BAB II

LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai beberapa pengertian-pengertian dasar yang akan digunakan untuk pembahasan pada bab-bab berikutnya.

2.1 Variabel Random

Definisi 2.1 (Bain dan Engelhardt, 1992: 53)

"*Variabel random X adalah suatu fungsi dengan daerah asal S dan daerah hasil bilangan real $R \rightarrow X(e) = x$, dengan $e \in S$, dan $x \in R$*"

Huruf besar seperti X, Y, Z digunakan untuk menotasikan variabel random, sedangkan huruf kecil seperti x, y, z digunakan untuk menotasikan nilai yang mungkin dari setiap hasil observasi pada ruang sampel.

2.2 Ekspektasi, Variansi, dan Kovariansi

Definisi 2.2 (Bain and Engelhardt, 1992:58)

"Jika X adalah variabel random dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai:

$$E(X) = \sum_x xf(x), \text{ jika } X \text{ variabel random diskrit"} \quad (2.1)$$

"Jika X adalah variabel random kontinu dengan fungsi densitas probabilitas $f(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \text{ jika } X \text{ variabel random kontinu"} \quad (2.2)$$

Sifat-sifat ekspektasi adalah sebagai berikut:

1. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

2. $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

3. $E(aX + b) = aE(X) + b$, a dan b adalah konstan

4. $E(XY) = E(X)E(Y)$, jika X dan Y independen

Sifat-sifat Variansi adalah sebagai berikut:

1. $Var\ (X)\ \geq\ 0$

2. $Var\ (X + a)\ =\ Var\ (X)$

3. $Var\ (aX - bY)\ =\ a2\ Var\ (X)\ +\ b2\ Var\ (Y) - 2ab\ Cov\ (X,Y)$

Variansi dari variabel random X didefinisikan sebagai :

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= (EX^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= (EX^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= (EX^2) - \mu^2
\end{aligned}
$$

$$Var(X) = (EX^2) - \mu^2 \tag{2.3}$$

Karena $\mu = E(X)$

Sehingga diperoleh $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$ (2.4)

Sifat kovariansi:

1. $Cov(aX, bY)\ =\ ab\ Cov(X,Y)$

2. $Cov(X + a, Y + b)\ =\ Cov(X,Y)$

3. $Cov(X, aX + b) = a\,Var(X)$

Dimana X dan Y adalah variabel random dan a, b adalah konstan.

Kovariansi dari variabel random X dan Y didefinisikan sebagai (Baim dan Engelhardt, 1992:174)

$$cov(X,Y) = E[(X - \mu_x)(Y - \mu_Y)] \tag{2.5}$$

Jika Xdan$Y$ independen, didapat

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \tag{2.6}$$

$$= 0$$

Notasi lain untuk kovarians adalah σ_{XY}

2.3 Matriks

Definisi 2.3 (Anton, 1991:22)

"Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut. Jika A_{mxn} adalah sebuah matriks dengan jumlah baris m dan kolom n, maka a_{ij} menyatakan entri yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A".

Jadi sebuah matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dimana a_{ij} adalah anggota matriks pada baris ke-i dan kolom ke-j dalam matriks *A.*

2.4 Operasi Matriks

Operasi pada matriks pada dasarnya sama dengan operasi-operasi matematika pada umumnya, operasi pada matriks antara lain:

1. Penjumlahan Matriks

   Definisi penjumlahan matriks (Anton, 2000: 47)

   "Jika A dan B adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota A yang berpadanan, dan selisih A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota B yang berpadanan"

   Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambah atau dikurangkan.

   $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$

2. Perkalian Matriks

   a. Perkalian matriks dengan scalar

      Definisi perkalian matriks dengan skalar(Anton, 2000:48)

      "*Jika A adalah sembarang matriks dan c adalah sembarang skalar, maka hasil kali cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c*"

$A = [a_{ij}]$maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij}$$

$$= ca_{ij}$$

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} . c$$

$$A.c = \begin{bmatrix} p.c & q.c \\ r.c & s.c \end{bmatrix}$$

Dengan *c* adalah scalar

b. Perkalian matriks dengan matriks

Definisi perkalian dua matriks (Anton, 2000:48)

"Jika A adalah matriks m x r dan B adalah matriks n x r, maka hasil kali AB adalah matriks m x n yang anggotanya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari anggota dalam baris i dan kolom j dari AB, pilih baris i dari matriks A dan kolom j matriks B. Kalikan anggota yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya"

Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks umum *m x r* dan $B = [b_{ij}]$ adalah suatu matriks umum $r\ x\ n$ maka sebagaimana yang diilustrasikan, anggota $(AB)_{ij}$ pada baris *i* dan kolom *j* dari *AB* diberikan:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rj} & \ldots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

c. Matriks invers

Definisi matriks invers (Anton da Rorres, 2004)

"Jika A adalah suatu matriks kuadrat, dan jika kita dapat mencari matriks A^{-1} *sehingga* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, *maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan* A^{-1} *dinamakan invers dari A"*

Invers matriks A adalah merupakan matriks kebalikan dari A, hal tersebut dapat dinyatakan dengan simbol A^{-1}. Adapun formulasi invers dinyatakan sebagai berikut :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\ (A)$$

dimana :

$|A|$ = determinan A

$adj\ (A)$ = adjoint A = transpose dari matriks kofaktor

Invers matriks A merupakan kebalikan dari matriks A-nya, maka hasil perkalian antara matriks A dengan inversnya akan menghasilkan Identitas (I).

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

Dimana:

A^{-1} = invers matriks A

A = matriks A

I = matriks identitas

Contoh untuk matriks dengan ordo 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Dengan syarat $ad - bc \neq 0$

Perhitungan invers matriks dengan ordo *n* dapat dilakukan dengan memanfaatkan eliminasi *Gauss Jordan* yaitu operasi baris elementer.

Susun matriks sedemikian sehingga seperti dibawah ini:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Matriks sebelah kiri adalah matriks *A* dan sebelah kanan adalah matriks identitas. Kemudian dilakukan operasi baris elementer sedemikian sehingga matriks sebelah kiri menjadi matriks identitas dan matriks pada sebelah kanan akan menjadi invers matriks *A*.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Sebagaimana yang diilustrikan maka matriks pada sebelah kanan merupakan invers dari matriks *A*.

2.5 Program Linier

Definisi 2.4 Program Linier (Cornuejols 2006)

"*Program linier adalah cara mengoptimumkan suatu fungsi linier yang memenuhi kendala-kendala yang ada, baik kendala berbentuk kesamaan maupun kendala ketidaksamaan*".

Bentuk umum model program linier:

1. Memaksimalkan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

   Dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b, \;\; i = 1,2,\dots,m$

   $x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$

2. Meminimalkan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

   Dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \;\; i = 1,2,\dots,m$

   $x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,\dots,n$

   Dimana Z : fungsi tujuan

   c_j : koefisien fungsi tujuan

   x_j : variabel keputusan

   b_i : *right-hand-side*

Masalah program linier yang memuat tiga peubah atau lebih tidak dapat dibentuk menjadi masalah dengan dua peubah, jadi menggunakan metode simpleks

2.6 Metode Simpleks

Salah satu teknik penentuan solusi optimal yang digunakan dalam pemrograman linier adalah metode simpleks. Penentuan solusi optimal menggunakan metode simpleks didasarkan pada teknik eliminasi *Gauss Jordan*.

Penentuan solusi optimal dilakukan dengan memeriksa titik ekstrim satu per satu dengan perhitungan iterative.Sehingga penentuan solusi optimal dengan metode simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi.Iterasi ke-i tergantung pada iterasi sebelumnya. Dalam menyelesaikan permasalahan program linier dengan metode simpleks, bentuk dasar yang digunakan harus berupa bentuk standard yang memenuhi ketentuan berikut ini:

a. Seluruh pembatas linier harus berbentuk persamaan dengan ruas kanan yang non-negatif
b. Seluruh peubah keputusan harus merupakan peubah non-negatif
c. Fungsi tujuannya dapat berupa maksimasi atau minimasi

Beberapa hal yang dapat dilakukan untuk mengubah bentuk permasalahan program linier yang belum standard ke dalam bentuk standard permasalahan program linier sesuai dengan tiga ketentuan di atas adalah:

1. Pembatas linier
   a. Pembatas linier bertanda "≤" dapat dijadikan "=" dengan cara menambahkan ruas kiri dari pembatas linier itu dengan peubah penambah. Contoh:

      Kendala $3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 9$ dapat diubah menjadi

      $3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 9$ dengan $s_1 \geq 0$
   b. Pembatas linier bertanda "≥" dapat dijadikan suatu persamaan "∞" dengan cara mengurangkan ruas kiri dari pembatas linier dengan peubah penambah negative dan menambahkan peubah buatan.

Contoh:

Kendala $3x_1 - x_2 + 7x_3 \leq 14$ dapat diubah menjadi

$3x_1 - x_2 + 7x_3 + s_2 + A = 14$ dengan $s_2 \geq 0$

c. Ruas kanan dari suatu persamaan dapat dijadikan bilangan non-negatif dengan cara mengalikan kedua ruas dikalikan -1.

d. Arah pertidaksamaan berubah apabila kedua rumus dikalikan -1.

e. Pembatas linier dengan pertidaksamaan yang ruas kirinya berada dalam tanda mutlak dapat diubah menjadi pertidaksamaan.

2. Peubah keputusan

Suatu peubah keputusan x_i yang tidak terbatas dalam tanda dapat dinyatakan sebagai dua peubah keputusan non-negatif dengan menggunakan substitusi

$$x_i = x_i^2 - x_j^2$$

Dengan $x_i^2 \geq 0$ dan $x_j^2 \geq 0$

Selanjutnya substitusi ini harus dilakukan pada seluruh pembatas linier dari fungsi tujuannya

3. Fungsi Tujuan

Walaupun permasalahan model program linier dapat berupa maksimasi atau minimasi, kadang diperlukan perubahan dari satu bentuk ke bentuk lainnya. Dalam hal ini, maksimasi dari suatu fungsi adalah sama dengan minimasi.

2.7 Pembentukan Tabel Simpleks

Berikut langkah-langkah penyelesaian program linier dengan menggunakan metode simpleks.

1. Mengubah semua kendala ke *bentuk Kanonik Simpleks* dengan menambah perubah atau variabel *Slacs S* ke fungsi tujuan dan diberi koefisien 0
2. Jika dalam matriks A pada fungsi kendala sudah terbentuk matriks identitas maka disusun tabel awal.
3. Jika belum terbentuk matriks identitas, maka matriks identitas dimunculkan dengan menambah peubah semu (*A*) kedalam fungsi tujuan yang diberi nilai *M* (bilangan yang besar). Jika sudah terbentuk identitasnya, baru disusun tabel simpleksnya.
4. Jika ada $Z_j - C_j > 0$, maka dibuat tabel baru dengan cara:
   a. Menentukan kolom kunci dengan memilih nilai $Z_j - C_j$ terbesar untuk pola minimum, $Z_j - C_j$ terkecil untuk pola maksimum.
   b. Pada kolom ke-k dilakukan pemeriksaan a_{ik}
   c. Hitung nilai R_i untuk nilai a_{ik} yang positif
5. Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilik nilai R_i terkecil.
6. Menyusun tabel baru dimulai dari baris kunci baru dengan cara$\bar{a}_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}}$ dan baris yang lain dengan cara elemen baris lama - $a_{ik} \times$ elemen baris r baru.

7. Jika sudah optimum berarti selesai.

   Ciri keoptimuman tabel dibedakan dalam 2 bentuk:

   a. Pola maksimum

      Tabel sudah maksimum jika $Z_j - C_j \geq 0$ untuk semua j

   b. Pola minimum

      Tabel sudah minimum jika $Z_j - C_j \leq 0$ untu semua j

2.8 Analisa Multivariat

Definisi 2.5 Vektor Random dan Matriks Data Multivariat (Johnson dan Wichreen, 1958: 56)

"Secara umum data sampel analisis multivariate dapat digambarkan dalam bentuk sebagai berikut. Hal ini dilakukan untuk mempermudah penghitungan, maka digunakan bantuan matriks dalam merumuskan masalah analisis.

