

## BAB II

### LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas tentang konsep-konsep yang mendasari materi pada bab-bab selanjutnya.

#### 2.1. Matriks

**Definisi 2.1.1** (Anton, 2000) *Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan dalam susunan ini disebut entri dalam matriks tersebut.*

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Entri pada baris  $i$  dan kolom  $j$  dari sebuah matriks  $A$  akan dinyatakan sebagai  $a_{ij}$ .

Secara umum matriks  $m \times n$  dinyatakan sebagai

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} .$$

Jika keringkasan notasi diinginkan, matriks  $A$  di atas dapat ditulis sebagai  $[a_{ij}]_{m \times n}$ , dengan  $m$  adalah banyaknya baris dari suatu matriks dan  $n$  adalah banyaknya kolom dari matriks tersebut.

Matriks-matriks baris dan kolom adalah matriks-matriks yang sangat penting, biasa dituliskan dengan huruf kecil tebal dan bukan huruf besar. Sebuah

matriks baris umum  $\mathbf{a}_{1 \times n}$ , dan sebuah matriks kolom umum  $\mathbf{b}_{m \times 1}$  ditulis sebagai

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Sebuah matriks  $A$  dengan  $n$  baris dan  $n$  kolom disebut **matriks bujur sangkar berorde  $n$** , dan entri-entri  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  disebut sebagai **diagonal utama** dari  $A$ , seperti yang disajikan pada matriks berikut ini

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

### 2.1.1. Operasi Matriks

#### Kesamaan Dua Matriks

**Definisi 2.1.2** (Anton, 2000) *Dua matriks didefinisikan sama jika keduanya mempunyai ukuran yang sama dan entri-entrinya yang berpadanan sama.*

Dalam notasi matriks, jika  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$  mempunyai ukuran yang sama, maka  $A = B$  jika dan hanya jika  $(A)_{ij} = (B)_{ij}$ , atau secara ekuivalen,  $a_{ij} = b_{ij}$  untuk semua  $i$  dan  $j$ .

## Penjumlahan Matriks

**Definisi 2.1.3** (Anton, 2000) Jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks-matriks berukuran sama, maka **jumlah**  $A + B$  adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan entri-entri  $B$  dengan entri-entri  $A$  yang berpadanan, dan **selisih**  $A - B$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri  $A$  dengan entri-entri  $B$  yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan.

Dalam notasi matriks, jika  $A = [a_{ij}]$  dan  $B = [b_{ij}]$  mempunyai ukuran yang sama, maka

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

dan

$$(A - B)_{ij} = (A)_{ij} - (B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

## Perkalian Matriks

**Definisi 2.1.4** (Anton, 2000) Jika  $A$  adalah sembarang matriks dan  $c$  adalah sembarang skalar, maka **hasil kali**  $cA$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap entri  $A$  dengan  $c$ .

Dalam notasi matriks, jika  $A = [a_{ij}]$ , maka

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}.$$

Jika  $A_1, A_2, \dots, A_n$  adalah matriks-matriks berukuran sama dan  $c_1, c_2, \dots, c_n$  adalah skalar, maka sebuah ekspresi berbentuk

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \dots + c_nA_n$$

disebut **kombinasi linier** dari  $A_1, A_2, \dots, A_n$  dengan **koefisien-koefisien**  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

**Definisi 2.1.5** (Anton, 2000) Jika  $A$  adalah sebuah matriks  $m \times r$  dan  $B$  adalah sebuah matriks ukuran  $r \times n$ , maka **hasil kali**  $AB$  adalah matriks  $m \times n$  yang entrinya didefinisikan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  dari  $AB$ , pilih baris  $i$  dari matriks  $A$  dan kolom  $j$  dari matriks  $B$ . Kalikan entri-entri yang berpadanan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya.

