

STUDI TEORITIS PERHITUNGAN LENSA GRAVITASI UNTUK BINTANG BEROTASI

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Fisika



Diajukan oleh:

Agung Laksana

11620037

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2016



PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : B-4351/UIN.02/D.ST/PP.01.1/12/2016

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Studi Teoritis Perhitungan Lensa Gravitasi Untuk Bintang Berotasi

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Agung Laksana
NIM : 11620037
Telah dimunaqasyahkan pada : 28-Nov-16
Nilai Munaqasyah : A
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Asih Melati, S.Si., M.Sc.
NIP. 19841110 201101 2 017

Penguji I

Norma Sidik Risdianto, S.Pd., M.Sc.
NIP.19870630 201503 1 003

Penguji II

Joko Purwanto, M.Sc.
NIP. 19820306 200912 1 002

Yogyakarta, 05 Desember 2016
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan



Dr. Murtono, M.Si.
NIP. 19691212 200003 1 001



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Agung Laksana

NIM : 11620037

Judul Skripsi : Studi Teoritis Perhitungan Lensa Gravitasi Untuk Bintang Berotasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Fisika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 7 Oktober 2016

Pembimbing I

Asih Melati, M.Sc.

NIP. 19841110 201101 2 017



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Agung Laksana

NIM : 11620037

Judul Skripsi : Studi Teoritis Perhitungan Lensa Gravitasi Untuk Bintang Berotasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Fisika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 15 November 2016

Pembimbing II

Norma Sidik Risdianto, M.Sc.

NIP. 19870630 201503 1 003

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Agung Laksana
NIM : 11620037
Prodi : Fisika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : **STUDI TEORITIS PERHITUNGAN LENS GRAVITASI UNTUK BINTANG BEROTASI**

menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah diterbitkan oleh orang lain, kecuali secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 17 November 2016



Agung Laksana
NIM: 11620037

MOTTO

”Kami telah turunkan kepadamu Al-Dzikir (Al-Quran) untuk kamu terangkan kepada manusia apa-apa yang diturunkan kepada mereka agar mereka berpikir”

(QS. 16:44)



PERSEMBAHAN



Karya sederhana ini penulis persembahkan
untuk keluarga tercinta

KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur Alhamdulillah Rabbil'alamin kehadiran Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul "*Studi Teoritis Perhitungan Lensa Gravitasi Untuk Bintang Berotasi*". Tugas Akhir ini diajukan untuk memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) Program Studi Fisika Fakultas Sains dan Teknologi di Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Dalam penyusunan Skripsi ini penulis tidak lepas dari bimbingan, dorongan serta bantuan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. My Beloved Family, Alm. Bapak, Mama, kakak dan Saudara-saudara tercinta untuk cinta, kasih sayang, doa, serta semangat yang terus mengalir tiada henti.
2. Bapak Dr. Murtono, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
3. Bapak Dr. Thaqibul Fikri Niryatama, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Ibu Asih Melati, M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik sekaligus pembimbing Tugas Akhir yang telah memberikan bimbingan, saran, motivasi serta masukan hingga terselesaikannya skripsi ini.

5. Bapak Norma Sidik Risdianto, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang telah memberikan ide-ide dasar, kesediaan waktu, tenaga dan pikirannya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
6. Bapak Joko Purwanto, M.Sc., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran, baik dalam penulisan ataupun isi dari skripsi ini.
7. Teman-teman fisika 2011 yang selalu memberi motivasi selama penyusunan Skripsi ini.
8. Semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan dalam penyusunan Skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu kritikan dan saran yang membangun sangat diharapkan penulis agar Skripsi ini menjadi karya yang lebih baik dan bermanfaat bagi pembaca.

Yogyakarta, 16 November 2016

Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|--|-------------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| HALAMAN PENGESAHAN | ii |
| SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI 1 | iii |
| SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI 2 | iv |
| HALAMAN PERNYATAAN | v |
| HALAMAN MOTTO | vi |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | vii |
| KATA PENGANTAR | viii |
| DAFTAR ISI | x |
| DAFTAR TABEL | xii |
| DAFTAR GAMBAR | xiii |
| DAFTAR LAMBANG | xiv |
| INTISARI | xv |
| ABSTRACT | xvi |
| I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1. Latar Belakang Masalah | 1 |
| 1.2. Rumusan Masalah | 3 |
| 1.3. Tujuan Penelitian | 3 |
| 1.4. Batasan Penelitian | 3 |
| 1.5. Manfaat Penelitian | 4 |
| II TINJAUAN PUSTAKA | 5 |
| 2.1. Studi Pustaka | 5 |
| 2.2. Landasan Teori | 6 |
| 2.2.1. Teori Relativitas Umum | 6 |
| 2.2.2. Lensa Gravitasi | 8 |

