosis 43
3.4. Titik Ekuilibrium 49
3.4.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit 50
3.4.2. Ekuilibrium Endemik 56
3.5. Bilangan Reproduksi Dasar 69
3.6. Desain Kendali Optimal 74

BAB IV PENUTUP 92

4.1 Kesimpulan 92
4.2 Saran 93

DAFTAR PUSTAKA 94

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Alur Kendali Optimal 26

Gambar 3.1 *Mycobacterium Tuberculosis* 42

Gambar 3.2 Diagram Kompartemen Model Tuberkulosis..... 47

DAFTAR LAMBANG

$S(t)$ = Jumlah individu yang rentan terserang tuberkulosis pada saat t,

$E(t)$ = Jumlah individu yang laten (gejala belum terlihat) pada saat t,

$I(t)$ = Jumlah individu yang terinfeksi pada saat t,

$T(t)$ = Jumlah individu yang telah sembuh pada saat t,

$N(t)$ = Jumlah populasi pada saat t,

t = Waktu,

t_f = Wakyu akhir,

Λ = Banyaknya individu rentan yang dilahirkan per satuan waktu,

β = Laju transmisi penginfeksian tuberkulosis rentan ke individu tuberkulosis laten dan tuberkulosis aktif,

ρ = Proporsi menjadi individu tuberkulosis aktif (faktor *exogenous reinfection*) $0 \le \rho \le 1$,

$\rho\beta$ = Proposi rata-rata banyaknya individu tuberkulosis laten memperoleh infeksi baru dari satu individu tuberkulosis aktif per satuan waktu,

μ = Laju kematian alami,

d = Laju kematian individu tuberkulosis aktif,

k = Laju perubahan individu tuberkulosis laten menjadi individu tuberkulosis aktif,

r = Laju kesembuhan individu tuberkulosis aktif per satuan waktu,

c = Laju kontak per kapita,

σ = Proporsi individu tuberculosis aktif yang gagal dalam pengobatannya dan berubah menjadi individu tuberkulosis laten $0 \leq \sigma \leq 1$,

$\sigma\beta$ = Proporsi rata-rata banyaknya individu sembuh tuberkulosis yang terinfeksi tuberkulosis oleh satu individu tuberkulosis aktif per satuan waktu,

u_1 = Kendali isolasi,

u_2 = Daya tahan tubuh,

u_3 = Kendali pengobatan,

B_1 = Jumlah faktor yang mempengaruhi u_1,

B_2 = Jumlah faktor yang mempengaruhi u_2,

B_3 = Jumlah faktor yang mempengaruhi u_3,

R_0 = Bilangan reproduksi dasar,

x_0 = Titik ekuilibrium,

λ = Nilai eigen,

R = Himpunan vektor real,

R^n = Himpunan vektor real bernilai n,

$|.|$ = Determinan,

$\|.\|$ = Operator norm,

$\in$ = Elemen,

$\subset$ = Himpunan bagian,

H = Hamiltonian,

L = Lagrangian,

W = Pengali Lagrangian,

$\lambda(t)$ = Pengali Hamiltonian.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Tuberkulosis (TBC) adalah penyakit infeksi yang disebabkan oleh *Mycobacterium Tuberculosis*. Penyakit ini dapat menyebar dengan cepat melalui media udara dan menjadi pembunuh kedua di antara semua penyakit transmisi. Hal ini juga dianggap sebagai kelas ke tiga dalam daftar sepuluh penyakit pembunuh tertinggi di Indonesia (Manaf A, 2007 : 3). Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) data tahun 2009 menunjukkan bahwa jumlah total korban tuberkulosis di Indonesia mencapai 429.000 orang, dan terletak di posisi kelima di dunia setelah India, China, Afrika Selatan, dan Nigeria (Aditama T.Y, 2014 : 12). Oleh karena itu, tuberkulosis merupakan salah satu penyakit yang telah membesarkan masalah serius untuk waktu yang lama di Indonesia (Manaf A, 2007 : 5).

Penularan penyakit tuberkulosis terbilang unik jika dibandingkan dengan penyakit menular lainnya. Pada tuberkulosis penularan langsung dari penderita aktif kepada orang yang belum terinfeksi sebagian besar hanya mengakibatkan seseorang terjangkit bakteri *Mycobacteria Tuberculosis* tanpa menunjukkan gejala penyakit tuberkulosis. Pada kenyataannya, sebagian besar individu terinfeksi tuberkulosis tetap dalam tahap laten dan tidak pernah menjadi menular atau menunjukkan gejala tuberkulosis. Hal ini sejalan dengan pernyataan (Sunhwa Choi, 2009 : 143) yang mengatakan 30 % individu dalam kontak dengan pasien