	Variabel 1	*Variabel2*	...	*Variabel j*	...	*Variable p*
Objek-1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1j}	...	X_{1p}
Objek-2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2j}	...	X_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Objek-i	X_{i1}	X_{i2}	...	X_{ij}	...	X_{ip}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Objek-n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nj}	...	X_{np}

Atau dapat ditulis dalam bentuk matriks dengan n baris dan p kolom sebagai berikut :

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1j} & \dots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2j} & \dots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{i1} & X_{i2} & \dots & X_{ij} & \dots & X_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \dots & X_{nj} & \dots & X_{np} \end{bmatrix}$$

Dengan X_{ij} : data objek ke-i pada variabel ke-j

n : banyaknya objek

p : banyaknya variabel

Sebagai alternatif dapat juga ditulis X = (X_{ij}), $i = 1,2,\dots,n$ dan $j = 1,2,\dots,p$". (Johnson dan Wichreen, 1958: 56)

2.9 Korelasi

Definisi 2.5 (Bain dan Engelhardt, 1992: 178)

"Jika X danY adalah variabel random dengan varians σ_X^2 dan σ_Y^2 dan kovarians $\sigma_{XY} = cov(X,Y)$, maka koefisien korelasi antara X dan Y adalah

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \text{''} \tag{2.7}$$

Variabel random *X* dan *Y* dinyatakan tidak berkorelasi jika $\rho = 0$

Jika ρ adalah koefisien korelasi dari *X*dan *Y*, maka

-1 ≤ ρ ≤ 1

Dalam bentuk matriks

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Entri pada diagonal adalah 1, karena $\rho_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{\sigma_i \sigma_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1$

2.10 Mean dan Variansi Vektor Random

Definisi 2.6 Mean dan Variansi Vektor Random (Johnson dan Wichren, 1982: 70)

"Vektor random adalah vektor yang anggotanya adalah variabel random. Sedangkan vektor matrik adalah matrik yang anggotanya adalah variabel random." Harga harapan dari random matriks (vektor) adalah matriks (vektor) yang terdiri dari harga harapan dari setiap elemennya. Mean dan kovarians vektor random X dengan ordo ρ x 1dapat ditulis sebagai matriks yaitu :

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_P) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_P \end{bmatrix}$$

$$= \mu$$

$$\sum = E(X-\mu)(X-\mu)^T$$

$$= E\left[\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_P-\mu_P \end{bmatrix} 1(X_1-\mu_1 \quad \dots \quad X_P-\mu_P)\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \dots & (X_1-\mu_1)(X_P-\mu \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \dots & (X_2-\mu_2)(X_2-\mu \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (X_P-\mu_P)(X_1-\mu_1) & (X_P-\mu_P)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_P-\mu_P)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \dots & E(X_1-\mu_1)(X_P - \\ E\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \dots & E(X_2-\mu_2)(X_2 - \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ E(X_P-\mu_P)(X_1-\mu_1) & E\ (X_P-\mu_P)(X_2-\mu_2) & \cdots & E\ (X_P-\mu_P)^2 \end{bmatrix}$$

$$cov(X) = \sum$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Dengan $\sigma_{ii}, i = 1, \dots, p$ *adalah varians ke-p*

$\sum$ menunjukkan matriks varians kovarians.

2.11 Kombinasi Linier

Definisi 2.7 Kombinasi Linier (Howard Anton, 1995: 105)

"Sebuah vektor $\boldsymbol{w}$ *dinamakan kombinasi linier dari vektor* $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}$, *jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk*

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

Dengan $k_1, k_2, \dots, k_r$ *adalah scalar".*

2.12 Distribusi Normal

Definisi 2.8 (Bain dan Engelhardt, 1992:118)

"Distribusi normal bergantung pada dua parameter μ dan σ^2 *yaitu mean dan variansi. Fungsi pada distribusi normal akan dinyatakan dengan* $n\ (x, \mu, \sigma)$. *Distribusi normal adalah distribusi variabel kontinu dengan fungsi matematis adalah sebagai berikut:*

$$n\ (x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, untuk -\infty < x < \infty\text{"} \quad (2.9)$$

dengan π = 3,14159… dan *e* = 2,71828

Sifat-sifat dari distribusi normal, yaitu:

1. Variabel random X terdapat dalam interval $-\infty < x < \infty$.
2. Hanya memiliki dua parameter μ dan σ^2 yaitu *mean* dan *variansi* distribusi. Dalam penerapan statistik μ dan σ^2 adalah dua parameter yang paling sering dipakai dan ini alasan utama distribusi normal menjadi terkenal.
3. Distribusi normal berbentuk lonceng yang simetri terhdap rata-rata

2.13 *Lagrange Multiplier* (Purcell dan Varberg, 1987: 303)

Fungsi Lagrange sering digunakan untuk menyelesaikan masalah optimisasi (penentuan harga ekstrim), di mana terdapat batasan-batasan (*constrains*) tertentu.Untuk keperluan ini, tersedia metode Pengali Lagrange (*Lagrange Multiplier*).

1. **Satu Pengali Lagrange**

   Prinsip ingin mencari harga ekstrim (optimisasi) fungsi $f\,(x,y)$ dengan *constrains* tertentu yang harus dipenuhi yakni $g\,(x,y) = 0$

   Cara: dibentuk Fungsi Lagrange $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x,y)$

   Syarat ekstrimum $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ dan $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ (yang tak lain adalah $g(x,y) = 0$). Parameter λ inilah yang dinamakan pengali *Lagrange*.

2. **Lebih Dari Satu Pengali Lagrange**

   Metode pengali Lagrange dapat diperluas untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan lebih dari satu *constrains*. Untuk keperluan tersebut sebagai parameter dapat dipilih λ, μ atau parameter yang lain.

Misalkan untuk memperoleh nilai ekstrim $f(x, y, z)$ dengan *constrains* $\mathrm{g}(x, y, z) = 0$ dan $h(x, y, z)$ maka sebagai fungsi lagrange adalah :

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Cara penyelesaiannya adalah

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda}\ dan\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$$

Metode ini dapat diperluas untuk *n* variabel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan *n* kendala

$$\emptyset_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \emptyset_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \emptyset_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sebagai fungsi limit lagrangenya adalah:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \cdots + \lambda_n \phi_n$$

Dengan cara penyelesaian

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0\ , \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_n} = 0,$$

Dengan$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah pengali lagrange.

2.14 Investasi

Investasi adalah penanaman modal untuk satu atau lebih aktiva yang dimiliki dan biasanya berjangka waktu lama dengan harapan mendapatkan keuntungan di masa-masa yang akan datang. Pihak-pihak yang melakukan investasi disebut dengan investor.Investor pada umumnya digolongkan menjadi dua, yaitu investor individual (*individual investors*) dan investor institusional (*institusional investors*).Investor individual terdiri dari individu-individu yang melakukan aktifitas investasi. Sedangkan investor institusional biasanya terdiri dari perusahaan-perusahaan asuransi, lembaga penyimpanan dana (bank dan lembaga simpan-pinjam), lembaga dana pension, maupun perusahaan investasi.

Pada dasarnya tujuan orang melakukan investasi adalah untuk menghasilkan sejumlah uang. Secara lebih khusus menurut (Tandelilin, 2001: 5) ada beberapa alas an mengapa seseorang melakukan investasi, antara lain:

a. Untuk mendapatkan kehidupan yang lebih layak di masa depan, seseorang yang bijaksana akan berpikir bagaimana meningkatkan taraf hidupnya dari waktu ke waktu atau setidaknya berusaha bagaimana mempertahankan tingkat pendapatannya yang ada sekarang agar tidak berkurang di masa yang akan datang.
b. Mengurangi risiko inflasi

   Dengan melakukan investasi dalam pemilikan perusahaan atau objek lain, seseorang dapat menghindarkan diri dari risiko penurunan nilai kekayaan atau hak miliknya akibat adanya pengaruh inflasi.
c. Dorongan untuk menghemat pajak.

   Beberapa Negara di dunia banyak melakukan kebijakan yang bersifat mendorong tumbuhnya investasi di masyarakat melalui pemberian fasilitas perpajakan kepada masyarakat yang melakukan investasi pada bidang-bidang usaha tertentu.

Sebelum mulai investasi di pasar modal, investor harus memahami faktor-faktor di bawah ini:

a. Dana yang diinvestasikan adalah dana lebih, bukan dana yang digunakan untuk keperluan sehari-hari dan bukan dana investor.

b. Jika investor mempunyai keterbatasan baik dalam hal waktu maupun kemampuan dalam menganalisa, perusahaan efek biasanya mempunyai tenaga professional untuk membantu dalam menganalisa saham.
c. Periksa secara fundamental dari emiten, seperti kondisi keuangan, hasil observasi, dan juga faktor-faktor ekonomi makro yang akan mempengaruhi secara signifikan prospek usaha emiten.
d. Membaca laporan keuangan terlebih dahulu untuk menguatkan keyakinan dalam melakukan investasi.

Seorang investor harus melalui beberapa proses dan tahapan tertentu untuk mencapai keputusan investasi yang terbaik. Tahapan-tahapan tersebut diantaranya:

a. Menentukan kebijakan investasi

   Kebijakan investasi meliputi penentuan tujuan investasi dan besar kekayaan yang akan diinvestasikan. Tujuan investasi harus dinyatakan baik dalam tingkat keuntungan (return) maupun risiko. Jumlah dana yang diinvestasikan juga mempengaruhi return return dan risiko yang ditanggung. Di samping itu dalam proses investasi perlu dipertimbangkan preferensi risiko pemodal. Hal ini mempengaruhi jenis sekuritas yang dipilih untuk alokasi dana yang ada sehingga dapat diperkirakan distribusi dana pada berbagai instrument yang tersedia. Dengan menentukan tujuan investasi dapatditentukan pilihan instrument investasi yang dilakukan.

b. Melakukan analisis sekuritas

Analisis sekuritas berarti menilai sekuritas secara individual, dan untuk mengidentifikasi sekuritas digunakan dua filosofi berbeda, yaitu:

1. Untuk sekuritas yang mispriced (harga terlalu tinggi atau terlalu rendah) dapat dengan analisis teknikal atau analisis fundamental.
2. Untuk sekuritas dengan harga wajar, pemilihan sekuritas didasarkan atas preferensi risiko para pemodal, pola kebutuhan kas, dan lain-lain

c. Membentuk portofolio

Dari hasil evaluasi terhadap masing-masing sekuritas, dipilih aset-aset yang akan dimasukkan dalam portofolio dan ditentukan proporsi dana yang diinvestasikan pada masing-masing sekurits tersebut. Ini dilakukan dengan harapan risiko yang harus ditanggung terkurangi dan portofolio yang menawarkan return maksimum dengan risiko tertentu atau minimum risiko dengan return tertentu dapat terbentuk.

d. Merevisi portofolio

Revisi atas portofolio berarti merubah portofolio dengan cara menambah atau mengurangi saham dalam portofolio yang dianggap menarik atau tidak lagi menarik.

e. Evaluasi kinerja portofolio

Evaluasi kinerja portofolio membandingkan kinerja yang diukur baik dalam return yang diperoleh maupun risiko yang ditanggung terhadap portofolio benchmark atau pasar.

2.15 Saham

Saham (*stock*) merupakan surat berharga yang menunjukkan kepemilikan atau penyertaan pasar modal investor dalam suatu perusahaan (Fakhruddin, 2006: 13). Dengan memiliki saham suatu perusahaan, maka investor akan mempunyai hak terhadap pendapatan dan kekayaan perusahaan setelah dikurangi dengan pembayaran semua kewajiban perusahaan. Jika perusahaan hanya mengeluarkan satu kelas saham saja, saham ini disebut dengan saham biasa (*common stock*). Untuk menarik investor potensial lainnya, suatu perusahaan mungkin juga mengeluarkan kelas lain dari saham, yaitu disebut dengan saham preferen (*preffered stocks*). Saham preferen mempunyai hak-hak prioritas lebih dari saham biasa.Hak-hak prioritas dari saham preferen yaitu hak atas deviden yang tetap dan hak terhadap aktiva jika terjadi likuidasi.

2.16 *Return*

Tujuan dari investasi adalah untuk memperoleh keuntungan (*profit*).Pendapatan atau kerugian dari suatu investasi, tergantung pada perubahan harga dan jumlah aset yang dimiliki.Para investor tertarik dengan pendapatan yang cukup besar terhadap besarnya investasi awal. Return mengukur pendapatan itu, karena return dari suatu aset adalah perubahan harga dari harga awal dan return merupakan salah satu faktor yang memotivasi investor berinvestasi.