Jika  $A = [a_{ij}]$  adalah suatu matriks berukuran  $m \times r$  dan  $B = [b_{ij}]$  adalah suatu matriks berukuran  $r \times n$ , maka perkalian dari matriks  $A$  dengan matriks  $B$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

entri  $(AB)_{ij}$  pada baris  $i$  dan kolom  $j$  dari  $AB$  diberikan oleh

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}.$$

### 2.1.2. Bentuk Matriks dari Suatu Sistem Linier

(Anton, 2000) Perkalian matriks mempunyai suatu penerapan penting pada sistem persamaan linier. Diberikan sembarang sistem persamaan linier  $m$  dalam  $n$  peubah

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Karena dua matriks adalah sama jika dan hanya jika entri-entriya yang berpadanan sama, maka kita dapat menggantikan persamaan-persamaan  $m$  dalam sistem dengan persamaan matriks tunggal

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matriks  $m \times n$  pada ruas kiri persamaan ini dapat ditulis sebagai suatu hasil kali untuk menghasilkan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Jika matriks di atas masing-masing ditandai dengan  $A$ ,  $x$  dan  $b$ , sistem persamaan asli  $m$  dalam  $n$  peubah telah digantikan oleh persamaan matriks tunggal

$$Ax = b.$$

Matriks  $A$  dalam persamaan ini disebut **matriks koefisien** dari sistem tersebut, matriks yang diperbesar untuk sistem ini diperoleh dengan menggandengkan  $b$  ke  $A$  sebagai kolom terakhir. Jadi matriks yang diperbesarnya adalah

$$[A : b] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & : & b_m \end{bmatrix}.$$

### 2.1.3. Transpos Suatu Matriks

**Definisi 2.1.6** (Anton, 2000) *Jika  $A$  adalah sembarang matriks  $m \times n$ , maka transpos  $A$  dinyatakan dengan  $A^T$ , didefinisikan sebagai matriks  $n \times m$  yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari  $A$  yaitu kolom pertama dari  $A^T$  adalah baris pertama dari  $A$ , kolom kedua dari  $A^T$  adalah baris kedua dari  $A$ , dan seterusnya.*

Diberikan matriks

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka matriks

$$A^T = A_{n \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan mengamati bahwa tidak hanya kolom dari  $A^T$  menjadi baris dari  $A$ , tetapi juga baris dari  $A^T$  juga menjadi kolom dari  $A$ . Jadi entri dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  dari  $A^T$  adalah entri dalam baris  $j$  dan kolom  $i$  dari  $A$ , yaitu

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}.$$

### 2.1.4. Matriks Identitas

(Anton, 2000) Matriks identitas adalah matriks bujur sangkar dengan 1 pada diagonal utamanya dan 0 untuk entri selain diagonal utamanya, sedemikian

sehingga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dan seterusnya.

### 2.1.5. Invers Matriks

**Definisi 2.1.7** (Anton, 2000) Jika  $A$  adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks  $B$  yang berukuran sama dapat ditentukan sedemikian sehingga  $AB = BA = I$ , maka  $A$  disebut **dapat dibalik** dan  $B$  disebut **invers** dari  $A$ .

**Contoh 2.1.8** Matriks  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  adalah invers dari  $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

**Teorema 2.1.9** Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik jika  $ad - bc \neq 0$ , di mana inversnya dapat dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

### 2.1.6. Determinan Matriks

Mengingat pada Teorema (2.1.9) bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dapat dibalik jika  $ad - bc \neq 0$ , dalam hal ini  $ad - bc \neq 0$  disebut dengan **determinan** dari matriks  $A_{2 \times 2}$  dan dinyatakan dengan simbol  $\det(A)$ . Dengan notasi ini, invers dari A dapat dinyatakan sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

## 2.2. Persamaan Diferensial

**Definisi 2.2.1** (Ross, 1989) *Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang memuat turunan dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu atau lebih variabel independen.*

### Contoh 2.2.2

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.4)$$

Berdasarkan Contoh (2.2.2) persamaan diferensial memiliki berbagai macam variasi variabel dan turunan yang termasuk di dalam persamaan diferensial dapat



terjadi dalam banyak cara. Oleh karena itu persamaan diferensial diklasifikasikan berdasarkan jumlah variabel independen yang termuat dalam sistem persamaan diferensial.