tuberkulosis aktif akan terinfeksi (laten dan pasif), sedangkan 10% dari kelompok ini terinfeksi akan menjadi menular (aktif). Kemungkinan perkembangan tuberkulosis laten dan pasif menjadi aktif dan menular dapat dipercepat dari kontak berulang dengan orang yang mengidap tuberkulosis aktif dan menular. Akibatnya, sumber untuk kemajuan tuberkulosis tidak hanya infeksi primer, tetapi juga kemungkinan *exogenous reinfection*. *Exogenous reinfection* merupakan infeksi dari orang yang sudah memiliki bakteri *Mycobacteria Tuberculosis* (laten dan pasif) tapi menjadi terkena tuberkulosis dikarenakan infeksi ulang dari orang lain yang sedang terkena tuberkulosis aktif. Oleh karena itu, *exogenous reinfection* memiliki peranan penting dalam perkembangan serta penularan penyakit tuberkulosis. Mengetahui tingakat suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasanya digunakan adalah bilangan reproduksi dasar (R_0), bilangan reproduksi dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infektif sekunder akibat tertular individu infektif primer yang berlangsung dalam populasi. Bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai eigen dan matriks Jacobian yang dihitung pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Jika model memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekulibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik, maka tidak terjadi endemik $R_0 < 1$ dan terjadi endemik $R_0 > 1$.

Penelitian ini akan membahas tentang sistem dinamik model matematika tuberkulosis dan kendali optimal yang diterapkan pada model matematika tersebut. Kendali optimal yang digunakan yaitu kendali isolasi, daya tahan tubuh

dan pengobatan. Fungsi tujuan (indeks performa) yang akan dimaksimumkan bertujuan untuk mengurangi penyakit tuberkulosis.

1.2. Rumusan Masalah

Dari uraian di atas, permasalahan yang dibahas adalah:

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis dengan *exogenous reinfection*.
2. Bagaimana pengaruh bilangan reproduksi dasar (R_0) dalam penyebaran virus tuberkulosis pada populasi tersebut.
3. Bagaimana menentukan kendali optimal dari isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan pada tuberkulosis dengan *exogenous reinfection*.

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah dalam skripsi ini yaitu:

1. Skripsi ini akan dibahas model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis dengan *exogenous reinfection*, penentuan titik ekulibrium bebas penyakit dan ekulibrium endemik serta analisis kestabilan titik-titik ekulibrium tersebut.
2. Model dasar sistem dan parameter yang digunakan adalah model yang digunakan oleh Hasan Nasrun dkk.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Mendeskripsikan model pengendalian optimal yang menggambarkan hubungan penyakit tuberkulosis dengan *exogenous reinfection* dan cara penularannya.

2. Menentukan kendali optimal dari kendali isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan pada tuberkulosis dengan *exogenous reinfection* sehingga meminimalkan orang yang terinfeksi penyakit tuberkulosis.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat bagi beberapa aspek :

1. Memberikan pengetahuan serta menjadi referensi atau bahan masukan dalam penelitian serupa pada penelitian yang akan datang.
2. Memberikan informasi bahwa pengendalian optimal yang diperoleh dapat menjadi suatu solusi optimal dalam menentukan kebijakan untuk mengatasi penyebaran serta penularan penyakit tuberkulosis dengan *exogenous reinfection*.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penulisan tugas akhir ini digunakan beberapa sumber. Untuk beberapa pengertian dasar aljabar linear tentang nilai eigen, ruang vektor dan transformasi linear mengacu pada Anton (2004). Beberapa pengertian dasar persamaan diferensial mengacu pada Ross (1984). Selanjutnya mengenai beberapa materi dasar teori sistem yaitu mengenai sistem nonlinear, pengertian matriks Jacobian, titik ekuilibrium dan linearisasi serta teorema penting tentang kestabilan sistem nonlinear mengacu pada Bender (1978), Perko (1991), Olsder (1994), Finizro dan Ladis (1998), Murray (1993) dan Ripzo (2012). Beberapa pengertian mengenai teori kendali optimal yaitu mengenai *plant*, indeks performa, masalah kendali optimal, kalkulus variasi, prinsip maksimum Pontryagin, dan teori pengendali

bang-bang mengacu pada Naidu (2002), Subchan dan Rafal (2009), Arthur dan Yu-Chi Ho (1975).

Penulisan skripsi ini terinspirasi dari jurnal yang berjudul "*Pengendalian Optimal Tuberkulosis dengan Exgenous Reinfection*" (Hasnan Nasrun dkk, 2011 : 293). Sumber lain yang digunakan dalam penelitian ini berasal dari hasil penelitian (Zhilan Feng dkk, 2000 : 235), "*A Model for Tuberculosis with Exogenous Reinfection*".