| | |
|---|-----------|
| 2.2.3. Rumusan Schwarzschild | 9 |
| 2.2.4. Lintasan Partikel Pada Benda Masif | 11 |
| 2.2.5. Lintasan Foton | 12 |
| 2.2.6. Metrik Kerr | 14 |
| III METODE PENELITIAN | 16 |
| 3.1. Waktu dan Tempat Penelitian | 16 |
| 3.2. Alat dan Bahan | 16 |
| 3.3. Prosedur Kerja | 16 |
| 3.3.1. Pengumpulan Informasi dan Studi Pustaka | 17 |
| 3.3.2. Merumuskan Persamaan Lensa Gravitasi untuk Bintang Berotasi | 18 |
| 3.3.3. Uji persamaan dengan Matlab | 18 |
| 3.3.4. Analisis Hasil | 18 |
| IV HASIL DAN PEMBAHASAN | 19 |
| 4.1. Hasil | 19 |
| 4.1.1. Persamaan Lensa Gravitasi Untuk Bintang Berotasi | 19 |
| 4.1.2. Perhitungan Lensa Gravitasi Untuk Bintang Berotasi | 21 |
| 4.1.3. Grafik Perbandingan Lensa Gravitasi untuk Bintang Berotasi dengan Bintang Tidak Berotasi | 26 |
| 4.2. Pembahasan | 33 |
| 4.3. Integrasi-Interkoneksi | 36 |
| V PENUTUP | 38 |
| 5.1. Kesimpulan | 38 |
| 5.2. Saran | 38 |
| DAFTAR PUSTAKA | 39 |
| A PENURUNAN METRIK KERR | 41 |

DAFTAR TABEL

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Penelitian sebelumnya yang relevan | 6 |
| 2.2 | Pengamatan Pembelokan Cahaya Bintang Saat Gerhana Matahari . | 9 |
| 3.1 | Alat dan Bahan Penelitian | 16 |
| 4.1 | Perhitungan sudut defleksi dengan massa tetap ($M = 1,98 \times 10^{30}$ kg) | 21 |
| 4.2 | Perhitungan sudut defleksi dengan jari-jari tetap ($R = 700000$ km) . | 24 |



DAFTAR GAMBAR

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Cahaya Bintang dibelokkan oleh Benda Masif | 13 |
| 2.2 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr | 15 |
| 3.1 | Tahapan Penelitian | 17 |
| 4.1 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap jari-jari ($a = \omega$) | 27 |
| 4.2 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap jari-jari ($a = 1$ milyar ω) | 27 |
| 4.3 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap jari-jari ($a = 10$ milyar ω) | 28 |
| 4.4 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap jari-jari ($a = 100$ milyar ω) | 28 |
| 4.5 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap massa ($a = \omega$) | 29 |
| 4.6 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap massa ($a = 1$ milyar ω) | 29 |
| 4.7 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap massa ($a = 10$ milyar ω) | 30 |
| 4.8 | Perbandingan antara ruang-waktu Schwarzschild dan Kerr dalam grafik hubungan sudut defleksi terhadap massa ($a = 100$ milyar ω) | 30 |
| 4.9 | Grafik hubungan sudut defleksi vs kecepatan sudut (0-1 Milyar ω) | 31 |
| 4.10 | Grafik hubungan sudut defleksi vs kecepatan sudut (0-10 Milyar ω) | 31 |
| 4.11 | Grafik hubungan sudut defleksi vs kecepatan sudut (0-100 Milyar ω) | 32 |
| 4.12 | Grafik hubungan sudut defleksi vs kecepatan sudut (0-1000 Milyar ω) | 32 |

DAFTAR SIMBOL

| | |
|-----------------------------|---|
| G | : Konstanta Gravitasi Universal |
| $\Delta\phi$ | : Sudut defleksi |
| a | : Kecepatan sudut bintang |
| b | : Parameter Dampak |
| ω | : Kecepatan sudut matahari |
| c | : Kecepatan cahaya |
| $g_{\mu\nu}$ | : Metrik tensor |
| M | : Massa bintang |
| R | : Jari-jari bintang |
| μ dan ν | : indeks 0,1,2,3,... |
| L | : Lagrange |
| $\Delta\Psi$ | : Pergeseran kerr |
| $\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ | : Penjumlahan $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ |
| $r \rightarrow \infty$ | : r menuju tak terhingga |
| $a \approx 0$ | : a sebanding dengan 0 |