Jika seseorang menginvestasikan dananya pada waktu t_1 pada suatu aset dengan harga p_{t_1} dan harga pada waktu selanjutnya (misalnya periode satu hari, atau satu minggu atau satu bulan) $t_2$adalah p_{t_2}, maka *net return* pada periode

$t_1$dan t_2 adalah $(p_{t_2} - p_{t_1})/p_{t_1}$. *Net return* dapat digambarkan sebagai pendapatan relative atau tingkat keuntungan (*profit rate*)

Secara umum *net return geometrik* antara periode $t-1$ sampai t adalah sebagai berikut:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \qquad (2.10)$$

Dimana R_t = net return

P_t = harga investasi pada saat t

P_{t-1} = harga investasi pada saat $t-1$

Pendapatan dari kepemilikan suatu aset adalah

Pendapatan = investasi awal x *net return*

Misalnya, suatu investasi awal bernilai $1000 dan suatu *net return* adalah 0,08 maka pendapatan yang diperoleh adalah ($1000 x 0,08) = $80

2.17 Risiko Dalam Investasi

Secara umum, risiko adalah tingkat ketidakpastian akan terjadinya sesuatu atau tidak terwujudnya sesuatu tujuan pada periode waktu tertentu. Dalam bidang *financial*, risiko sering dihubungkan dengan volatilitas atau penyimpangan deviasi dari hasil investasi yang akan diterima dengan keuntungan yang diharapkan. Semakin besar volatilitas aset, maka semakin besar kemungkinan mengalami keuntungan atau kerugian.

Semakin besar *return* yang diharapkan (*expected return*) dari suatu investasi, maka semakin besar pula risiko investasinya. Apabila risiko dinyatakan sebagai seberapa jauh hasil yang diperoleh dapat menyimpang dari hasil yang diharapkan, maka digunakan ukuran penyebaran untuk mengukur risiko.Alat statstik yang digunakan sebagai ukuran penyebaran tersebut adalah varians atau standar deviasi.Semakin besar nilainya, berarti semakin besar pula penyimpangannya (risikonya semakin tinggi).

2.18 *Semideviation*

Konsep *semivariance* yang dibawa oleh Markowitz mempunyai dua macam model, yaitu *semivariance* yang dihitung dari rata-rata *return* atau *semivariance* dibawah rata-rata (*below-mean*) dan *semivariance* yang dihitung dari target *return* atau *semivariance* dibawah rata-rata disebut juga dengan *downside standard deviation* karena model ini mengambil acuan dari standar deviasi (akar kuadrat variansi) tetapi hanya memperhitungkan distribusi dibawah rata-rata sebagai ukuran risiko, atau disebut juga *semi deviation* [(Estrada,2003), (Feibel, 2003)].

Semideviation adalah ukuran dispersi untuk nilai dari suatu kumpulan data jatuh di bawah rata-rata atau target nilai yang diamati.*Semideviation* merupakan akar kuadrat dari *semivariance*, yang ditemukan oleh rata-rata penyimpangan dari nilai-nilai yang diamati yang memiliki hasil yang kurang dari rata-rata.Rumus untuk semideviation adalah sebagai berikut:

$$Semideviation = \sqrt{\frac{\sum(RP_i - RP) dimana\ (RP_i < RP)}{N}} \tag{2.11}$$

Dengan :

RP_i : Return Periode ke-i

RP : Rata-rata Return

Formula diatas menunjukkan bahwa hanya tingkat pengembalian (RP_i) dibawah rata-rata (RP) yang diperhitungkan dalam penentuan risiko, sedangkan tingkat pengembalian diatas rata-rata tidak akan menambah risiko.

2.19 *Jakarta Islamic Index* (JII)

PT. Bursa Efek Indonesia bekerja sama dengan PT. Danareksa Investment Management (DIM) meluncurkan indeks saham yang dibuat berdasarkan syariah Islam yaitu *Jakarta Islamis Index* (JII). Indeks ini diharapkan menjadi tolak ukur kinerja saham-saham yang berbasis syariah serta untuk lebih mengembangkan pasar modal syariah. Indeks merupakan satu angka yang dibuat sedemikian rupa sehingga dapat dipergunakan untuk melakukan perbandingan antara kegiatan yang sama (produksi, ekspor, hasil penjualan, jumlah uang beredar dan lain sebagainya) dalam dua waktu yang berbeda. Sedangkan saham adalah surat berharga yang dapat dibeli atau dijual oleh perorangan atau lembaga di pasar tempat surat tersebut diperjual belikan. Indeks harga saham adalah cerminan dari pergerakan harga saham untuk memberikan informasi kepada masyarakat mengenai perkembangan bursa saham yang semakin meningkat aktivitas perdagangannya (Buku Panduan Indeks Harga Saham, 2010 :2)

Jakarta *Islamic* Index diluncurkan pada tanggal 3 Juli 2000.Untuk mendapatkan data *historical* yang cukup panjang. JII dihitung mundur hingga tanggal 2 Januari 1995 sebagai hari dasar dengan nilai indeks sebesar 100 (Buku Panduan Indeks Harga Saham, 2010 :13). *Jakarta Islamic Index* terdiri dari 30 saham yang dipilih dari saham-saham syariah Islam (Buku Panduan Indeks Harga Saham, 2010 :12). Untuk menetapkan saham-saham yang masuk dalam perhitungan Jakarta Islamic Index dilakukan proses seleksi sebagai berikut (Buku Panduan Indeks Harga Saham, 2010 :13):

1. Saham-saham yang akan dipilih berdasarkan Daftar Efek Syariah (DES) yang dikeluarkan oleh Bapepam – LK.
2. Memilih 60 saham dari Daftar Efek Syariah urutan kapitalisasi pasar terbesar selama 1 tahun terakhir.
3. Dari 60 saham tersebut, dipilih 30 saham berdasarkan tingkat likuiditas yaitu nilai transaksi di pasar regular selama 1 tahun terakhir.

2.20 Indeks *Sharpe*

Indeks *Sharpe* dikembangkan oleh William Sharpe dan sering juga disebut dengan *reward-to-variability ratio*. Indeks Sharpe mendasarkan perhitungannya pada konsep garis besar pasar modal (*capital market line*) sebagai patok duga, yaitu dengan cara membagi premi risiko dengan standar deviasinya. Indeks Sharpe dapat digunakan untuk membuat peringkat dari beberapa saham berdasarkan kinerjanya. Semakin tinggi Indeks Sharpe suatu saham, maka semakin baik kinerja saham tersebut (Tendelilin, 2001 :324). Untuk menghitung Indeks Sharpe bisa menggunakan persamaan :

$$S_P = \frac{R_P}{\sigma} \tag{2.12}$$

Dengan S_P $=$ Indeks Sharpe saham

R_P $=$ Rata-rata return saham

σ $=$ Standar deviasi return saham

BAB III

METODE PENELITIAN

Dalam bab ini akan dibahas jenis dan sumber data dalam Studi Kasus, metode pengumpulan data, variabel penelitian, metode analisis data dan alat pengolahan data.

3.1 Jenis dan Sumber Data

Penelitian ini menggunakan data yang bersifat kuantitatif yaitu data yang berbentuk angka atau numerik. Objek data kuantitatif tersebut berupa indeks harga saham yang diperoleh dari www.finance.yahoo.com.

Penelitian ini menggunakan data sekunder yaitu data yang telah dikumpulkan dari lembaga pengumpul data Bursa Efek Indonesia (BEI) yang dipublikasikan kepada masyarakat pengguna data pada periode 1 Januari 2014 sampai dengan 29 September 2016.

3.2 Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Non Participant Observation,* dimana peneliti hanya mengamati data yang sudah tersedia tanpa langsung ikut serta dalam kegiatan atau proses yang sedang diteliti.

3.3 Alat Pengolahan Data

Dalam ilmu statistik banyak software yang mampu menghitung numerik yang tidak bisa dihitung dengan perhitungan manual. Perhitungan yang dulu menjadi kendala sekarang dilakukan dengan mudah dan cepat seiring berkembangnya *software* statistik yang lebih luas. Dalam penelitian digunakan alat bantu *Microsoft excel*, *Mathlab*, *SPSS* dan *winQSB* sebagai media untuk membuat simulasi dan analisis data pada kasus penelitian.

3.4 Variabel Penelitian

Penelitian ini menggunakan indeks harga saham harian *Jakarta Islamic Index* (JII) yang diambil pada periode 1 Januari 2014 sampai dengan 29 September 2016 sebagai variabel penelitian.

3.5 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literature. Disini penulis akan meneliti beberapa sumber tertulis yang sudah ada, misalkan tentang analisis peramalan, saham syariah, fungsi step, pulse, dan lainnya yang berhubungan dengan tema penelitian. Sumber yang digunakan yaitu berasal dari buku-buku, jurnal dan beberapa literatur yang berkaitan dengan penelitian ini.

3.6 Metode Analisis

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan secara non-statistik dengan membaca table-tabel, grafik-grafik atau angka yang tersedia kemudian dijabarkan dan ditafsirkan. Analisis data dengan menggunakan tiga model portofolio yaitu dengan *Mean Variance*, *Mean Absolute Deviation*, dan *Downside Deviation*. Komputasi matematis dari ketiga model matriks *covarian* hingga mendapatkan garis *efficient frontier* serta optimalisai dengan bantuan *software* Microsoft Excel. Berikut langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis data dalam penelitian ini:

1. Melakukan seleksi saham yang terdaftar pada JII

   Saham yang terpilih merupakan saham yang konsisten tergabung dalam JII selama periode yang diteliti. Dalam skripsi ini terdapat 21 saham yang konsisten dalam JII

2. Mengambil data *closing price* saham dari JII yang sudah terpilih dan menghitung nilai return.

3. Menghitung nilai kovarian/standard deviasi sesuai dengan masing-masing model portofolio.

4. Mencari bobot portofolio pada masing-masing saham dengan masing-masing model portofolio

5. Mencari portofolio optimal dengan indeks sharpe

   Setelah mendapatkan bobot proporsi saham dengan masing-masing model portofolio, selanjutnya mencari portofolio optimal masing-masing model dengan menggunakan indeks sharpe.

6. Memasukkan bobot saham yang sudah diperoleh pada tahap sebelumnya kedalam return pada investasi

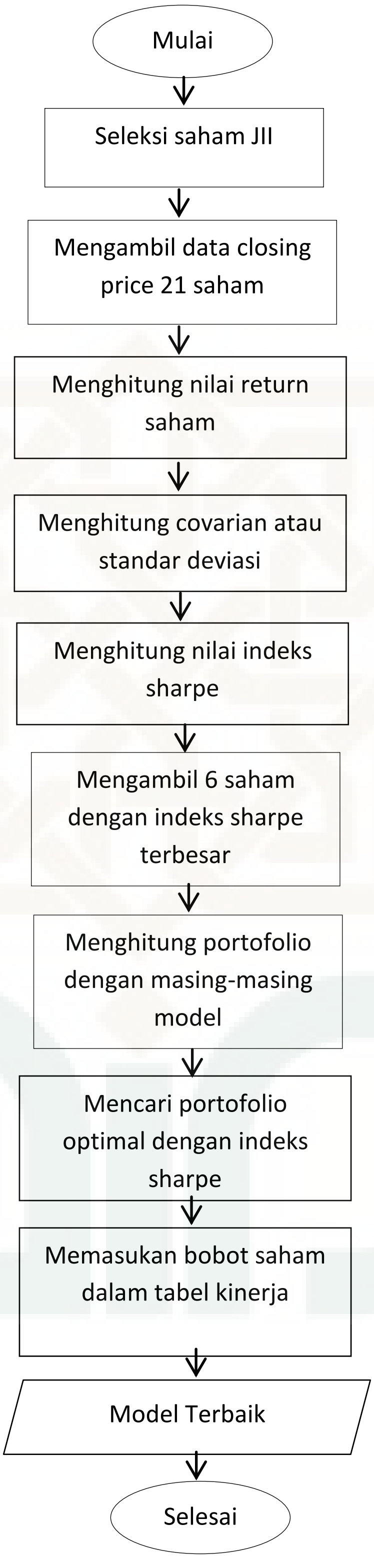
7. Membentuk tabel kinerja ketiga model portofolio

   Tabel kinerja berfungsi unuk membandingkan hasil portofolio masing-masing model dan mencari portofolio terbaik diantara ketiga model portofolio

8. Menentukan keputusan untuk memilih model portofolio yang terbaik.

   Berdasarkan tabel kinerja, dapat dipilih model portofolio optimal dan menjadi model portofolio terbaik.

3.7. *Flowchart*



Gambar.3.1: *Flowchart*

BAB IV

PEMBAHASAN

Portofolio merupakan kombinasi atau gabungan atau sekumpulan aset, baik berupa aset riil maupun aset financial yang dimiliki oleh investor. Portofolio saham pertama kali diperkenalkan oleh Harry M. Markowitz pada tahun 1952. Portofolio tersebut dibentuk dengan rata-rata dan standard deviasi *return* saham berdasarkan adanya hubungan antara saham yang membentuk portofolio. Portofolio ini kemudian dikenal dengan sebutan portofolio model Markowitz. Portofolio ini membentuk portofolio efisien yang menawarkan risiko dengan tingkat *return* tertentu. Dari beberapa portofolio efisien yang terbentuk melalui model ini dapat dipilih suatu portofolio optimal dengan standard deviasi terkecil yang mengukur risiko pada portofolio. Untuk memperoleh portofolio efisien tersebut dapat menggunakan beberapa metode pendekatan.