Penelitaian (Zhilan Feng dkk, 2000 : 235) memberikan suatu model matematika tentang tuberkulosis. Jurnal ini hanya dituiskan titik-titik ekuilibrium beserta analisis kestabilan dari model tersebut tanpa disertai bukti. Penelitian (Hasnan Nasrun dkk, 2011 : 293) menjelaskan penggunaan kendali optimal pada tuberkulosis dengan *exogenous reinfection* untuk menetukan kendali optimal dari isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan penyakit tuberkulosis. Jurnal tersebut hanya dituliskan kendali optimal yang masih sederhana. Selanjutnya dalam skripsi ini akan diuraikan dan dijabarkan pembahasan model tuberkulosis yang sudah ada dalam jurnal tersebut. Titik-titik ekuilibrium yang dituliskan dalam jurnal tersebut akan dicari beserta buktinya, akan lebih dipaparkan lagi analisis kestabilannya serta pemaparan pengendali optimal penyakit tuberkulosis.

1.7. Metode Penelitian

Penelitian dilakukan dengan cara studi literatur. Sumber data yang didapat yaitu buku, jurnal dan hasil penelitian lain yang berhubungan. Penelitian dimulai dengan mengidentifikasi masalah. Masalah yang dibahas pada penelitian ini adalah penyebaran penyakit tuberkulosis dengan *exogenous reinfection* membuat

diagram transfer berdasarkan diagram transfer tersebut dituliskan model matematika.

Selanjutnya menentukan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik dari model tersebut serta menyelidiki karakteristik kestabilan model matematika tersebut. Selanjutnya menerapkan *Pontriagin Maximum Prinsiple* untuk mendapatkan kendali yang optimal.

1.8. Sistematika Penulisan

Guna memberikan gambaran secara menyeluruh dan memudahkan dalam memahami penelitian skripsi ini, maka secara garis besar sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari :

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan berisi tentang latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian dan sistematika penulisan yang memberikan gambaran singkat mengenai isi skripsi ini.

BAB II DASAR TEORI

Membahas mengenai teori-teori penunjang yang akan digunkan dalam bab selanjutnya, meliputi teori-teori dasar aljabar linear, persamaan diferensial, teori sistem dan pengendali optimal.

BAB III ANALISIS KESTABILAN DAN DESAIN KENDALI OPTIMAL UNTUK MODEL PENYAKIT TUBERKULOSIS DENGAN *EXOGENOUS REINFECTION*

Pada bab pembahasan berisi tentang pembahasan mengenai masalah yang diteliti.

BAB IV PENUTUP

Berisi kesimpulan dan saran yang diperoleh dari pembahasan yang dilakukan.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan asumsi-asumsi yang telah diberikan sebelumnya, maka secara matematis masalah kendali optimal penyebaran tuberkulosis dengan memperhatihan faktor *exogenous reinfection* (terkena infeksi ulang dari luar tubuh penderita) dapat dimodelkan ke dalam sistem diferensial nonlinier order satu sebagai berikut :

$$J(u_1,u_2,u_3)=\int_0^{t_f}\left[I(t)+\frac{B_1}{2}u_1^2(t)+\frac{B_2}{2}u_2^2(t)+\frac{B_3}{2}u_3^2(t)\right]dt$$

dengan $B_1,B_2,B_3\in R$, $B_1,B_2,B_3\geq 0$,

$0\leq t\leq t_f, 0\leq u_1\leq 1, 0\leq u_2\leq 1, 0\leq u_3\leq 1.$

Dengan model penyebaran penyakit

$$\frac{dS}{dt}=\Lambda-\left(1-u_1(t)\right)\beta cS\frac{I}{N}-\mu S$$

$$\frac{dE}{dt}=\left(1-u_1(t)\right)\beta cS\frac{I}{N}-\left(1-u_1(t)\right)\rho\beta cE\frac{I}{N}+\left(1-u_2(t)\right)\sigma\beta cT\frac{I}{N}-\left(\mu+k\right)E$$

$$\frac{dI}{dt}=\left(1-u_1(t)\right)\rho\beta cE\frac{I}{N}+kE-\left(\mu+u_3(t)r+d\right)I$$

$$\frac{dT}{dt}=u_3(t)rI-\left(1-u_2(t)\right)\sigma\beta cT\frac{I}{N}-\mu T$$

Dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin dapat diperoleh fungsi kontrol yang mengoptimalkan fungsi objektif yang dimaksud, yaitu sebagai berikut :

$$u_1^*(t) = \min\left\{1, \max\left[0, \frac{\beta c I(-\lambda_1 S + \lambda_2 S - \lambda_2 \rho E + \lambda_3 \rho E}{NB_1}\right]\right\}$$

$$u_2^*(t) = \min\left\{1, \max\left[0, \frac{\beta c I(\lambda_2 \sigma T - \lambda_4 \sigma T)}{NB_2}\right]\right\}$$

$$u_3^*(t) = \min\left\{1, \max\left[0, \frac{rI(\lambda_3 - \lambda_4)}{B_3}\right]\right\}.$$