STUDI TEORITIS PERHITUNGAN LENSA GRAVITASI UNTUK BINTANG BEROTASI

Agung Laksana

11620037

INTISARI

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui: (1) Persamaan lensa gravitasi pada bintang berotasi. (2) Hasil perhitungan lensa gravitasi pada bintang berotasi. (3) Perbedaan antara hasil perhitungan lensa gravitasi pada bintang berotasi dengan bintang tidak berotasi. Jenis penelitian ini adalah teoritis komputasi dengan metode penurunan metrik Kerr kemudian dianalisa menggunakan grafik hubungan antar variabel yang terkait. Hasil dari penelitian ini: (1) didapat rumusan persamaan lensa gravitasi untuk bintang berotasi. (2) Perhitungan Lensa Gravitasi untuk bintang (matahari) berotasi diperoleh sudut defleksi $\Delta\phi = 1,745''$. (3) Tidak ada perbedaan yang signifikan antara perhitungan Lensa Gravitasi pada bintang berotasi dengan bintang tidak berotasi. Besarnya kecepatan sudut tidak memberikan pengaruh terhadap nilai sudut defleksi sehingga dapat diabaikan.

Kata kunci: Teori Relativitas Umum, Lensa Gravitasi, Bintang Berotasi

THEORETICAL STUDY CALCULATION GRAVITATIONAL LENSING FOR ROTATION STARS

Agung Laksana

11620037

ABSTRACT

This research was done in order to know: (1) The Gravitational Lensing equation on rotating stars. (2) Result of calculation gravitational lensing on rotation stars. (3) Difference of calculation gravitational lensing on rotation stars and non-rotating stars. This research is computation-theoretical with derivation from the Kerr metrik and for representing a research, used as a graph the relationship between two or more variables. Result of this research showed: (1) Gravitational lens equations for rotating stars can be obtained from kerr metric. (2) Calculation of gravitational lensing for rotating stars (sun) obtained angle of deflection $\Delta\phi = 1,745''$. (3) Calculation gravitational lensing on rotation stars is not as different as non-rotating stars. Angular velocity doesn't give effect on angular deflection, so that can be ignored.

Keyword: General Relativity, Gravitational Lensing, Rotating Stars

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Hukum Gravitasi dikenalkan pertama kali oleh Sir Isac Newton dalam teori mekanika klasik. Newton menyatakan bahwa gravitasi merupakan gaya tarik menarik antara dua buah partikel bermassa. Awal abad 20, Albert Einstein menemukan ketidaksempurnaan dari Hukum Gravitasi Newton. Mekanika Newton mampu menerangkan sifat benda yang bergerak dengan kecepatan rendah, tetapi gagal untuk benda dengan kecepatan yang mendekati kecepatan cahaya. Tahun 1905, Albert Einstein berhasil menemukan teori yang menjelaskan suatu benda bergerak mendekati kecepatan cahaya yaitu Teori Relativitas Khusus (TRK) (Ohanian, 1976).

Pada tahun 1916 Einstein berhasil menggagas Teori Relativitas Umum (TRU) yang menjelaskan bahwa gravitasi bukanlah gaya, tetapi efek dari kelengkungan ruang dan waktu. TRU di bangun atas dua asas, yaitu asas kesetaraan dan asas kovariansi umum (Weinberg, 1972). TRU telah dibuktikan melalui beberapa eksperimen. Pertama, TRU membuktikan bahwa orbit planet merkurius mengalami pergeseran (presisi) tiap tahunnya. Hal ini sesuai dengan pengamatan yang dilakukan oleh Le Verrier. Kedua, TRU terbukti melalui pengamatan fenomena Gerhana Matahari Total (GMT) oleh Eddington, dengan hasil cahaya bintang dibelokkan ketika berada di sekitar Matahari.

TRU memprediksi bahwa cahaya bintang yang melewati lintasan dekat dengan matahari akan mengalami sedikit defleksi. Hal ini menyebabkan posisi bintang tersebut berbeda dengan hasil pengamatan di bumi. Ketika bumi mengelilingi matahari, bintang-bintang yang berada di belakang matahari, posisinya akan tampak berubah relatif terhadap bintang lain. Cahaya bintang berbelok tidak hanya ketika

melewati matahari melainkan semua objek langit yang memiliki massa yang besar. Proses pembelokan ini dikenal dengan peristiwa lensa gravitasi (Wambsganss, 1998).

Eddington yang merupakan ilmuwan berkebangsaan Inggris melakukan ekspedisi gerhana matahari total di dataran Principe, Afrika pada tanggal 29 Mei 1919. Ketika gerhana terjadi, Eddington mencoba mengamati cahaya bintang di sekitar matahari dengan menggunakan fotografi. Hasil ini kemudian dibandingkan dengan bintang yang diamati ketika malam hari. Oleh karena itu perlu waktu sekitar 6 bulan agar bintang yang di foto dekat matahari muncul pada malam hari. Ketika dibandingkan ternyata kedua foto tersebut terdapat *gap* yang artinya cahaya bintang dibelokkan ketika melintas di dekat matahari, teori Einstein pun dinyatakan benar.