4.1 Portofolio Markowitz (*Mean-Variance*)

Harry M. Markowitz mengembangkan suatu teori pada decade 1950-an yang disebut dengan Teori Portofolio Markowitz. Teori Markowitz menggunakan beberapa pengukuran statistik dasar untuk mengembangkan suatu rencana portofolio, diantaranya *expected return*, standard deviasi baik sekuritas maupun portofolio, dan korelasi antar *return*. Teori ini memformulasikan keberadaan unsur *return* dan resiko dalam suatu investasi, dimana unsur resiko dapat diminimalisir melalui diversifikasi dan mengkombinasikan berbagai instrument investasi kedalam portofolio.

Teori Portofolio Markowitz didasarkan atas pendekatan *mean* (rata-rata) dan *variance* (varian), dimana *mean* merupakan pengukuran tingkat *return* dan varian merupakan pengukuran tingkat resiko. Teori Portofolio Markowitz ini disebut juga sebagai *mean-Variance Model*, yang menekankan pada usaha memaksimalkan ekspektasi *return* (mean) dan meminimumkan ketidakpastian resiko (varian) untuk memilih dan menyusun portofolio optimal. Model Markowitz menggunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Waktu yang digunakan hanya satu periode
2. Tidak ada biaya transaksi
3. Preferensi investor hanya didasarkan pada pengembalian yang diharapkan dan risiko dari portofolio
4. Tidak ada pinjaman dan simpanan bebas risiko

Model Markowitz hanya mempertimbangkan ekspektasi *return* dari resiko saja, maka model ini disebut *mean variance model (mean* artinya *return* ekspektasi yang banyak dihitung dengan cara rata-rata dan *variance* adalah pengukur risiko yang digunakan). Aspek yang dipertimbangkan dalam penyusunan Portofolio menggunakan *mean variance*, diantaranya :

***4.1.1 Return* Portofolio**

Return realisasi portofolio (*portfolio realized return*) merupakan rata-rata tertimbang dari return-return realisasi masing-masing sekuritas tunggal di dalam portofolio tersebut. Secara matematis, return realisasi portofolio dapat ditulis sebagai berikut:

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} (W_i R_i) \tag{4.1}$$

dengan,R_p = return realisasi portofolio

W_i= bobot atau proporsi dari sekuritas *i* terhadap seluruh sekuritas di portofolio

R_i= *return* realisasi dari sekuritas ke *i*

n = banyak sekuritas tunggal

Dalam bentuk notasi matriks, *return* portofolio dapat ditulis sebagai berikut :

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n = [w_1 w_2 \ldots w_n]$$

$$= w^T R \tag{4.2}$$

Dimana, w^T = vektor transpose (horisontal) dari w_i

R = vektor vertikal yang terdiri dari *return* aset tunggal

4.1.2 Ekspektasi *Return* Portofolio

Tingkat keuntungan yang diharapkan (ekspektasi *return*) portofolio adalah harga yang diharapkan dari suatu *return* portofolio $R_p$yaitu :

$$E(R_p) = E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)$$

$$= E(w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n)$$

$$= [w_1 w_2 \dots w_n] E \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_4 \end{bmatrix}$$

$$= w^T E(R)$$

$$= w^T \mu \tag{4.3}$$

4.1.3 Variansi Portofolio

Konsep return saja belum mencukupi untuk menganalisis hasil dari suatu portofolio, maka perlu ditambahkan ukuran risiko yang diperoleh. Besarnya risiko dapat di ukur dari penyebaran retuen saham di sekitar nilai rata-rata.Untuk menentukan besarnya risiko digunakan nilai variansi.

$$\begin{aligned}
Var(R_p) &= \sigma_p^2 \\
&= E\big(R_p - E(R_p)\big)^2 \\
&= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right)\right]^2 \\
&= E[w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n - E(w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n)]^2 \\
&= E[w_1 R_1 + \cdots + w_n R_n - w_1 E(R_1) - \cdots - w_n E(R_n)]^2 \\
&= E[w_1 R_1 - w_1 E(R_1) + \cdots + w_n R_n - w_n E(R_n)]^2 \\
&= E\big[w_1\big(R_1 - E(R_1)\big) + \cdots + w_n\big(R_n - E(R_n)\big)\big]^2 \\
&= E\Big[w_1^2\big(R_1 - E(R_1)\big)^2 + \cdots + w_n^2\big(R_n - E(R_n)\big)^2 \\
&\qquad + 2w_1 w_2\big(R_1 - E(R_1)\big)\big(R_2 - E(R_2)\big) + \cdots \\
&\qquad + 2w_{n-1} w_n\big(R_{n-1} E(R_{n-1})\big)\big(R_n - E(R_n)\big)\Big]
\end{aligned}$$

$$= w_1^2\sigma_{11} + \cdots + w_n^2\sigma_{nn} + 2w_1w_2\sigma_{12} + \cdots$$
$$+ 2w_{n-1}w_nw_{(n-1)n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_iw_j\sigma_{ij}$$

Dalam bentuk notasi, nilai ekspektasi dan varians dari return portofolio dapat ditulis sebagai berikut :

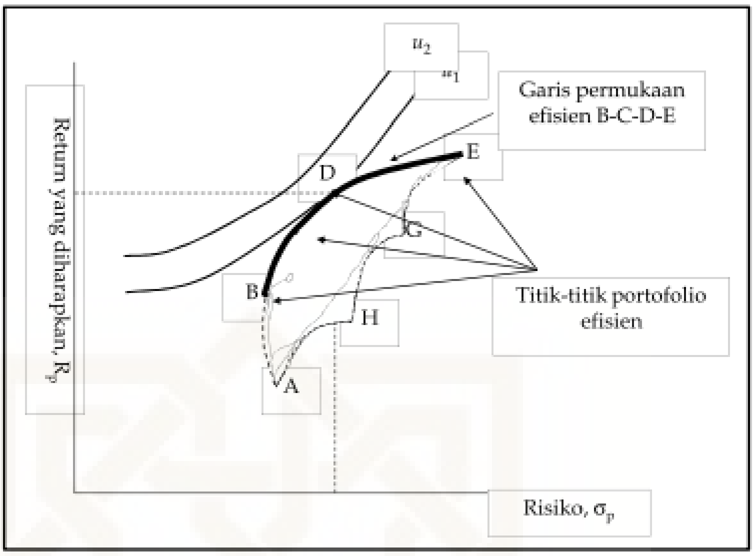
$$\sigma_p^2 = [w_1 \quad \cdots \quad w_{1.n}] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \cdots & \sigma_{n.n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \vdots \\ w_{n.1} \end{bmatrix}$$
$$= w^T \sum w \quad (4.4)$$

Dimana $w = (w_1 \ldots w_{1.n})^T$ menunjukkan bobot aset-aset yang terbentuk dalam portofolio. Komposisi dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham, apabila dijumlahkan haruslah sama dengan satu, yakni $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

4.1.4 *Efficient Frountier*

Suatu portofolio dikatakan efisien apabila dibandingkan dengan portofolio lain memenuhi kondisi sebagai berikut:

1. Menawarkan tingkat keuntungan yang lebih besar dengan resiko yang sama, atau
2. Menawarkan resiko yang lebih kecil dengan tingkat keuntungan yang sama.



Gambar 4.1.*Efficient Frountier*

Rangkaian portofolio yang efisien akan membentuk permukaan yang efisien. Dengan demikian, portofolio-portofolio yang berada di bawah *efficient frontier* merupakan portofolio yang tidak efisien. Titik A, H dan G merupakan portofolio yang tidak efisien karena terletak dibawa garis permukaan efisien.

4.1.5 Model Portofolio *Mean Variance* Markowitz

Para investor selalu dihadapi dengan tantangan mengenai bagaimana melaksanakan manajemen risiko dan manajemen pendapatanatau *return* dengan baik. Hal ini terjadi karena risiko tidak mudah dikuantifikasikan dan juga tidak mudah dikendalikan, namun risiko tersebut dapat dikurangi dengan cara diversifikasi investasi. Diversifikasi dilakukan dengan memilih berbagai macam aset keuangan untuk diinvestasikan. Harry H. Markowitz (1959) telah membuktikan bahwa risiko berinvestasi dapat dikurangi dengan menggabungkan beberapa aset kedalam sebuah portofolio atau dengan kata lain melakukan diversifikasi secara optimal.

4.1.6 Portofolio Optimal

Pemilihan portofolio oleh investor menurut pemodelan Markowitz, didasarkan pada preferensi mereka terhadap *return* yang diharapkan dan risiko masing-masing portofolio. Dalam teori portofolio dikenal adanya konsep portofolio efisien dan portofolio optimal. Portofolio efisien merupakan portofolio yang menyediakan *return* maksimal bagi investor dengan risiko tertentu atau portofolio yang menawarkan risiko terendah dengan tingkat *return* tertentu, sedangkan portofolio optimal adalah portofolio yang dipilih preferensi investor dari sekian banyak pilihan yang ada pada portofolio efisien.

Portofolio *mean-varian* meminimalkan risiko berdasarkan tingkst *expected return* portofolio tertentu, sehingga secara matematis, portofolio metode *mean-variance* Markowitz dapat diformulasikan sebagai berikut:

Minimize $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$

Dengan kendala:

$\sum_{i=1}^{n} w_i r_i = R_p$

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

$$0 \leq w_i \leq 1, i = 1, \dots, n \tag{4.5}$$

Dengan $i \neq j$, $i = 1,2, \dots, n$, $j = 1,2, \dots, n$ dan R_p adalah *return* dari portofolio *mean-variance.*

4.1.7 Pembobotan Portofolio *Mean Variance* Model Markowitz

Metode *Mean Variance* ini pertama kali diperkenalkan oleh Harry Markowitz pada tahun 1959.*Mean-Variance portofolio* didefinisikan sebagai portofolio yang memiliki varians minimum diantara keseluruhan kemungkinan portofolio yang dapat dibentuk (Abdurrakhman, 2007: 52). Jika diasumsikan preferensi investor terhadap risiko adalah *risk averse* (menghindar risiko), maka portofolio yang memiliki *mean variance* efisien (*mean variance efficient portofolio*) adalah portofolio yang memiliki varians minimum dari mean returnnya. Hal tersebut sama dengan mengoptimalisasi $w = (w_1 \ldots w_N)^T$ berdasarkan mean return dari varians yang diberikan.

Vektor pembobotan $\boldsymbol{w}$ digunakan agar portofolio yang dibentuk mempunyai varians yang minimum berdasarkan dua batasan yaitu :

1) Spesifikasi awal dari mean return μ_p harus tercapai yaitu $w^T\mu$
2) Jumlah proporsi dari portofolio yang terbentuk sama dengan 1 yaitu $w^T 1_N = 1$ dengan 1_N adalah vektor satu dengan dimensi N x 1.