Pengontrolan populasi endemik tuberkulosis agar pengontrolananya efektif dan efisien, mengoptimalkan pengontrolan harus memperhatikan R_0 untuk kasus $R_0 > 1$ memerlukan tingkat pengontrolan yang lebih tinggi dibandingakan $R_0 < 1$, sehingga perlu dipilih dengan tepat untuk setiap tahapan waktu untuk menghasilkan hasil yang optimal dengan menekankan jumlah individu tuberkulosis aktif, disertai biaya pengobatan seminimal mungkin.

4.2. Saran

Penelitian ini hanya sampai pada model kendali optimal perlu dikembangkan lagi untuk mengetahui hasilnya dengan menggunakan pemograman tak linear.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Bender. 1978. *An Introduction to Mathematical Modelling*. USA: Jhon Wiley and Sons.

Bryson, A.E. & Yu-Chi Ho. 1975. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. Net Work: Taylor & Frencis.

Chaves,C.C. dan Feng, Z. 2000. *A Model for TBC with Exogeneus Reinfection* .Theor. Pop. Biol. 57, 235.

Choi ,S., Jung, E. dan Chaves,C.C. 2009. *Optimal Treatment Strategies for Tuberculosis with Exogenous Reinfection, Nasional Science Foundation (NSF –Grant DMPS 0838705).*

Finizio dan Ladas.1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Hatta.K, M.Rachik, S.Saadi, Y.Tabit and N.Yousfi. 2009. *Optimal Control of Tuberculosis with Exogenous Reinfection*. Matematika Sciences,Vol.3.

Kementerian Kesehatan REPUBLIK INDONESIA Direktorat Jenderal Pengendalian Penyakit dan Penyehatan Lingkungan. 2011. *Strategi Pengendalian TBC di Indonesia 2010-2014*. Jakarta Kemenkesnas.

Naidu, D. S. (2002). *Optimal Control Systems*. USA: CRC Presses LCC.

Nasrun, H, Subchan, dan Yunus, M. 2011. *Pengendalian Optimal Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection.* Yogyakarta : Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA UNY.

Olsder, G.J. & van der Woude, J.W. 1994. *Mathematical System Theory*, Belanda: Deflt University Press.

Perko, L. 1991. *Differential Equations and Dynamical System*. New York: Springer Verlag.

Subchan,S, dan Zbikowski, R. 2009). *Computational Optimal Control Tools and Practise*. United Kingdom : John Willey and Sons, Ltd, publication.

Shepley, R. 1984. *Introduction To Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley and Sons.

CURRICULUM VITEA

A. Biodata pribadi

Nama Lengakap : Titin Lismawati

Jenis Kelamin : Perempuan

Tempat, Tanggal lahir : Ciamis, 19 Februari 2016

Alamat Asal : Kp. Kedung Jarian RT 006/001, Ds. Sidaharja. Kec. Lakbok, Kab. Ciamis, Jawa Barat

Alamat Tinggal : Jln. Ampel No. 19B, Papringan, Depok, Sleman, DIY

Email : urang_tietien@yahoo.com

No. HP : 082319909460

B. Latar Belakang Pendidikan Formal

Jenjang	Nama Sekolah	Tahun
TK	TK Tunas Mekar	1997-1998
SD	SDN 1 Sidahartja	1998-2004
SMP	SMP 3 Lakbok	2004-2007
SMU	SMA 1 Lakbok	2007-2010
SI	UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	2010-2016

C. Pengalaman Organisasi

Jenjang	Nama Organisasi	Jabatan	Tahun
SMP	OSIS	Sekretaris	2005-2006
	Pramuka	Anggota	2005-2006
SMA	OSIS	Anggota	2007-2008
		Sekretaris	2008-2009
	Pramuka	Pemangku Adat	2008-2009
	KIR	Ketua	2008-2009
S1	UKM Gita Savana	Anggota	2011-2013
	BEM-J Matematika	Anggota	2011-2012
	Saintek Musik	Anggota	2010-2011
		Sekretaris	2011-2012
	UKM INKAI	Anggota	2011-2012

D. Pengalaman Kerja

a. PT Wahana Prestasi Logistik, sebagai PIC, 22 Februari 2016-30 Maret 2016