Eksperimen Eddington diperoleh hasil sebesar $1.98''$ dan $1.61''$ sedangkan perhitungan Einstein pun tidak jauh berbeda yaitu $1.75''$ (Hobson, 2006). Hasil perhitungan ini diturunkan dari metrik Schwarzschild yang mengasumsikan bintang tersebut tidak berotasi. Pembelokan cahaya bintang ini bergantung pada massa bintang dan jarak, semakin besar massa bintang semakin besar pula sudut deviasi yang terbentuk sebaliknya semakin besar nilai jarak maka semakin kecil sudut deviasi yang terbentuk (Lidya, 2013).

Tanggal 9 Maret 2016, fenomena Gerhana Matahari Total (GMT) telah terjadi di sebagian wilayah Indonesia yaitu pulau Sumatera, Kalimantan, Sulawesi dan Maluku. Jalur GMT yang sebagian besar melintasi wilayah Indonesia ini dimanfaatkan oleh para ilmuwan untuk melakukan penelitian, salah satunya yaitu mengenai Lensa Gravitasi. Pada dasarnya, Matahari mengalami gerak rotasi dengan kecepatan konstan. Oleh karena itu, diperlukan studi teoritis mengenai perhitungan Lensa Gravitasi untuk bintang berotasi.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka rumusan masalah penelitian adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana rumusan persamaan Lensa Gravitasi untuk bintang berotasi?
2. Bagaimana hasil perhitungan Lensa Gravitasi untuk bintang berotasi?
3. Apa perbedaan antara hasil perhitungan lensa gravitasi untuk bintang berotasi dengan bintang tidak berotasi?

1.3. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini dimaksudkan untuk:

1. Merumuskan persamaan Lensa Gravitasi pada bintang berotasi.
2. Menghitung Lensa Gravitasi pada bintang berotasi.
3. Membandingkan hasil perhitungan lensa gravitasi pada bintang berotasi dengan bintang tidak berotasi.

1.4. Batasan Penelitian

Penelitian ini dibatasi pada perhitungan Lensa Gravitasi yang melalui bidang ekuator ($\theta = \frac{\pi}{2}$). Bintang berotasi yang dikaji dalam penelitian ini adalah Matahari.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian dapat memberi manfaat antara lain:

1. Memberikan pemahaman yang lebih khususnya untuk peneliti sendiri tentang Teori Relativitas Umum melalui perhitungan Lensa Gravitasi.
2. Dapat digunakan sebagai data pembanding saat melakukan pengamatan Gerhana Matahari Total.
3. Memberikan peluang untuk melakukan penelitian lebih lanjut apabila data perhitungan yang diperoleh hasilnya jauh berbeda dengan hasil pengamatan.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penyusunan skripsi ini adalah :

1. Persamaan Lensa Gravitasi untuk bintang berotasi adalah sebagai berikut

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2b} \left(1 + \frac{9a^2}{8b^2}\right)^{-1}$$

2. Berdasarkan persamaan yang telah diperoleh, sudut pembelokan cahaya yang diakibatkan oleh bintang berotasi (Matahari) maupun bintang tidak berotasi (Matahari) bernilai sama yaitu 1,745".
3. Perhitungan Lensa Gravitasi pada bintang berotasi dan perhitungan Lensa Gravitasi pada bintang tidak berotasi menunjukkan sudut defleksi yang relatif sama. Perbedaan nilai sudut defleksi tidak terlihat jika nilai pergeseran kerr mendekati nol ($\Delta\Psi \approx 0$).

5.2. Saran

Penelitian ini masih sebatas perhitungan lensa gravitasi bintang dengan massa (M), jari-jari (R) dan kecepatan sudut (a) sembarang. Penelitian selanjutnya disarankan untuk melakukan perhitungan lensa gravitasi dengan besaran variabel bintang yang sesuai dengan pengamatan.