### **2.2.1. Klasifikasi Persamaan diferensial**

Persamaan diferensial diklasifikasikan kedalam dua jenis yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

#### **Persamaan Diferensial Biasa**

**Definisi 2.2.3** (*Ross, 1989*) *Persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel dependen terhadap satu variabel independen disebut sebagai persamaan diferensial biasa.*

Berdasarkan Contoh (2.2.2) persamaan (2.1) dan (2.2) adalah persamaan diferensial biasa. Dalam persamaan (2.1) variabel  $x$  adalah variabel independen tunggal dan  $y$  adalah variabel dependen. Dalam persamaan (2.2),  $t$  adalah variabel independen dan  $x$  adalah variabel dependen.

#### **Persamaan Diferensial Parsial**

**Definisi 2.2.4** (*Ross, 1989*) *Persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dari satu atau lebih variabel dependen terhadap lebih dari satu variabel independen disebut sebagai persamaan diferensial parsial.*

Berdasarkan Contoh (2.2.2) persamaan (2.3) dan (2.4) adalah persamaan diferensial parsial. Dalam persamaan (2.3) variabel  $s$  dan  $t$  adalah variabel independen tunggal dan  $v$  adalah variabel dependen. Dalam persamaan (2.4), terdapat tiga variabel independen yaitu  $x$ ,  $y$  dan  $z$  sedangkan  $u$  adalah variabel

dependen.

Selanjutnya, dalam mengklasifikasikan persamaan diferensial dikenal dengan istilah orde, berikut adalah definisinya.

### 2.2.2. Orde Persamaan Diferensial

**Definisi 2.2.5** (*Ross, 1989*) *Orde persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi yang termuat dalam sebuah persamaan diferensial.*

Berdasarkan Contoh (2.2.2) persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial biasa orde dua, karena pangkat tertinggi dari persamaan tersebut adalah dua. Persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial biasa orde empat. Persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial parsial orde satu dan persamaan (2.4) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua.

## 2.3. Teori Sistem

Menurut Subiono (2010), sistem adalah bagian dari realita yang dapat dipandang sebagai suatu unit yang terpisah dari realita tersebut.

Realita di luar sistem dinamakan "sekitar sistem". Interaksi diantara sistem dan sekitar sistem direalisasikan lewat suatu besaran yang merupakan fungsi dari waktu yang dinamakan dengan fungsi *input* dan fungsi *output*.

### 2.3.1. Model *State Space*

Dalam penelitian ini model baterai dipresentasikan menggunakan model *state space*. Menurut Kulakowski (2007) persyaratan dasar yang terkait dengan model *state space* antara lain:

- Keadaan (*State*) dari sistem dinamik didefinisikan sebagai himpunan variabel

terkecil sehingga pengetahuan variabel tersebut pada saat  $t = t_0$ , bersama-sama dengan pengetahuan tentang *input* untuk  $t > t_0$ , benar-benar menentukan perilaku sistem untuk waktu  $t \geq t_0$ .

- Variabel Keadaan (*state variable*) adalah elemen dari himpunan variabel terkecil yang dibutuhkan untuk benar-benar menggambarkan keadaan dari sistem.
- Vektor Keadaan (*state vector*) dari sistem dinamik adalah kolom vektor yang komponennya adalah variabel keadaan.
- Ruang Keadaan (*state space*) adalah ruang berdimensi  $n$  yang memuat variabel keadaan sistem  $n$ . Keadaan dari sistem dinamik di sembarang waktu  $t$  diwakili oleh satu titik dalam ruang keadaan.

Secara matematis, model *state* menggunakan persamaan diferensial orde - pertama disajikan dengan sistem persamaan berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_l, t), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_l, t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_l, t), \end{aligned} \tag{2.5}$$

dengan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel *state* dan  $u_1, u_2, \dots, u_l$  adalah variabel *input*.