Permasalahan optimisasi dapat diselesaikan dengan fungsi Lagrange:

$$L \quad = w^T \sum w + \lambda_1\left(\mu_p + w^T\mu\right) + \lambda_2(1 - w^T 1_N) \tag{4.6}$$

Dengan: L = fungsi Lagrange

λ = faktor pengali Lagrange

Turunan parsial dari L terhadap w adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial w} = w^T \sum w + \lambda_1\left(\mu_p + w^T\mu\right) + \lambda_2(1 - w^T 1_N)$$

$$= 2\sum w - \lambda_1\mu - \lambda_2 1_N$$

Hasil dari turunan parsial dari *L* terhadap *w* disamakan dengan 0

$$2\sum w - \lambda_1\mu - \lambda_2 1_N = 0$$

$$2\sum w = \lambda_1\mu + \lambda_2 1_N$$

$$\sum w = \frac{1}{2}(\lambda_1\mu + \lambda_2 1_N)$$

$$w = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2 1_N) \qquad (4.7)$$

Turunan parsial dari *L* terhadap λ_1 adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} = w^T \sum w + \lambda_1\left(\mu_p + w^T\mu\right) + \lambda_2(1 - w^T 1_N)$$

$$= \mu_p + w^T\mu$$

Hasil dari turunan parsial dari *L* terhadap λ_1 disamakan dengan 0

$$\mu_p + w^T\mu = 0$$

$$\mu_p = w^T\mu$$

$$\mu_p = \mu^T w \qquad (4.8)$$

Substitusi persamaan (4.7) ke persamaan (4.8) :

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu^T w \\ &= \mu^T \left(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2 1_N)\right) \\ &= \frac{1}{2}\mu^T(\Sigma^{-1}\lambda_1\mu + \Sigma^{-1}\lambda_2 1_N) \\ &= \frac{1}{2}\lambda_1\mu^T\Sigma^{-1}\mu + \frac{1}{2}\lambda_2\mu^T\Sigma^{-1}1_N \end{aligned}$$

Misal $a = \mu^T\Sigma^{-1}\mu$

$b = \mu^T\Sigma^{-1}1_N$

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{1}{2}\lambda_1 a + \frac{1}{2}\lambda_2 b \\ 2\mu_p &= \lambda_1 a + \lambda_2 b \end{aligned} \tag{4.9}$$

Turunan parsial dari L terhadap λ_2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\lambda_2} &= w^T \sum w + \lambda_1\left(\mu_p + w^T\mu\right) + \lambda_2(1 - w^T 1_N) \\ &= 1 - w^T 1_N \end{aligned}$$

Hasil dari turunan parsial dari L terhadap λ_2 disamakan dengan 0

$$\begin{aligned} 1 - w^T 1_N &= 0 \\ 1 &= w^T 1_N \\ &= 1_N^T w \end{aligned} \tag{4.10}$$

substitusi persamaan (4.7) ke persamaan (4.10)

$$\begin{aligned} 1 &= 1_N^T w \\ &= 1_N^T \left(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_2 1_N)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} 1_N^T (\lambda_1 \Sigma^{-1} \mu + \lambda_2 \Sigma^{-1} 1_N)$$

$$= \frac{1}{2} \lambda_1 1_N^T \Sigma^{-1} \mu + \frac{1}{2} \lambda_2 1_N^T \Sigma^{-1} 1_N$$

Misal $b = \mu^T \Sigma^{-1} 1_N$

$= 1_N^T \Sigma^{-1} \mu$

$c = 1_N^T \Sigma^{-1} 1_N$

$$1 = \frac{1}{2} \lambda_1 b + \frac{1}{2} \lambda_2 c$$

$$2 = \lambda_1 b + \lambda_2 c \tag{4.11}$$

Dengan metode eliminasi pada persamaan (4.9) dan (4.11) maka didapatkan nilai λ_1 dan λ_2, yaitu :

$$\lambda_1 = \frac{2(b - \mu_p c)}{b^2 - ac} \tag{4.12}$$

$$\lambda_2 = \frac{2(\mu_p b - a)}{b^2 - ac} \tag{4.13}$$

Substitusi persamaan (4.12) dan (4.13) pada persamaan (4.7)

$$w = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda_1 \mu + \lambda_2 1_N)$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \left(2 \left(\frac{(b - \mu_p c)}{b^2 - ac} \right) \mu + 2 \left(\frac{(\mu_p b - a)}{b^2 - ac} \right) 1_N \right)$$

$$= \Sigma^{-1} \left(\left(\frac{(b - \mu_p c)}{b^2 - ac} \right) \mu + \left(\frac{(\mu_p b - a)}{b^2 - ac} \right) 1_N \right) \tag{4.14}$$

Dengan $a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$

$b = \mu^T \Sigma^{-1} 1_N$

$c = 1_N^T \Sigma^{-1} 1_N$

Σ^{-1} adalah invers matriks varians kovarians.

4.2 *Mean Absolute Deviation* (MAD)

Konno dan Yamazaki memperkenalkan optimisasi portofolio *Mean Absolute Deviation* yang berbentuk *linier programming*, sebagai alternatif dari teknik portofolio Markowitz yang berbentuk *quadratic programming*. Mereka juga menyatakan bahwa model MAD mempunyai tiga keuntungan, yaitu :

a. Formula MAD tidak membutuhkan matriks kovarian dari return saham karena formula ini dihitung dengan menggunakan program linier
b. Masalah program linier lebih mudah diselesaikan dari pada *quadratic programming* apalagi pada masalah skala besar
c. Portofolio MAD mempunyai saham yang lebih sedikit. Saham yang lebih sedikit menunjukkan biaya transaksi yang lebih rendah.

4.2.1 *Return* Ekspektasi dan Risiko Portofolio

Dengan menggunakan data *historis*, *return* ekspektasi dihitung berdasarkan cara aritmetika. Dimisalkan terdapat tiga saham yaitu saham A, saham B dan saham C.

$$E(R_A) = \overline{R_A}$$

$$E(R_B) = \overline{R_B}$$

$$E(R_C) = \overline{R_C}$$

Dengan :

$E(R_A)$ = *return* ekspektasi sekuritas A

$E(R_B)$ = *return* ekspektasi sekuritas B

$E(R_C)$ = *return* ekspektasi sekuritas C

$\overline{R_A}$ = *mean return* sekuritas A

$\overline{R_B}$ = *mean return* sekuritas B

$\overline{R_C}$ = *mean return* sekuritas C

Risiko dihitung sebesar varian dari *return* selama *n*-periode. Untuk periode ≥ 30 maka menggunakan *n*.

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{A_i} - \overline{R_A})^2}{n}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{B_i} - \overline{R_B})^2}{n}$$

$$\sigma_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{C_i} - \overline{R_C})^2}{n}$$

Sedangkan jika periode < 30 menggunakan $n - 1$

$$\sigma_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{A_i} - \overline{R_A})^2}{n - 1}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{B_i} - \overline{R_B})^2}{n - 1}$$

$$\sigma_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(R_{C_i} - \overline{R_C})^2}{n-1}$$

Dengan :

σ_A^2 = risiko sekuritas A

σ_B^2 = risiko sekuritas B

σ_C^2 = risiko sekuritas C

R_{A_i} = *return* sekuritas A periode ke *i*

R_{B_i} = *return* sekuritas B periode ke *i*

R_{C_i} = *return* sekuritas C periode ke *i*

$\overline{R_A}$ = *mean return* sekuritas A

$\overline{R_B}$ = *mean return* sekuritas B

$\overline{R_C}$ = *mean return* sekuritas C

n = banyaknya periode sekuritas

Untuk Kovarian dari *return* saham *A* dan *B*

$$Cov\ \sigma_{A,B} = \sigma_{R_A,R_B}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{[(R_{A1} - E(R_A))(R_{B1} - E(R_B))]}{n-1} \tag{4.15}$$

Maka *return* dari portofolio dengan n sekuritas adalah

$$R_p \quad = w_a R_A + w_b R_B + w_c R_C + \cdots + w_n R_N \tag{4.16}$$

Keterangan:

R_p = *return* dari portofolio

w_a = porsi sekuritas A

w_b = porsi sekuritas B

w_c = porsi sekuritas C

w_n = porsi sekuritas n

R_A = *return* sekuritas A

R_B = *return* sekuritas B

R_C = *return* sekuritas C

R_n = *return* sekuritas n

Return ekspektasi nya adalah

$$E(R_p) = E(w_a R_A) + E(w_b R_B) + \cdots + E(w_n R_N)$$

Nilai ekspektasi suatu variabel dikalikan dengan suatu konstanta sama dengan nilai konstantanya dikalikan dengan nilai ekspektasi variabelnya, yaitu $E(w_a R_A)$ adalah sama dengan $w_a E(R_A)$ dan $E(w_b R_B)$ adalah sama dengan $w_a E(R_B)$, maka :

$$E(R_p) \quad = w_a E(R_A) + w_b E(R_B) + \cdots + w_n E(R_N) \tag{4.17}$$

Salah satu yang dapat mengukur risiko adalah standard deviasi, yang merupakan akar kuadrat dari varian nilai *return* sekuritas. Dengan demikian standard deviasi *return* portofolio yang merupakan risiko portofolio dapat ditulis sebagai

$$Var(R_p) = \sigma_p^2$$

$$Var(R_p) = E[R_p - E(R_p)]^2 \quad (4.18)$$

Substitusikan (R_p) yang ada dirumus (4.16) dan $E(R_p)$ yang ada dirumus (4.17) kedalam persamaan diatas, diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(R_p) &= \sigma_p^2 \\ &= (w_a^2\sigma_a^2 + w_b^2\sigma_b^2 + \cdots + w_n^2\sigma_n^2) + (2.w_a w_b \sigma_{ab} \\ &\qquad + 2.\ w_a w_c \sigma_{ac} + \cdots + 2.w_a w_n \sigma_{an} \\ &\qquad + 2.w_b w_c \sigma_{bc} + \cdots + 2.w_b w_n \sigma_{bn} + \cdots \\ &\qquad + 2.w_{n-1} w_n \sigma_{n-1,n}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Atau dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \sum\nolimits_{i=1}^{n} w_i^2.\sigma_i^2 + \sum\nolimits_{i=1}^{n} \sum\nolimits_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} w_i w_i \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Bagian pertama dan kedua dapat digabungkan sehingga menjadi bentuk:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \quad (4.20)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}}$$

Ini menunjukkan bahwa risiko portofolio merupakan akar dari penjumlahan semua varian dan kovarian dan dikalikan dengan proporsi masing-masing sekuritas.

4.2.2 Portofolio Optimal *Mean Absolute Deviation*

Metode *mean absolute deviation* adalah model-model yang meminimalkan *mean absolute deviation*, yaitu

Meminimalkan : $w(x) = \left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j \,.\, X_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j \,.\, X_j\right]\right|\right]$ (4.21)

Dengan kendala-kendala sebagai berikut :

$$\sum_{j=1}^{n} E(R_j)X_j \geq \rho Mo$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = Mo$$

$$0 \leq X_j \leq u_j$$

Keterangan :

R_j = rata-rata *return* saham pada periode ke-*j*

ρ = tingkat *return* minimal yang dikehendaki oleh investor

X_j = besar dana yang di investasikan dalam saham ke-j

Mo = jumlah dana yang ingin di investasikan

u_j = maksimum dana yang di investasikan pada masing-masing saham

Apabila r_{jt} merupakan variabel random R_j pada periode T maka ekspektasi *return* dari variable random

$$\begin{aligned} r_j &= E\left[R_j\right] \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T} r_{jt}}{T} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Maka persamaan MAD menjadi

$$E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j . X_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j . X_j\right]\right|\right] \qquad = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt} - r_j)X_j\right|$$

Apabila dinotasikan bahwa $a_{jt} = r_{jt} - r_j, \quad j = 1, \ldots, n \quad t = 1, \ldots, T$

Maka formula MAD menjadi

Meminimalkan : $\sum_{j=1}^{n} a_{jt} . X_j$

Dengan kendala : $\sum_{j=1}^{n} E(R_j)X_j \geq \rho Mo$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = Mo$$

$$0 \leq X_j \leq u_j$$

Jadi besar dana yang di investasika pada saham *j* (X_j) tidak boleh lebih dari maksimum dana yang diinvestasikan pada masing-masing saham (U_j).

4.2.3 Pembentukan Bobot Portofolio MAD

Untuk *n* saham dengan periode sebanyak *t*, dimana *n=1,2, ... , j* dan *t* = 1,2, ..., *T*, maka didapatkan *return* saham :

$periode\ (t)$	$S\ ke-1$	$S\ ke-2$	...	$S\ ke-j$
1	r_{11}	r_{21}	⋯	r_{j1}
2	r_{12}	r_{22}	⋯	r_{j2}
3	r_{13}	r_{23}	⋯	r_{j3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T	r_{1r}	r_{2r}	⋯	r_{jr}
$Rata-rata$	r_1	r_2	⋯	r_j

Dengan $a_{jt} = r_{jt} - r_j$ diperoleh

$periode\ (t)$	$S\ ke-1$	$S\ ke-2$	...	$S\ ke-j$
1	a_{11}	a_{21}	⋯	a_{j1}
2	a_{12}	a_{22}	⋯	a_{j2}
3	a_{13}	a_{23}	⋯	a_{j3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
T	a_{1r}	a_{2r}	⋯	a_{jr}

Untuk *t* =1 $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{j1}x_j\right| = |a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{31}x_3|$

Untuk *t*=2 $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{j2}x_j\right| = |a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{32}x_3|$

Untuk *t*=3 $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{j3}x_j\right| = |a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{33}x_3|$

⁝⁝

Untuk *t*=*T* $\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jT}x_j\right| = |a_{1T}x_1 + a_{2T}x_2 + \cdots + a_{3T}x_3|$ (4.23)

Sehingga penyelesaian formula portofolio MAD dapat ditulis :

$$\frac{\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j\right|}{T}$$

$$= \frac{\left|a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{j1}x_j\right| + \left|a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{j2}x_j\right| + |\ldots| + \left|a_{1T}x_1 + a_{2T}x_2 + \cdots + a_{jT}x_j\right|}{T}$$

(4.24)