DAFTAR PUSTAKA

- Anugraha, R., 2011, *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*, Gajah Mada University Press, Yogyakarta
- Barnes, L., 2007, *Geodesics, General Relativity and Spacetime*, Master of Science, School of Physics, University of Sydney. Sydney
- Carmelli, M., 1982, *Classical Field: General Relativity and Gauge Theory*, John Wiley Sons, Inc., New York
- Hasanuddin, 2012, *Pembelokan Cahaya Dalam Ruang Waktu Kerr-Einstein*, Jurnal POSITRON, Vol.II, No.2, Hal.21-24, ISSN:2301-4970.
- Hidayat, Taufiq, 2010, *Teori Relativitas Einstein: Sebuah Pengantar*, Bandung: Penerbit ITB.
- Hobson, M.P., G.P. Efstathiou, A.N. Lasenby, 2006, *General Relativity An Introduction for Physicist*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., dan Donner, K.J., 2006, *Fundamental Astronomy Fifth Edition*, Springer-Verlag, New York, USA.
- Kerr, R., P, 1963, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Phys. Rev. Lett. 11 237-238.
- Lidya, U., dkk, 2013, *Analisis Lintasan Foton dalam Ruang Waktu Schwarzschild*, Jurnal Prisma Fisika, Vol.I, No.1, Hal.8-13, ISSN:2337-8204.
- Matthias, 2012, *Lecture Notes on General Relativity*, Albert Einstein Center for Fundamental Physics Institut F'ur Theoretische Physik, Universit'at Bern, Switzerland.

- Ohanian, H.C., 1976, *Gravitation and Space Time*, New York: W.W. Northon and Company
- Purwanto, A, 2010, *Pengantar Kosmologi*, ITS Press, Surabaya.
- Purwanto, A, 2012, *Nalar Ayat-Ayat Semesta*, Bandung: Penerbit Mizan.
- Schneider, P., Ehlers, J., and Falco, E.E., 1992, *Gravitational Lenses*, Springer.
- Schwarzschild, K., 1916, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. Sitzungsberichte der königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.- Math. Klasse, 189-196
- Simbolon, Sabam P, dkk., 2013, *Kajian Teoritis Persamaan Medan Gravitasi Einstein dengan Transformasi Metrik Schwarzschild dalam Sistem Dua Koordinat*, Jurnal Sainia Fisika, Vol.II, No.1.
- Tim Penerjemah, 2004, *Al-Qur'an dan Terjemahannya*, Jakarta: Departemen Agama RI.
- Wald, Robert, 1984, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago.
- Wambsganss, Joachim., 1998, *Gravitational Lensing in Astronomy*, Living Reviews in Relativity 1, 1998-12, <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9812021>
- Weinberg, Steven., 1972, *Gravitational and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory Relativity*, John Wiley Sons, USA.
- Yasrina, A, 2013, *Tentang Medan Elektromagnetik Relativistik di Bintang Neutron yang Berotasi Lambat* (Tesis), Yogyakarta: Jurusan Fisika FMIPA UGM

LAMPIRAN A

PENURUNAN METRIK KERR

Untuk memperoleh persamaan Lensa Gravitasi dari Metrik Kerr diperlukan penurunan yang prosesnya sama dengan penurunan Metrik Schwarzschild. Lampiran ini merupakan proses perhitungan untuk mendapatkan rumusan mengenai lensa gravitasi yang diturunkan dari Metrik Kerr. Persamaan Metrik Kerr dapat dituliskan kembali sebagai berikut.

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) dt^2 + \frac{4\mu a c r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{A.1})$$

Kemudian diubah ke dalam persamaan Lagrange sebagai berikut

$$L = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \longrightarrow \dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\sigma}$$

Dengan indeks μ dan ν adalah 0,1,2,3. Persamaan Lagrangennya menjadi

$$L = c^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) \dot{t}^2 + \frac{4\mu a c r \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} \dot{\phi} - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (\text{A.2})$$

Euler Lagrange untuk $\dot{x}^0 = \frac{dt}{d\sigma} = \dot{t}$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

Kemudian substitusikan persamaan A.2 ke dalam persamaan A.3. Karena dalam persamaan Lagrange tidak terdapat komponen t ($\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) maka

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = k$$
$$\left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) \dot{t} + \frac{2\mu a r \sin^2 \theta}{c\rho^2} \dot{\phi} = k \quad (\text{A.4})$$

Dengan cara yang sama, Euler-Lagrange untuk $\dot{x}^1 = \frac{dr}{d\sigma} = \dot{r}$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial L}{\partial r} \quad (\text{A.5})$$

Persamaan Lagrange A.2 yang mengandung komponen r dan \dot{r} secara detail dapat diturunkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= -2 \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r} \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) &= \frac{d \left(-2 \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r} \right)}{d\sigma} \\ &= -2 \frac{\rho^2}{\Delta} \ddot{r} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -2 \frac{\mu c^2}{\rho^2} t^2 + \frac{4\mu a c \sin^2 \theta}{\rho^2} t \dot{\phi} - \left(2r + \frac{2\mu a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \quad (\text{A.7})$$