Sedangkan untuk persamaan *output* sistem dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_l, t), \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_l, t), \\ &\vdots \\ y_p &= g_p(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_l, t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Jika model sistem adalah linier, semua fungsi pada sisi kanan persamaan *state* (2.5),  $f_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$ , dan semua fungsi pada sisi kanan persamaan *output* (2.6),  $g_j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, p$  adalah linier. Dengan demikian, dalam persamaan model stasioner, parameter sistem tidak bervariasi dengan waktu, dan juga linier, maka persamaan model *state* stasioner menjadi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1l}u_l \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2l}u_l \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{nl}u_l\end{aligned}\quad (2.7)$$

dan untuk persamaan *outputnya* adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \dots + c_{1l}u_l \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{2l}u_l \\ &\vdots \\ y_p &= c_{p1}x_1 + c_{p2}x_2 + \dots + c_{pn}x_n + c_{p1}u_1 + c_{p2}u_2 + \dots + c_{pl}u_l\end{aligned}\quad (2.8)$$

Dari persamaan (2.7) dan (2.8) dapat ditulis dalam notasi matriks vektor sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1l} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Sehingga dapat direpresentasikan bentuk *state space* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\tag{2.9}$$

dimana  $\mathbf{A}$  adalah matriks *state* berukuran  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$  adalah matriks *input* berukuran  $n \times m$ ,  $\mathbf{C}$  adalah matriks *output* berukuran  $p \times n$ ,  $\mathbf{D}$  adalah matriks transmisi langsung berukuran  $p \times m$ ,  $x(t)$  adalah vektor *state*,  $u(t)$  adalah vektor *input*, dan  $y$  adalah vektor *output*. Sistem (2.9) disebut sistem linier *time-invariant*.

### 2.3.2. Sistem Linier *Time Invariant*

Menurut Brogan (1991), sistem linier *time-invariant*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

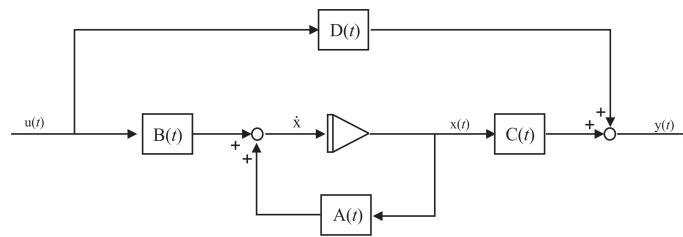
memiliki dua variasi waktu yaitu untuk waktu kontinu dan waktu diskrit. Sistem waktu kontinu dan waktu diskrit dapat dibahas secara bersamaan dengan mendefinisikan waktu sebagai  $\tau$ . Untuk sistem waktu kontinu  $\tau$  memuat semua himpunan bilangan real  $t \in [t_0, t_f]$ , sedangkan untuk sistem waktu diskrit memuat himpunan waktu diskrit  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, \dots, t_N$ .

#### Sistem Kontinu

Sistem linier *time-invariant* waktu kontinu keadaan sistem didefinisikan untuk semua waktu dalam beberapa interval. Secara umum, model *state space* direpresentasikan sebagai berikut (Brogan, 1991)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}$$

Persamaan di atas ditunjukkan dalam diagram seperti gambar di bawah ini



**Gambar 2.1 Diagram Sistem Kontinu**

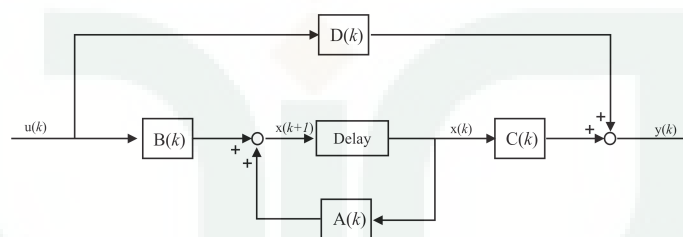
### Sistem Diskrit

Dalam sistem linier *time-invariant* waktu diskrit keadaan sistem didefinisikan hanya waktu diskrit. Secara umum, model *state space* direpresentasikan sebagai berikut (notasi  $k$  disederhanakan berdasarkan pada waktu  $t_k \in \tau$ ): (Brogan, 1991)

$$\dot{x}(k+1) = \mathbf{A}x(k) + \mathbf{B}u(k),$$

$$y(k) = \mathbf{C}x(k) + \mathbf{D}u(k)$$

Persamaan di atas ditunjukkan dalam diagram seperti gambar di bawah ini



**Gambar 2.2 Diagram Sistem Diskrit**

Berdasarkan Gambar (2.2), dalam sistem diskrit terdapat istilah *delay* yaitu waktu tunda dari sebuah sistem diskrit.