Dengan kendala $\sum_{j=1}^{n} r_j x_j \geq \rho M_o$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = M_o$$

$$0 \leq x_j \leq u_j$$

Permasalahan optimisasi diatas dijabarkan menjadi

Meminimalkan :

$$Z = \frac{\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}x_j\right|}{T}$$

$$= \frac{\left|a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{j1}x_j\right| + \left|a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{j2}x_j\right| + |\ldots| + \left|a_{1T}x_1 + a_{2T}x_2 + \cdots + a_{jT}x_j\right|}{T}$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\left|a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{j1}x_j\right| + \left|a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{j2}x_j\right| + |\ldots| + \left|a_{1T}x_1 + a_{2T}x_2 + \cdots + a_{jT}x_j\right|\right\}$$

(4.25)

Mengingat sifat nilai mutlak $|a + b| \leq |a| + |b|$ maka persamaan diatas ditulis:

$$Z \leq \frac{1}{T}\left\{\left|a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{j1}x_j\right| + \left|a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{j2}x_j\right| + \left|a_{1T}x_1 + a_{2T}x_2 + \cdots + a_{jT}x_j\right|\right\}$$

$$\leq \frac{1}{T}\begin{Bmatrix} \left(|a_{11}|.|x_1| + |a_{21}|.|x_2| + \cdots + |a_{j1}|.|x_j|\right) \\ +\left(|a_{12}|.|x_1| + |a_{22}|.|x_2| + \cdots + |a_{j2}|.|x_j|\right) \\ + \cdots + \left(|a_{1T}|.|x_1| + |a_{2T}|.|x_2| + \cdots + |a_{jT}|.|x_j|\right) \end{Bmatrix}$$

$$\leq \frac{1}{T}\begin{Bmatrix} (|a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1T}|.x_1) + (|a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2T}|.x_2) \\ + \cdots + \left(|a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{jT}|.x_j\right) \end{Bmatrix}$$

$$\leq \begin{Bmatrix} \dfrac{\left(\left||a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1T}|\right|\right)}{T}.x_1 + \\ \dfrac{\left(\left||a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2T}|\right|\right)}{T}.x_2 + \ldots + \dfrac{\left(\left||a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{jT}|\right|\right)}{T}.x_j \end{Bmatrix}$$

Dengan mengurangkan ruas kanan dengan konstanta positif, maka nilai Z dapat ditulis :

$$Z = \begin{Bmatrix} \dfrac{\left(\left||a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1T}|\right|\right)}{T}.x_1 + \\ \dfrac{\left(\left||a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2T}|\right|\right)}{T}.x_2 \\ + \cdots + \dfrac{\left(\left||a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{jT}|\right|\right)}{T}.x_j \end{Bmatrix} - c \qquad (4.26)$$

$$Z = Z_1 - c, \quad c \geq 0$$

Jika Z_1 mencapai minimum, maka Z juga akan mencapai minimum. Hanya saja nilai minimumnya tidak sama, melainkan $\min(Z) = \min(Z_1) - c$

Dengan kendala-kendala:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_jx_j \geq \rho M_o$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_j = M_o$$

$$0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_j \leq u_j$$

Bentuk baku dari permasalahan linier di atas adalah

Meminimalkan

$$Z_1 = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\left(\left||a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1T}|\right|\right)}{T} . x_1 + \\ \dfrac{\left(\left||a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2T}|\right|\right)}{T} . x_2 \\ + \cdots + \dfrac{\left(\left||a_{j1}| + |a_{j2}| + \cdots + |a_{jT}|\right|\right)}{T} . x_j \\ +0S_1 + MA_1 + MA_2 + 0(S_2 + S_3 + \cdots + S_{j+1}) \end{matrix} \right\} \quad (4.27)$$

Dengan kendala:

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_jx_j - S_1 + A_1 = \rho M_o$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_j + A_2 = M_o$$

$$x_1 + S_2 = u_j, \qquad x_2 + S_3 = u_j, \quad \ldots \quad , x_j + S_{j+1} = u_j$$

Lalu persamaan tersebut dimasukkan ke dalam bentuk tabel simpleks

Contoh:

Seorang investor hendak menginvestasikan sejumlah uangnya sebesar Rp 100.000.000 ke dalam portofolio saham A dan saham B. Besarnya dana yang akan diinvestasikan diberi lambang x_1 dan x_2. Batasan yang ditentukan oleh investor yaitu Ia menginginkan tingkat *return* minimal sebesar 3% atau 0.03 dan maksimal dana yang diinvestasikan untuk masing-masing saham adalah sebesar Rp 70.000.000.

Jawab:

Dari data historis diperoleh:

R1 = 0.05

R2 = 0.04

C1 = 0.08

C2 = 0.1

Maka diubah dalam bentuk kanonik menjadi

Minimalkan $0.08\, x_1 + 0.1\, x_2 + 0S_1 + MA_1 + MA_1 + 0S_2 + 0S_3$

Dengan kendala $0.05\, x_1 + 0.04\, x_2 - S_1 + A_1 = 3000$

$$x_1 + x_2 = 100000$$

$$x_1 + S_2 = 70000$$

$$x_2 + S_3 = 70000$$

Masukkan kedalam tabel simpleks

C_j		0.08	0.1	0	M	M	0	0		
C_i		X_1	X_2	S_2	A_1	A_2	S_2	S_3	b_i	R_i
M	A_1	0.05	0.04	-1	1	0	0	0	3000	60000
M	A_2	1	1	0	0	1	0	0	100000	100000
0	S_2	1	0	0	0	0	1	0	70000	70000
0	S_3	0	1	0	0	0	0	1	70000	70000
Z_j		1.05M	1.04M	-M	M	M	0	0		
$Z_j - C_j$		1.05M-0.08	1.05M-0.01	-M	0	0	0	0		

Kemudian dihitung hingga optimal, pada masalah ini iterasi dilakukan sebanyak 3 iterasi.

Iterasi optimal

C_j		0.08	0.1	0	M	M	0	0		
C_i		X_1	X_2	S_2	A_1	A_2	S_2	S_3	b_i	R_i
0.08	X_1	1	0	0	0	0	1	0	3000	60000
M	X_2	0	1	0	0	1	-1	0	100000	100000
0	S_2	0	0	-1	0	-1	1	1	70000	70000
0	S_3	0	-0.08	1	-1	0.04	0.01	0.04	70000	70000

Z_j	0.08	0.01	0	0	0.1	-0.02	0		
$Z_j - C_j$	0	-0.09	0	-M	0	-0.02	0		

Pada iterasi ketiga ini, nilai $Z_j - C_j$ semua sudah bernilai negatif atau nol, maka iterasi harus dihentikan karena tabel sudah optimal. Dilihat dari kolom b_i diperoleh bobot untuk saham A sebesar 70% atau Rp 70.000.000 dan saham B sebesar 30% atau Rp 30.000.000. Bobot A ditambahkan bobot B harus sama dengan 100% atau 1.

4.3 Model *Downside Deviation*

4.3.1. *Downside Deviation*

Model *Downside Deviation* (DD) ini memiliki konsep bahwa nilai tingkat pengembalian saham yang terletak dibawah nilai yang ditentukan tersebut akan dianggap sebagai resiko. Pernyataan di atas menekankan bahwa nilai yang berada di bawah nilai nol merupakan risiko. Sehingga pada perhitungan nilai *return* yang berada di atas 0, akan dituliskan dengan angka nol.

Pada skripsi ini nilai tertentu yang dimaksud dibuat sama dengan nol (0). Penulis berasumsi bahwa selama nilai tingkat pengembalian saham tidak negatif maka tidak akan dianggap sebagai resiko. Dengan asumsi ini maka langkah-langkah untuk menyelesaikan model DD adalah:

(i) Mengganti nilai nol (0) tingkat pengembalian saham yang terdistribusi diatas nol

(ii) Membuat matriks varians Kovarians dari hasil pengolahan data diatas.

Standar deviasi yang digunakan sebagai ukuran resiko oleh Markowitz dianggap bukan sebagai ukuran resiko melainkan ukuran ketidakpastian, dan ketidakpastian tidak selalu harus menunjukkan resiko. Jika suatu sekuritas memiliki volatilitas tinggi namun tetap konsisten dengan tingkat pengembalian positif maka volatilitas seperti ini bukan sesuatu yang tidak diharapkan oleh para investor.Meskipun demikian, investor tetap lebih menyukai tingkat pengembalian yang kurang fluktuatif dibandingkan dengan tingkat pengembalian yang fluktuatif (Balzer, 2001).

Model *semi variance* kedua yang dibawakan juga oleh Markowitz adalah *semi variance* dibawah target (*below-target*). Model resiko ini berarti menggunakan distribusi tingkat pengembalian dibawah nilai target tertentu sebagai ukuran resiko. Dalam implementasinya, besarnya nilai target itu sangat tergantung pada sudut pandang investor.

4.3.2. Portofolio *Downside Deviation*

standar deviasi yang digunakan sebagai ukuran risiko oleh Markowitz dianggap bukan sebagai ukuran risiko melainkan ukuran ketidakpastian, dan ketidakpastian tidak selalu harus menunjukkan risiko. Jika suatu sekuritas memiliki volatilitas tinggi namun tetap konsisten dengan tingkat pengembalian positif maka volatilitas seperti ini bukan sesuatu yang tidak diharapkan investor.

Model *semivariance* kedua yang dibawakan oleh Markowitz adalah *semivariance* dibawah target (*below-target*). Model risiko ini berarti menggunakan distribusi tingkat pengembalian dibawah nilai target tertentu sebagai ukuran risiko. Dalam implementasinya, besarnya nilai target itu sangat tergantung pada sudut pandang investor. Benchmark risiko dapat berupa variabel acak, seperti laju inflasi dan *return* dari investasi alternatif (Balzer, 2001).

Semi variance dibawah target dikemukakan oleh Markowitz (1959) direpresentasikan dengan formula sebagai berikut:

$$S_b = \begin{cases} E[(R-b)^2 & untuk\ R < b \\ 0 & untuk\ R \geq b \end{cases} \tag{4.28}$$

Dengan b adalah nilai target yang ditentukan oleh investor. Apabila investor menganggap bahwa risiko adalah kehilangan modal (investasi), maka nilai b sebagai *benchmark* risiko dapat ditentukan sama dengan 0 (nol)

Konsep *semi variance* dibawah target memiliki konsep yang sama dengan konsep resiko *downside* (*downside risk*) yang diajukan oleh peneliti lain, seperti Fishburn (1979: 116-126), Sortino (2001:3-24), dan Feibel (2003:156). Mereka mengistilahkan konsep seperti ini dengan *Downside Deviation*, dengan formula sebagai berikut:

$$DD = \sqrt{\frac{\sum(r_i - b)^2\ dimana\ r_i < b}{N}} \tag{4.29}$$

Dengan:

DD = *Downside Deviation*

r_i = *return* saham periode ke-*i*

b = *benchmark*

n = jumlah data observasi

Formula di atas menunjukkan bahwa tingkat pengembalian yang terletak di atas nilai *benchmark* (b) tidak diperhitungkan sebagai risiko atau dianggap sama dengan 0 sedangkan tingkat pengembalian di bawah nilai *benchmark* akan menambah nilai *covariance*.

Dalam penelitian ini peneliti membatasi model *downside deviation* ini dengan menggunakan metode dari *Javier Estrada* yaitu mengubah nilai *benchmark* diganti dengan nilai ekspektasi *return*. Sehingga formula *Downside Deviation* menjadi:

$$DD = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}[R_{it} - E(R_i)]^2}{n}} \tag{4.30}$$

Keterangan:

DD = *Downside Deviation*

R_{it} = *return* saham i pada period ke-t

$E(R_i)$ = *return ekspektasian*

n = jumlah data observasi

Model DD juga masih merupakan turunan dari model MV. Perbedaan model ini dengan MV adalah dalam hal pemodelan resiko, dimana model DD mengasumsikan resiko adalah nilai tingkat pengembalian saham yang terdistribusi dibawah target nilai tertentu yang di tetapkan investor.

Pembentukan portofolio efisien model *downside deviation* hampir sama dengan metode *mean variance*, perbedaannya terletak pada perhitungan matriks varian-kovarian. Langkah untuk menghitung matriks varian-kovarian yaitu menggunakan persamaan:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left[\left(R_{it} - E(R_i).\left(R_{jt} - E\left(R_j\right)\right)\right)\right]}{n} \tag{4.31}$$

Keterangan:

σ_{ij} = Kovarian *return* antara saham i dan saham j

R_{it} = *return* saham i periode ke-t

R_{jt} = *return* saham j periode ke-t

$E(R_i)$ = *return* ekspektasian saham i

$E\left(R_j\right)$ = *return* ekspektasian saham i

n = jumlah dari observasi data historis untuk sampel banyak

Jadi pembentukan portofolio model *Downside Deviation* identik dengan model *Mean Variance*, yaitu dengan menggunakan persamaan (4.14)

BAB V

STUDI KASUS

Investasi merupakan salah satu cara yang banyak dilakukan orang untuk mencapai keuntungan dimasa mendatang. Dalam berinvestasi, investor menginginkan *return* yang optimal dan risiko seminimum mungkin. Harga saham memiliki fluktuasi yang tinggi sehingga investasi dalam sahampun sangat beresiko atau memberikan nilai *return* yang tidak pasti. Hal tersebut mendorong investor untuk menginvestasikan dananya pada beberapa aset, atau dengan kata lain investor membentuk suatu portofolio optimal yang merupakan kombinasi atau kumpulan dari beberapa saham yang terpilih untuk mendapatkan *return* yang setinggi-tingginya atau mendapatkan *return* tertentu dengan resiko yang sekecil-kecilnya.