Persamaan A.6 dan A.7 disubstitusi ke persamaan Euler-Lagrange A.5 sehingga diperoleh

$$\frac{\rho^2}{\Delta} \ddot{r} - \frac{\mu c^2}{\rho^2} t^2 + \frac{2\mu a c \sin^2 \theta}{\rho^2} t \dot{\phi} - \left(r + \frac{\mu a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (\text{A.8})$$

Euler-Lagrange untuk $\dot{x}^2 = \frac{d\theta}{d\sigma} = \dot{\theta}$

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (\text{A.9})$$

Berikutnya persamaan Lagrange A.2 diturunkan terhadap $\dot{\theta}$ dan θ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= -2\rho^2 \dot{\theta} \\ \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{d \left(-2\rho^2 \dot{\theta} \right)}{d\sigma} \\ &= -2\rho^2 \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \frac{8\mu a c r}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta t \dot{\phi} \\ &\quad - \left[2r^2 \sin \theta \cos \theta + 2a^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{8\mu r a^2}{\rho^2} \cos \theta \sin^3 \theta \right] \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Persamaan A.9 dan A.10 disubstitusi ke persamaan Euler-Lagrange A.8 sehingga menjadi

$$\rho^2 \ddot{\theta} + \frac{4\mu acr \sin \theta \cos \theta}{\rho^2} \dot{\theta} \dot{\phi} - \left[r^2 \sin \theta \cos \theta + a^2 \sin \theta \cos \theta + \frac{4\mu r a^2}{\rho^2} \cos \theta \sin^3 \theta \right] \dot{\phi}^2 = 0 \quad (\text{A.12})$$

Euler-Lagrange untuk $\dot{x}^3 = \frac{d\phi}{d\sigma} = \dot{\phi}$,

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \quad (\text{A.13})$$

Persamaan Lagrange A.2 tidak bergantung terhadap ϕ sehingga $\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$ dan $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = h$, dimana h bernilai konstan. Jika dituliskan hasilnya adalah sebagai berikut.

$$\frac{2\mu acr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{\theta} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \dot{\phi} = h \quad (\text{A.14})$$

Dengan demikian diperoleh 4 persamaan gerak untuk masing-masing Euler-Lagrange ($\mu = 0, 1, 2, 3$). Persamaan gerak tersebut dibatasi hanya untuk wilayah ekuator ($\theta = \frac{\pi}{2}$) sehingga menjadi

$$\left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2} \right) \dot{t} + \frac{2\mu ar}{c\rho^2} \dot{\phi} = k \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\rho^2}{\Delta} \ddot{r} - \frac{\mu c^2}{\rho^2} \dot{t}^2 + \frac{2\mu ac}{\rho^2} \dot{t} \dot{\phi} - \left(r + \frac{\mu a^2}{\rho^2} \right) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{2\mu acr}{\rho^2} \dot{t} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2} \right) \dot{\phi} = h \quad (\text{A.17})$$

Untuk kasus lintasan foton seperti yang telah dijelaskan pada dasar teori bahwa persamaan A.16 diganti oleh $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$ dengan nilai $\theta = \frac{\pi}{2}$ persamaan A.2 dapat kembali dituliskan lebih sederhana yaitu

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2} \right) \dot{t}^2 + \frac{4\mu acr}{\rho^2} \dot{t} \dot{\phi} - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2} \right) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (\text{A.18})$$

dimana $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi}$, sehingga A.18 menjadi

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2} \right) \dot{t}^2 + \frac{4\mu acr}{\rho^2} \dot{t} \dot{\phi} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2} \right) \dot{\phi}^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{\phi}^2 \left[\frac{dr}{d\phi} \right]^2 \quad (\text{A.19})$$

Untuk memudahkan perhitungan persamaan A.19 dibagi dengan $\dot{\phi}^2$ sehingga

$$c^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} + \frac{4\mu a c r}{\rho^2} \frac{\dot{t}}{\dot{\phi}} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2}\right) = \frac{\rho^2}{\Delta} \left[\frac{dr}{d\phi}\right]^2 \quad (\text{A.20})$$

Dengan menggunakan cara eliminasi substitusi antara persamaan A.15 dan A.17 diperoleh nilai dari \dot{t} dan $\dot{\phi}$ sebagai berikut

$$\dot{t} = \frac{-k \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2}\right) - \frac{2\mu a r}{c \rho^2} h}{-\left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2}\right) - \frac{4\mu^2 a^2 r^2}{c^2 \rho^4}} \quad (\text{A.21})$$

$$\dot{\phi} = \frac{h \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) - \frac{2\mu a r c}{\rho^2} k}{-\left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right) \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2}\right) - \frac{4\mu^2 a^2 r^2}{c^2 \rho^4}} \quad (\text{A.22})$$