#### 2.3.3. Keteramatan Sistem

Menurut Widodo (2008) suatu sistem dikatakan dapat diamati apabila setiap variabel keadaan  $x$ , dapat ditentukan oleh *output* sistem  $y$ . Dengan kata

lain dari pengamatan *output*  $y$  dapat diketahui keadaan awalnya  $x_0$ .

Apabila salah satu atau lebih dari komponen dari  $x$  ada yang tidak dapat ditentukan oleh *output*  $y$ , maka sistem tidak dapat diamati.

Diberikan sistem dengan persamaan *state* dan *output* sebagai berikut

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$$

solusi persamaan *state* dinyatakan oleh

$$x(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u_s ds \quad (2.10)$$

dan persamaan *output*

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u_s ds + \mathbf{D}u(t) \quad (2.11)$$

Apabila sistem ini dapat diamati maka ia akan tetap diamati untuk *input*  $u(t) = 0$ .

Sehingga *output* menjadi

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x(t_0) \quad (2.12)$$

Untuk memudahkan, tanpa mengurangi sifat-sifat umumnya, dapat dipilih  $t_0 = 0$

Sehingga persamaan (2.12) menjadi

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_0 \quad (2.13)$$

Menurut teorema Cayley-Hamilton, bentuk  $e^{\mathbf{A}t}$  dapat dinyatakan dalam suatu deret berhingga sebagai berikut

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{A}^k \quad (2.14)$$

dengan  $\alpha_k(t)$  merupakan fungsi skalar dari  $t$  dan  $n$  adalah jumlah elemen  $x$ .

Substitusikan persamaan (2.14) ke persamaan (2.13) diperoleh

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) \mathbf{C} \mathbf{A}^k x_0. \quad (2.15)$$

Perkalian matriks  $\mathbf{CA}^k$  dengan vektor  $x_0$  menyatakan perkalian antara baris-baris dari  $\mathbf{CA}^k$  dengan vektor  $x_0$ .

Agar sistem dapat diamati (semua komponen dari  $x_0$  bisa ditentukan oleh  $y$  maka ruang vektor dari  $y$  haruslah ruang berdimensi  $n$ , atau dengan kata lain harus terdapat sejumlah  $n$  baris dari  $\mathbf{C}, \mathbf{CA}, \mathbf{CA}^2, \dots, \mathbf{CA}^{n-1}$  yang bebas linier. Untuk itu dibentuk matriks

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

yang berdimensi  $np \times n$ . Matriks  $\mathfrak{S}$  disebut **matriks keteramatan**.

**Definisi 2.3.1** (*Olsder, 1997*) Sistem  $(A, B, C, D)$  teramati jika terdapat  $t_1 > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap  $u(t)$  berlaku jika  $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u), \forall t \in [0, t_1]$  maka  $x_0 = x_1$ .

**Lemma 2.3.2** (*Olsder, 1997*) Jika  $\mathbf{C}x = \mathbf{CA}x = \dots = \mathbf{CA}^{n-1}x = 0$ , maka  $\mathbf{CA}^k x = 0$  untuk setiap  $k \geq 0$ .