5.1 Saham JII

Data yang digunakan pada tugas akhir ini adalah data *Jakarta Islamic Index* (JII) dengan basis periode. Data yang digunakan pada studi kasus ini adalah data harian penutupan saham JII periode 1 Januari 2014 sampai 29 September 2016.

Data saham syarian *Jakarta Islamic Index* (JII) yang terdiri atas 30 saham syariah, merupakan data sekunder yang diambil dari www.yahoofinance.com. Saham-saham yang tercatat dalam JII dipilih menggunakan teknik *purposive random sampling*.Teknik pengambilan sampel *purposive random sampling* mendasarkan pada kriteria-kriteria tersebut yaitu pertama, sampel yang diambil merupakan saham yang selalu konsisten masuk dalam daftar JII, dan diperoleh 21 saham.

5.2 Gambaran Umum Sampel

Sampel pada penelitian ini ialah seluruh perusahaan yang tergabung dan merupakan saham tetap dalam JII periode 1 Januari 2014 – 29 September 2016

Tabel. 5.1 Daftar saham JII periode 1 Januari 2014-29 September 2016

No	Kode	Nama Perusahaan
1	AALI	Astra Agro Lestari Tbk
2	ADRO	Adaro Energy Tbk
3	AKRA	AKR Corporindo Tbk
4	ASII	Astra International Tbk
5	ASRI	Alam Sutera Realty Tbk
6	BSDE	Bumi Serpong Damai Tbk
7	ICBP	Indofood CBP Sukses Makmur Tbk
8	INDF	Indofood Sukses Makmur Tbk
9	INTP	Indocement Tunggal Prakarsa Tbk
10	ITMG	Indo Tambangraya Megah Tbk
11	KLBF	Kalbe Farma Tbk
12	LPKR	Lippo Karawaci Tbk
13	LSIP	Perusahaan Prkbn Lndn Smtr Indnsa Tbk
14	MPPA	Matahari Putra Prima Tbk
15	PGAS	Perusahaan Gas Negara (Persero) Tbk
16	SMGR	Semen Indonesia (Persero) Tbk
17	SMRA	Summarecon Agung
18	TLKM	Telekomunikasi Indonesia (Persor) Tbk
19	UNTR	United Tractors Tbk
20	UNVR	Unilever Indonesia Tbk
21	WIKA	Wijaya Karya (Persero) Tbk

5.3 Perhitungan *Return* dan Resiko Saham Individual

Tabel 5.2 Nilai *Return* dan *Standar Deviasi* 21 Saham Terpilih

No	Kode	*Return*	*Stdev*	*Indeks Sharpe*
1	AALI	0.000897	0.024624	0.03643
2	ADRO	0.000181	0.030015	0.00603
3	AKRA	-0.00043	0.020585	-0.0209
4	ASII	-0.00025	0.020408	-0.0123
5	ASRI	0.000145	0.025651	0.00565
6	BSDE	-0.00052	0.02309	-0.0225
7	ICBP	-0.00081	0.019442	-0.0454
8	INDF	-0.00038	0.019442	-0.0195
9	INTP	0.00021	0.022238	0.00944
10	ITMG	0.001363	0.02641	0.05161
11	KLBF	-0.00035	0.018657	-0.0188
12	LPKR	0.000056	0.021914	0.00256
13	LSIP	0.000316	0.026177	0.01207
14	MPPA	0.000526	0.025467	0.02065
15	PGAS	0.000767	0.023341	0.03286
16	SMGR	0.000556	0.021536	0.02582
17	SMRA	-0.00086	0.026714	-0.0322
18	TLKM	-0.00098	0.015449	-0.0634
19	UNTR	0.000171	0.023159	0.00738
20	UNVR	-0.00073	0.016917	-0.0432
21	WIKA	-0.00059	0.022552	-0.0262

Seorang investor dapat mengukur hasil dari investasi saham yang diperoleh dengan mengukur pengembalian *(return)* yang diperoleh dalam periode waktu tertentu. Dengan menggunakan rumus aritmatik *Simple Net Return* saham individual, maka diperoleh *return* masing-masing saham pada setiap periode.

Resiko merupakan besarnya penyimpangan antara tingkat keuntungan yang diharapkan *(expected return)* dengan tingkat keutungan yang dicapai secara nyata (*real return).*

Berdasarkan tabel diatas diambil 6 saham yang memiliki *Indeks Sharpe* terbesar untuk dijadikan portofolio. Saham yang terpilih untuk dijadikan portofolio antara lain:

Tabel 5.3 Daftar Saham Terpilih

No	Kode	*Indeks Sharpe*
1.	ITMG	0.05161
2.	AALI	0.03643
3.	PGAS	0.03286
4.	SMGR	0.02582
5.	MPPA	0.02065
6.	LSIP	0.01207

5.4 Pembentukan Portofolio *Mean Variance*

Pembentukan Portofolio *Mean Variance* dilakukan dengan melakukan perhitungan dengan metode parametrik akan menggunakan matriks varians kovarian, untuk mencari matriks varians kovarians digunakan beberapa matriks sebagai berikut:

a. Matriks Volatilitas (V)

Matriks volatilitas dihitung dengan menggunakan nilai *standard deviasi* masing-masing saham yang merupakan akar dari varian atas saham yang dipilih.

Perhitungan standard deviasi masing-masing saham dilakukan dengan bantuan *Microsoft Office Excel*.

Standard deviasi : $\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_{it}-E(R_i))^2}{N}}$ (5.1)

Dengan :

σ_i^2 = *varians* investasi saham ke-*i*

σ_i = *standard deviasi* saham ke-*i*

R_{it} = *return* saham ke-*i* periode ke-*t*

$E(R_i)$ = *expected return* saham ke-*i*

N = periode pengamatan

Berikut adalah hasil perhitungan *standard deviasi* masing-masing saham:

Tabel 5.4 Matriks Volatilitas

SAHAM	ITMG	AALI	PGAS	SMGR	MPPA	LSIP
ITMG	0.051609	0	0	0	0	0
AALI	0	0.036428	0	0	0	0
PGAS	0	0	0.032861	0	0	0
SMGR	0	0	0	0.025817	0	0
MPPA	0	0	0	0	0.020654	0
LSIP	0	0	0	0	0	0.012072

b. Matriks korelasi (C)

Matriks korelasi digunakan untuk mengukur hubungan antara dua saham yang ada dalam portofolio investasi. Sama dengan perhitungan standard deviasi, perhitungan korelasi antara masing-masing saham juga dilakukan dengan bantuan

Microsoft Office Excel. Berikut adalah hasil perhitungan korelasi antara masing-masing saham:

Tabel 5.5 Tabel Korelasi

SAHAM	ITMG	AALI	PGAS	SMGR	MPPA	LSIP
ITMG	1	0.035	0.274	0.189	0.180	0.232
AALI	0.035	1	0.024	0.039	0.104	0.052
PGAS	0.274	0.024	1	0.365	0.208	0.248
SMGR	0.189	0.039	0.365	1	0.246	0.250
MPPA	0.180	0.104	0.208	0.246	1	0.143
LSIP	0.232	0.052	0.248	0.250	0.143	1

c. Matriks Kovarian (VxC)

Penyusunan matriks VxC dilakukan untuk memperoleh nilai kovarian dengan cara mengalikan hasil perhitungan antara standar deviasi (matriks volatilitas) dengan matriks korelasi. Berikut adalah hasil perhitungan antara Volatilitas (V) pada tabel 5.4 dikalikan dengan korelasi (C) pada tabel 5.5:

Tabel 5.6 Tabel Matriks Kovarian

SAHAM	ITMG	AALI	PGAS	SMGR	MPPA	LSIP
ITMG	0.0516	0.0018	0.0141	0.0098	0.0093	0.0120
AALI	0.0013	0.0364	0.0009	0.0014	0.0038	0.0019
PGAS	0.0090	0.0008	0.0329	0.0120	0.0068	0.0410
SMGR	0.0049	0.0010	0.0094	0.0258	0.0064	0.0065
MPPA	0.0037	0.0021	0.0043	0.0051	0.0207	0.0030
LSIP	0.0028	0.0006	0.0030	0.0030	0.0017	0.0121

Selanjutnya dilakukan perkalian antara matriks kovarian pada tabel 5.6 dikalikan dengan matriks volatilitas pada tabel 5.5. Hasil perhitungan matriks VCV atau matriks varians kovarian adalah sebagai berikut:

d. Matriks varians kovarians (VCV)

Tabel 5.7 Tabel Matriks Varian Kovarian

SAHAM	ITMG	AALI	PGAS	SMGR	MPPA	LSIP
ITMG	0.0027	0.0001	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001
AALI	0.0001	0.0013	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000
PGAS	0.0005	0.0000	0.0011	0.0003	0.0001	0.0005
SMGR	0.0003	0.0000	0.0003	0.0007	0.0001	0.0001
MPPA	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0004	0.0000
LSIP	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001

e. Menghitung proporsi dana

Perhitungan bobot atau proporsi masing-masing saham adalah dengan membentuk matriks varians kovarians sebagaimana kedalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\sum = \begin{bmatrix} 0.0027 & 0.0001 & 0.0005 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0001 & 0.0013 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0005 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0003 & 0.0001 & 0.0005 \\ 0.0003 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0007 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

$$I_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} I_6^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0004 & -0.0000 & -0.0002 & -0.0001 & -0.0001 & 0.0002 \\ -0.0000 & 0.0007 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0001 & -0.0001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0014 & -0.0001 & -0.0001 & -0.0005 \\ -0.0001 & 0.0000 & -0.0005 & 0.0017 & -0.0004 & 0.0009 \\ -0.0001 & -0.0001 & -0.0002 & -0.0004 & 0.0026 & 0.0004 \\ -0.0003 & -0.0001 & -0.0005 & -0.0007 & -0.0002 & 0.0092 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \begin{bmatrix} 0.0014 \\ 0.0009 \\ 0.0008 \\ 0.0006 \\ 0.0005 \\ 0.0003 \end{bmatrix} \quad \mu^T = [0.0014 \quad 0.0009 \quad 0.0008 \quad 0.0006 \quad 0.0005 \quad 0.0003]$$

$a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu$

=3.1114e-009

$b = \mu^T \Sigma^{-1} 1_N$

= 5.9135e-006

$c = 1_N^T \Sigma^{-1} 1_N$

$= 0.0133$

Portofolio 1

Untuk μ_p= 0.000738

$$w = \Sigma^{-1}\left(\left(\frac{(b-\mu_p c)}{b^2-ac}\right)\mu + \left(\frac{(\mu_p b - a)}{b^2-ac}\right)1_N\right)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0.1164 \\ 0.1776 \\ 0.2521 \\ 0.0586 \\ 0.1596 \\ 0.2358 \end{matrix}$$

Maka didapatkan proporsi sebagai berikut:

Tabel 5.8 Tabel Proporsi saham portofolio 1

Saham	Komposisi
ITMG	11.64%
AALI	17.76%
PGAS	25.21%
SMGR	5.86%
MPPA	15.96%
LSIP	23.58%

Dari tabel diatas terlihat bahwa bobot saham dari yang terbesar hingga terkeci adalah PGAS dengan bobot 25.21%, LSIP dengan bobot 23.58%, AALI dengan bobot 17.76%, MPPA dengan bobot 15.96%, ITMG dengan bobot 11.64% dan SMGR dengan bobot 5.86%.

Portofolio 2

Untuk μ_p= 0.0009

$$w = \Sigma^{-1}\left(\left(\frac{(b-\mu_p c)}{b^2-ac}\right)\mu + \left(\frac{(\mu_p b - a)}{b^2-ac}\right)1_N\right)$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0.1669 \\ 0.2439 \\ 0.3514 \\ 0.0278 \\ 0.1566 \\ 0.0534 \end{matrix}$$

Maka didapatkan proporsi sebagai berikut:

Tabel 5.9 Tabel Proporsi saham Portofolio 2

Saham	Komposisi
ITMG	16.69%
AALI	24.39%
PGAS	35.14%
SMGR	2.78%
MPPA	15.66%
LSIP	5.34%

Dari tabel diatas terlihat bahwa bobot saham dari yang terbesar hingga terkeci adalah PGAS dengan bobot 35.14%, AALI dengan bobot 24.39%, ITMG dengan bobot 16.69%, MPPA dengan bobot 15.66%, LSIP dengan bobot 5.34% dan SMGR dengan bobot 2.78%.