Jika dioperasikan nilai $\frac{\dot{t}}{\dot{\phi}}$ dengan asumsi bahwa $k = 0$ maka dihasilkan

$$\frac{\dot{t}}{\dot{\phi}} = \frac{-\frac{2\mu a r}{c \rho^2}}{\left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right)} \quad \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} = \frac{\frac{4\mu^2 a^2 r^2}{c^2 \rho^4}}{\left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right)^2}$$

maka persamaan A.21 menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\rho^2}{\Delta} \left[\frac{dr}{d\phi}\right]^2 &= \frac{4\mu^2 a^2 r^2}{\rho^4 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right)} - \frac{8\mu^2 a^2 r^2}{\rho^4 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right)} - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2}\right) \\ \left[\frac{dr}{d\phi}\right]^2 &= \frac{-4\mu^2 a^2 r^2 \Delta}{\rho^6 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2}\right)} - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2}{\rho^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

dengan $\Delta = (r^2 - 2\mu r + a^2)$ dan $\rho^2 = r^2$ serta $u \equiv \frac{1}{r}$ maka

$$\begin{aligned} \left[\frac{dr}{d\phi}\right]^2 &= \frac{-4\mu^2 a^2 r^2 + 8\mu^3 a^2 r - 4\mu^2 a^4}{r^4 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)} - \\ &\quad \left(r^2 - 2\mu r + 2a^2 + \frac{a^4}{r^2} - \frac{4\mu^2 a^2}{r^2} + \frac{2\mu a^4}{r^3}\right) \\ \frac{1}{u^4} \left[\frac{du}{d\phi}\right]^2 &= \frac{-4\mu^2 a^2 u^{-2} + 8\mu^3 a^2 u^{-1} - 4\mu^2 a^4}{u^{-4} (1 - 2\mu u)} - \\ &\quad \left(\frac{1}{u^2} - \frac{2\mu}{u} + 2a^2 + a^4 u^2 - 4\mu^2 a^2 u^2 + 2\mu a^4 u^3\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{du}{d\phi}\right]^2 &= \frac{-4\mu^2 a^2 u^6 + 8\mu^3 a^2 u^7 - 4\mu^2 a^2 u^8}{(1 - 2\mu u)} - \\ &\quad (u^2 - 2\mu u^3 + 2a^2 u^4 + a^4 u^6 - 4\mu^2 a^2 u^6 + 2\mu a^4 u^7) \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh solusi persamaan gerak foton yang melewati wilayah ekuator suatu bintang berotasi sebagai berikut

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -2\mu^2a^2 \left(\frac{2u^5(3-5\mu u) - 2\mu u^6(7-12\mu u) + 2u^7(4-7\mu u)}{(1-2\mu u)^2} \right) - (u - 3\mu u^2 + 4a^2u^3 + 3a^4u^5 - 12\mu^2a^2u^5 + 7\mu a^4u^6) \quad (\text{A.24})$$

Perhitungan selanjutnya akan dibatasi sampai u berderajat 3 saja, karena untuk u^n dengan $n > 3$ nilai $u \approx 0$. Maka persamaan A.24 dapat dituliskan kembali

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3\mu u^2 - 4a^2u^3 \quad (\text{A.25})$$

Melaui penjelasan pada gambar 2.1 dapat dituliskan solusi relativitas umum sebagai berikut

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \Delta u \quad (\text{A.26})$$

Dimana Δu dapat ditentukan dengan solusi persamaan deferensial seperti di bawah ini

$$\frac{d^2\Delta u}{d\phi^2} + \Delta u = \frac{3\mu}{b^2} \sin^2 \phi - \frac{4a^2}{b^3} \sin^3 \phi \quad (\text{A.27})$$

maka diperoleh

$$\Delta u = \frac{3\mu}{b^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) - \frac{4a^2}{b^3} \left(\frac{1}{32} \sin 3\phi - \frac{3}{8} \phi \cos \phi \right) \quad (\text{A.28})$$

Substitusi persamaan A.28 ke persamaan A.26 menghasilkan

$$u = \frac{\sin \phi}{b} + \frac{3\mu}{b^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos 2\phi \right) - \frac{4a^2}{b^3} \left(\frac{1}{32} \sin 3\phi - \frac{3}{8} \phi \cos \phi \right) \quad (\text{A.29})$$

Dengan memperhitungkan limit $r \rightarrow \infty$, maka $u \rightarrow 0$. Untuk sudut defleksi yang kecil digunakan pendekatan $\sin \phi \approx \phi$ dan $\cos 2\phi \approx 1$. Sehingga sudut defleksi total di sekitar bintang yang berotasi yaitu

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2b} \left(\frac{1}{1 + \frac{9a^2}{8b^2}} \right) \quad (\text{A.30})$$

Cahaya dari bintang jauh memiliki nilai maksimum jika melintas tepat di luar permukaan bintang ($b = R$), dimana R adalah jari-jari suatu bintang (Hidayat, 2010).