**Bukti.** Berdasarkan teorema Cayley-Hamilton,  $\mathbf{A}^k$  adalah kombinasi linier dari  $\mathbf{A}^j$  dengan  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , untuk  $k \geq 0$ , sehingga Lemma (2.3.2) menjadi

$$\mathbf{CA}^k = \alpha_0 \mathbf{C} + \alpha_1 \mathbf{CA} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{CA}^{n-1},$$

sehingga

$$\mathbf{CA}^k x = \alpha_0 \mathbf{C}x + \alpha_1 \mathbf{CA}x + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{CA}^{n-1}x = 0, \forall k \geq 0$$





**Teorema 2.3.3** (Olsder, 1997) *Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:*

1. Sistem  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  teramati,
2.  $\text{rank } \mathfrak{S} = n$ .
3.  $\ker \mathfrak{S} = 0$ .

**Bukti.** 2  $\rightarrow$  3

karena  $\text{rank } \mathfrak{S} = n$  maka  $\mathfrak{S}$  mempunyai invers. Sehingga dari persamaan  $\mathfrak{S}x = 0$  akan menghasilkan persamaan

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}x &= 0 \\ \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{S}x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

artinya  $\ker \mathfrak{S}x = 0$ .

2  $\rightarrow$  1

Diberikan  $\text{rank } \mathfrak{S} = n$ . Ambil sembarang  $t_1 > 0$  dan  $u(t)$ , asumsikan bahwa  $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u), \forall t \in [0, t_1]$  selanjutnya akan dibuktikan  $x_0 = x_1$

$$\begin{aligned} y(t, x_0, u) &= y(t, x_1, u) \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds + \mathbf{D}u(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_1 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{B}u(s)ds + \mathbf{D}u(t) \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_0 &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_1 \\ \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}(x_0 - x_1) &= 0, \end{aligned} \tag{2.18}$$

untuk setiap  $t \in [0, t_1]$ . Selanjutnya dengan menurunkan  $t$  sebanyak  $(n - 1)$  kali,



perubahan kecepatan muatan terhadap waktu, atau dengan pengertian lain adalah muatan yang mengalir dalam satuan waktu. Jadi, arus sebenarnya adalah muatan yang bergerak. Selama muatan tersebut bergerak maka akan muncul arus, tetapi ketika muatan tersebut diam maka arus pun hilang. Muatan akan bergerak jika ada energi luar yang mempengaruhinya. Muatan adalah satuan terkecil dari atom atau bagian dari subbagian atom. Di dalam teori atom modern, dinyatakan bahwa atom terdiri dari partikel inti (proton yang bermuatan (+) dan neutron yang bersifat netral) yang dikelilingi oleh muatan elektron (-). (Ramdhani, 2008)

Muatan terdiri dari dua jenis yaitu muatan positif dan muatan negatif. Arah arus listrik searah dengan arah muatan positif atau berlawanan arah dengan aliran elektron. Suatu partikel dapat menjadi muatan positif apabila kehilangan elektron, dan menjadi muatan negatif apabila menerima elektron dari partikel lain. (Ramdhani, 2008)

Secara matematis, arus didefinisikan:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

dengan

$I$  : Arus listrik dengan satuan Ampere(A)

$q$  : Muatan dengan satuan Coloumb

$t$  : Waktu dengan satuan second (s)

#### 2.4.2. Tegangan

Tegangan (*voltage*) atau yang sering disebut sebagai "beda potensial", adalah usaha yang dilakukan untuk menggerakkan muatan sebesar satu Coloumb dari satu terminal ke terminal lainnya. Dengan kata lain, jika suatu muatan sebesar satu Coloumb digerakkan atau dipindahkan, maka akan terdapat beda potensial pada kedua terminalnya. (Ramdhani, 2008)

Usaha yang dilakukan sebenarnya adalah energi yang dikeluarkan. Jadi, berdasarkan pengertian di atas, tegangan adalah energi per satuan muatan. (Ramdhani, 2008)

Secara matematis, tegangan didefinisikan:

$$V = \frac{dw}{dq}$$

dengan

$V$  : Tegangan dengan satuan Volt(V)

$w$  : Usaha dengan satuan Joule (J)

$q$  : Muatan dengan satuan Coloumb

### 2.4.3. Resistor

Resistor dilambangkan dengan  $R$ . Resistor atau yang sering disebut dengan tahanan, hambatan, penghantar atau resistansi mempunyai fungsi sebagai penghambat arus, pembagi arus dan pembagi tegangan. Resistor menerima energi dengan cara menyerap sehingga menimbulkan panas.(Ramdhani, 2008)

Nilai resistor bergantung pada hambatan jenis bahan resistor, panjang resistor, dan luas resistor itu sendiri.