Tabel 5.10 Tabel Kinerja Portofolio *Mean Variance*

No	**Portofolio**	**Tingkat Pengembalian**	**Risiko Portofolio**	***Indeks Sharpe***
1	Portofolio 1	0.011706%	0.006226%	1.880279
2	Portofolio 2	0.013841%	0.011368%	1.21761

Berdasarkan tabel diatas dapat diketahui bahwa portofolio *Mean Variance* yang memiliki kinerja terbaik adalah portofolio 1.

5.5 Pembentukan Portofolio *Mean Absolute Deviation*

Sebuah portofolio dibentuk dari saham-saham di enam perusahaan. Dari ketiga saham tersebut akan dilakukan pembentukan bobot dengan nilai ρ (return minimal yang diinginkan) sebesar 3% dan diasumsikan dana investor yang akan diinvestasikan (M_0= 100000) sejumlah Rp 100.000,00 dengan batasan dana maksimal masing-masing saham sebesar Rp 40.000,00. Hal ini dimaksudkan untuk menghindari kerugian yang besar jika saham tersebut mengalami kerugian. Pada model *mean absolute deviation*, batasan dana tersebut merupakan salah satu dari kendala model.

Nilai pada fungsi tujuan (C_j) merupakan hasil pengurangan *return* terhadap *return* ekspektasinya, kemudian dicari rata-rata nya pada masing-masing saham dengan aturan nilai mutlak. Tabel simpleks meminimumkan portofolio ini menjadi optimal setelah melalui beberapa iterasi. Dimana nilai $Z_j - C_j$ nya sudah tidak ada yang bernilai positif.

Penyelesaian portofolio MAD dilakukan dengan meminimalkan risiko dengan pembatas yang diinginkan investor. Langkah yang pertama kali adalah mencari return masing-masing saham, kemudian mencari nilai fungsi tujuan pada tabel simpleks untuk menentukan bobot masing-masing saham. Setelah diperoleh bobot nya, dilanjutkan mencari return ekspektasi portofolio, varian serta standard deviasi yang nantinya menjadi risiko dari portofolio yang terbentuk.

Dalam skripsi ini digunakan software winQSB sebagai alat bantu untuk memperoleh iterasi yang optimal. Hasil iterasi perhitungan dengan menggunakan winQSB adalah: (pembahasan dalam lampiran 3)

Tabel 5.11 Tabel Simpleks *Mean Absolute Deviation*

		X1	X2	X3	X4	X5	X6	Surplus_C1	Slack_C2	Slack_C3	Slack_C4	Slack_C5	Slack_C6	Slack_C7	Slack_C8	Artificial_
Basis	C(j)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Artificial_C1	M	0	-0,0008	-0,0021	-0,0039	0	0	-1,0000	-0,0255	-0,0009	0	0	0	0	-0,0007	1,00
X5	0,0000	0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	1,0000	-1,0000	0	0	0	0	-1,0000	
X1	0,0000	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	0	
Slack_C4	0	0	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	
Slack_C5	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	0	
Slack_C6	0	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	
Slack_C7	0	0	-1,0000	-1,0000	-1,0000	0	0	0	-1,0000	1,0000	0	0	0	1,0000	1,0000	
X6	0,0000	0	0	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	
	C(j)-Z(j)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	* Big M	0	0,0008	0,0021	0,0039	0	0	1,0000	0,0255	0,0009	0	0	0	0	0,0007	

Artificial_C1		
0	R. H. S.	Ratio
1,0000	387,1800	
0	20.000,0000	
0	40.000,0000	
0	40.000,0000	
0	40.000,0000	
0	40.000,0000	
0	20.000,0000	
0	40.000,0000	
0	0,0264	
0	0	

Pada masalah ini untuk memperoleh iterasi yang optimal dilakukan sebanyak empat iterasi, tabel diatas merupakan tabel iterasi optimal. Berdasarkan tabel diatas dapat diketahui bahwa nilai X1 = 40.0000, X5 = 20.000 dan X6 = 40.000

Proporsi saham

Tabel 5.12 Tabel Proporsi Saham MAD

Saham	Komposisi
ITMG	40%
MPPA	20%
LSIP	40%

Berdasarkan tabel diatas dapat diketahui bahwa dana yang akan diinvestasikan dalam saham ITMG sebesar Rp 40.000, dalam saham MPPA sebesar Rp 20.000 dan dalam saham LSIP sebesar Rp 40.000.

5.6 Pembentukan Portofolio *Downside Deviation*

Pembentukan Portofolio *Downside Deviation* hampir sama dengan pembentukan portofolio Mean *Variance*. Perbedaannya terletak pada pembentukan matriks varian kovarian. Langkah untuk menghitung matriks varian kovarian pada portofolio *Downside Deviation* yaitu menggunakan persamaan:

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\left[\left(R_{it} - E(R_i).\left(R_{jt} - E\left(R_j\right)\right)\right)\right]}{n}$$

Keterangan:

σ_{ij} = Kovarian *return* antara saham i dan saham j

R_{it} = *return* saham i periode ke-t

R_{jt} = *return* saham j periode ke-t

$E(R_i)$ = *return* ekspektasian saham i

$E\left(R_j\right)$ = *return* ekspektasian saham i

n = jumlah dari observasi data historis untuk sampel banyak

Tabel 5.13 Matriks Varian Kovarian

SAHAM	ITMG	AALI	PGAS	SMGR	MPPA	LSIP
ITMG	0.000697	0.000022	0.000169	0.000107	0.000121	0.00016
AALI	0.000022	0.000605	0.000014	0.000021	0.000064	0.000033
PGAS	0.000169	0.000014	0.000544	0.000183	0.000123	0.000151
SMGR	0.000107	0.000021	0.000183	0.000463	0.000135	0.000141
MPPA	0.000121	0.000064	0.000123	0.000135	0.000648	0.000095
LSIP	0.00016	0.000033	0.000151	0.000141	0.000095	0.000684

$$\sum = \begin{bmatrix} 0.000697 & 0.000022 & 0.000169 & 0.000107 & 0.000121 & 0.00016 \\ 0.000022 & 0.000605 & 0.000014 & 0.000021 & 0.000064 & 0.000033 \\ 0.000169 & 0.000014 & 0.000544 & 0.000183 & 0.000123 & 0.000151 \\ 0.000107 & 0.000021 & 0.000183 & 0.000463 & 0.000135 & 0.000141 \\ 0.000121 & 0.00064 & 0.000123 & 0.000135 & 0.000648 & 0.000095 \\ 0.00016 & 0.000033 & 0.000151 & 0.000141 & 0.000095 & 0.000684 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menghitung proporsi potofolio optimal dengan cara yang sama dengan metode *Mean Variance*:

$$\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0016 & -0.0000 & -0.0004 & -0.0001 & -0.0002 & -0.0002 \\ -0.0000 & 0.0017 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0002 & -0.0001 \\ -0.0004 & 0.0000 & 0.0023 & -0.0007 & -0.0002 & -0.0003 \\ -0.0001 & -0.0000 & -0.0007 & 0.0027 & -0.0004 & -0.0003 \\ -0.0002 & -0.0002 & -0.0002 & -0.0004 & 0.0017 & -0.0001 \\ -0.0003 & -0.0001 & -0.0003 & -0.0003 & -0.0001 & 0.0017 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 0.1279 \\ 0.2579 \\ 0.1457 \\ 0.2083 \\ 0.1362 \\ 0.1240 \end{matrix}$$

Proporsi saham

Tabel 5.14 Tabel Proporsi Saham DD

Saham	Komposisi
ITMG	12.79%
AALI	25.79%
PGAS	14.57%
SMGR	20.83%
MPPA	13.62%
LSIP	12.40%

Berdasarkan tabel diatas dapat diketahui bahwa proporsi saham terkecil terdapat pada LSIP yaitu sebesar 12.40%. Sedangkan proporsi saham terbesar terdapat pada saham AALI yaitu sebesar 25.79%.

5.7 Pembahasan

Tabel 5.15 Kumpulan Saham Portofolio Optimal

Model Portofolio	Saham	Proporsi
Mean Variance	ITMG	17.24%
	AALI	24.29%
	PGAS	35.55%
	SMGR	-0.93%
	MPPA	11.26%
	LSIP	-13.71%
Mean Absolute Deviation	ITMG	40%
	MPPA	20%
	LSIP	40%

Downside Deviation	ITMG	12.79%
	AALI	25.79%
	PGAS	14.57%
	SMGR	20.83%
	MPPA	13.62%
	LSIP	12.40%

Berdasarkan tabel diatas dapat diketahui bahwa saham yang masuk dalam model portofolio *Mean Variance* adalah ITMG dengan proporsi saham 17.24%, AALI dengan proporsi saham 24.29%, PGAS dengan proporsi saham 35.55%, SMGR dengan proporsi saham -0.93%, MPPA dengan proporsi saham 11.26%, dan LSIP dengan proporsi saham -13.71%.

Saham yang masuk dalam model portofolio *Mean Absolute Deviation* adalah ITMG dengan proporsi saham 40%, MPPA dengan proporsi saham 20% dan LSIP dengan proporsi saham 40%.

Saham yang masuk dalam model portofolio *Downside Deviation* adalah ITMG dengan proporsi saham 12.79%, AALI dengan proporsi saham 25.79%, PGAS dengan proporsi saham 14.57%, SMGR dengan proporsi saham 20.83%, MPPA dengan proporsi saham 13.62% dan LSIP dengan proporsi saham 12.40%.

Tahap akhir yang harus dilakukan dalam proses investasi saham adalah penilaian terhadap kinerja investasi. Karena investasi dilakukan dalam bentuk portofolio maka penilaian kinerja investasi dinilai dari kinerja portofolio yang telah terbentuk. Tujuannya adalah apakah portofolio yang dibentuk telah memenuhi tujuan dari investasi ditinjau dari tingkat pengembalian dan resiko.

Skripsi ini membandingkan optimalisasi portofolio antara tiga model, untuk itu penilaian kinerja portofolio adalah membandingkan kinerja antara portofolio satu model terhadap model lainnya.

Salah satu metode yang dapat digugnakan untuk penilaian kinerja portofolio adalah dengan Indeks *Sharpe*. Metode ini telah digunakan pada bab sebelumnya untuk menentukan portofolio optimal.

Dalam menentukan keputusan untuk memilih model portofolio yang terbaik dapat dilihat dari tingkat pengembalian, resiko yang diberikan, dan optimalisasi portofolio dari indeks *sharpe*.

Tabel 5.16 Kinerja Portofolio pada Tiga Model Portofolio

No	Model Portofolio	Tingkat Pengembalian	Risiko Portofolio	*Indeks Sharpe*
1	Mean Variance	0.011706%	0.006226%	1.880
2	Mean Absolute Deviation	0.025893%	0.024814%	1.043
3	Downside Deviation	0.012401%	0.006958%	1.782

Berdasarkan tingkat pengembalian portofolio terlihat bahwa model portofolio yang memberikan *return* tertinggi adalah model portofolio *Mean Absolute Deviation* yaitu sebesar 0.025893%, sedangkan model yang memberikan *return* terendah adalah model portofolio *Mean Variance* yaitu sebesar 0.011706%.

Berdasarkan tingkat resiko portofolio terlihat bahwa model portofolio yang memberikan resiko tertinggi adalah model portofolio *Mean Absolute Deviation* yaitu sebesar 0.024814%, sedangkan model yang memberikan resiko terendah adalah model portofolio *Mean Variance* yaitu sebesar 0.006226%.

Dengan menggunakan *indeks sharpe* jelas terlihat bahwa kinerja portofolio *Mean Variance* adalah model yang memberikan nilai indeks terbesar dibandingkan dengan model portofolio lainnya, yaitu sebesar1,880. Model *Downside Deviation* sebagai model dengan indeks tertinggi mampu memberikan return yang tinggi dengan resiko yang rendah. Model MAD sebagai model alternatif model non linier menunjukkan hasil yang memuaskan.

Namun demikian model MAD menghasilkan resiko yang lebih tinggi dibandingkan dengan model DD, hal ini disebabkan karena dengan menggunakan model linier maka hanya akan sedikit saham yang masuk dalam portofolio. Keadaan ini berimplikasi pada menurunnya kemampuan model ini untuk menurunkan resiko portofolio.