Maka persamaan A.30 dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 R} \left(\frac{1}{1 + \frac{9a^2}{8R^2}} \right) \quad (\text{A.31})$$

atau dapat ditulis dengan bentuk lain yaitu

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 R} \left(1 + \frac{9a^2}{8R^2} \right)^{-1} \quad (\text{A.32})$$

andaikan $\frac{9a^2}{8R^2} = x$, maka deret binomial dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} (1+x)^{-1} &= 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Jika dikembalikan ke bentuk persamaan A.32 maka hasilnya adalah

$$\Delta\phi = \frac{4GM}{c^2 R} \left(1 - \frac{9a^2}{8R^2} + \left(\frac{9a^2}{8R^2} \right)^2 - \left(\frac{9a^2}{8R^2} \right)^3 + \dots \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\Delta\phi \approx \frac{4GM}{c^2 R} - \frac{36GMa^2}{8c^2 R^3} \quad (\text{A.35})$$

$\frac{36GMa^2}{8c^2 R^3}$ didefinisikan sebagai pergeseran kerr ($\Delta\Psi$), sehingga persamaan lensa gravitasi untuk bintang berotasi yaitu

$$\Delta\phi_{kerr} = \Delta\phi_{schwarzschild} - \Delta\Psi \quad (\text{A.36})$$

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Curriculum Vitae

I. Data Pribadi

1. Nama : Agung Laksana
2. Tempat dan Tanggal Lahir : Banjar, 20 Agustus 1994
3. Jenis Kelamin : Laki-Laki
4. Agama : Islam
5. Status Pernikahan : Lajang
6. Warga Negara : WNI
7. Alamat KTP : Link. Banjar RT/RW : 01/01,
Desa Banjar, Kecamatan Banjar,
Kota Banjar, Jawa Barat
8. Alamat Sekarang : Jalan Petung Gg. Mushola No.1,
Papingan, Caturtunggal, Depok,
Sleman, Yogyakarta
9. Nomor Telepon / HP : 081804367994
10. e-mail : agung.1684@gmail.com
11. Kode Pos : 55281



II. Pendidikan Formal :

| Periode (Tahun) | | | Sekolah / Institusi / Universitas | Jurusan |
|-----------------|---|------|-----------------------------------|---------|
| 2000 | - | 2006 | SD Negeri 1 Banjar | - |
| 2006 | - | 2008 | SMP Negeri 1 Banjar | - |
| 2008 | - | 2011 | SMA Negeri 1 Banjar | IPA |
| 2011 | - | 2016 | UIN Sunan Kalijaga | Fisika |

III. Riwayat Organisasi :

| Periode (Tahun) | | | Organisasi |
|-----------------|---|----------|--------------------------|
| 2011 | - | 2016 | Astronic UIN Suka |
| 2015 | - | 2016 | ISYF Chapter Jogja |
| 2015 | - | Sekarang | F-Kapmepi DIY |
| 2016 | - | Sekarang | Jogja Astro Club |
| 2012 | - | Sekarang | Rukyatul Hilal Indonesia |

IV. Riwayat Kegiatan (dalam kampus) :

| Asisten Laboratorium | Matakuliah | Tahun Ajaran |
|----------------------------------|-------------------------------|---------------------|
| Fisika Dasar | Prak. Fisika Dasar I | 2012/2013 |
| | Prak. Fisika Dasar I/II | 2013/2014 |
| | Prak. Fisika Dasar I | 2014/2015 |
| | Prak. Fisika Dasar I | 2015/2016 |
| Elektronika dan Elektromagnetika | Prak. Elektronika Dasar | 2013/2014 |
| | Prak. Elektronika Dasar | 2014/2015 |
| | Prak. Elektronika Dasar | 2015/2016 |
| Optika | Prak. Optika dan Gelombang | 2015/2016 |
| Fisika komputasi | Prak. Fisika Komputasi | 2014/2015 |
| Astrofisika | Prak. Astronomi Islam Praktis | 2014/2015 |
| | Prak. Astronomi Islam Praktis | 2015/2016 |

III. Riwayat Kegiatan (luar kampus) :

- 1. Asisten Pelatihan Rukyatul Hilal**
- 2. Asisten Pelatnas IESO bidang Astronomi (sesi observasi)**
- 3. Asisten Pelatihan Roket air**
- 4. Tentor Privat Fisika**
- 5. Pengajar TPA Masjid Nur Farhan**