Secara matematis:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

dengan

$R$  : Resistor dengan satuan Ohm( $\Omega$ )

$\rho$  : hambatan jenis dengan satuan Ohmmeter ( $\Omega.m$ )

$l$  : Muatan dengan satuan meter ( $m$ )

$A$  : Muatan dengan satuan meter persegi( $m^2$ )

#### 2.4.4. Kapasitor

Sering juga disebut dengan kondensator. Elemen ini mempunyai fungsi untuk membatasi arus DC yang mengalir pada kapasitor tersebut, dan dapat menyimpan energi dalam bentuk medan listrik.(Ramdhani, 2008)

Jika sebuah kapasitor dilewati oleh sebuah arus, maka pada kedua ujung kapasitor tersebut akan muncul beda potensial atau tegangan. Secara matematis dinyatakan:(Ramdhani, 2008)

$$I = C \frac{dv}{dt}$$

dengan satuan dari kapasitor adalah Farad (F).

Untuk memperoleh rumus tersebut diambil dari rumus

$$Q = CV$$

$$dq = Cdv$$

di mana

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = i \cdot dt$$

sehingga

$$i \cdot dt = C \cdot dv$$

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

#### 2.5. Hukum Ohm

Jika sebuah penghantar atau hambatan atau resistansi dilewati oleh sebuah arus, maka pada kedua ujung penghantar tersebut akan muncul beda potensial. Menurut Hukum Ohm, beda potensial atau tegangan tersebut berbanding lurus arus yang mengalir melalui bahan tersebut.(Ramdhani, 2008)

Secara matematis, Hukum Ohm adalah:

$$V = I.R$$

dengan

$V$  : Tegangan dengan satuan Volt(V)

$I$  : Arus dengan satuan Ampere (A)

$R$  : Resistor dengan satuan Ohm( $\Omega$ )

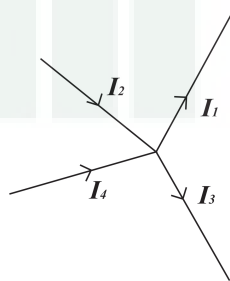
## 2.6. Hukum Kirchoff I

Hukum kirchoff dinyatakan oleh fisikawan Jerman gustav Robert Kirchoff pada tahun 1847. Hukum Arus Kirchoff menyatakan bahwa jumlah arus yang memasuki suatu percabangan atau node atau simpul sama dengan arus yang meninggalkan percabangan atau node atau simpul tersebut. Dengan kata lain, jumlah aljabar semua arus yang memasuki sebuah percabangan atau node atau simpul sama dengan nol. (Ramdhani, 2008) Secara matematis:

$$\Sigma \text{ Arus pada suatu titik percabangan} = 0$$

$$\Sigma \text{ Arus yang masuk percabangan} = \Sigma \text{ Arus yang keluar percabangan}$$

**Gambar 2.3 Hukum Kirchoff I**



Dari gambar di atas diperoleh:

$$\Sigma I = 0$$

$$I_2 + I_4 - I_1 - I_3 = 0$$

atau

$$\Sigma \text{ arus masuk} = \Sigma \text{ arus keluar} \quad (2.22)$$

$$\Sigma I_2 + I_4 = I_1 + I_3$$

## 2.7. Penuaan Baterai

Identifikasi parameter penuaan kunci dalam model baterai dapat memvalidasi hipotesis degradasi dan memberikan dasar untuk estimasi status baterai. Secara singkat, penuaan dan degradasi baterai dapat disebabkan oleh kapasitas memudar (hilangnya pengisian baterai / pemakaian kapasitas dari waktu ke waktu) serta daya memudar (hilangnya penyerapan dan pemberian daya listrik). Dari perspektif lain, daya memudar dan energi memudar dikaitkan dengan kenaikan impedansi dan kehilangan kapasitas masing-masing. Berikut adalah efek dari penuaan baterai: (Ting, 2014)

- Degradasi Suhu

Kinerja baterai secara signifikan dipengaruhi oleh suhu, sebagai contoh baterai *Lithium* dapat beroperasi antara  $-30^\circ \text{C}$  dan  $52^\circ$ . Ketika suhu turun di bawah  $-30^\circ$ , difusi dan reaksi kimia menjadi tidak aktif dan dengan demikian impedansi baterai meningkat secara drastis. Di sisi lain, ketika suhu naik di atas  $85^\circ$ , baterai bisa rusak dengan mudah. Reaksi kimia dalam baterai tumbuh secara eksponensial ketika suhu meningkat. Sementara itu, sejak reaksi kimia yang kuat menghasilkan panas yang berlebihan, baterai bisa juga memecah jika panas dari baterai tidak dikelola dengan baik.

- Kerusakan Fisik

Penuaan baterai juga dapat disebabkan oleh patahnya dan lelahnya elektroda.

- Akumulasi Partikel

*Solid Electrolyte Intephase* (SEI) terbentuk pada permukaan elektroda saat baterai terisi, dan khususnya, ketika elektroda mulai bereaksi dengan elektrolit. SEI menyerap pergerakan ion *Lithium* dan memperlambat transportasi ion antara elektroda dan elektrolit. Bentuk kristal ini memperkenalkan kekuatan memudar dan kapasitas memudar. Dalam kasus kepadatan arus rendah dan tinggi, lumut dan dendrit terbentuk pada permukaan elektroda negatif. Zat ini mengurangi luas permukaan elektroda untuk reaksi, dan dengan demikian menyebabkan baterai memudar.

- Karakterisasi Penuaan

Pengukuran diperlukan untuk mencirikan keakuratan karakteristik penuaan pada baterai. Melalui hasil pengukuran, model siklus hidup telah dikembangkan untuk memprediksi siklus kemampuan baterai. Hasil analisis menunjukkan bahwa siklus hidup baterai menurun ketika rata-rata arus pengisian bertambah.

- Model Penuaan

Parameter penuaan bisa diterapkan untuk deteksi penuaan dini. Melalui deteksi dini dan pemeliharaan yang tepat, kinerja sel baterai dapat secara signifikan ditingkatkan. Deteksi dapat dilakukan dengan menganalisis data *real-time* dari operasi baterai (misalnya data tegangan dan arus).

## **2.8. Kalman Filter**

Pada tahun 1960, R.E. Kalman mempublikasikan makalahnya yang menjelaskan sebuah solusi rekursif terhadap persoalan filter linier untuk data diskrit. Sejak saat itu, *Kalman Filter* menjadi topik penelitian dan terapan yang luas.



*Kalman Filter* merupakan sekumpulan persamaan matematik yang menawarkan cara komputasi rekursif dan efisien untuk mengestimasi *state* dari sebuah proses, sedemikian rupa sehingga meminimumkan rata-rata dari kuadrat error (RMS). Dengan *Kalman Filter* maka sebuah proses dapat diperkirakan keadaan sebelumnya, saat ini dan yang akan datang. (Welch, 2006)

*Kalman Filter* dapat menghilangkan *noise* dari suatu sinyal yang mengandung informasi dan mengambil informasi tersebut untuk diproses lebih lanjut. Suatu proses yang menggunakan *Kalman Filter* untuk memfilter *noise* (gangguan) harus dapat disajikan dalam dua persamaan, yaitu persamaan *state* dan persamaan keluaran. (Welch, 2006)

### BAB III

## PEMBENTUKAN MODEL *STATE SPACE* DALAM MENENTUKAN *STATE OF CHARGE (SoC)* UNTUK *BATTERY MANAGEMENT SYSTEM (BMS)*

Baterai pada kendaraan listrik mempunyai peranan penting dalam pengoperasian mesin kendaraan. Performa baterai yang baik akan mendukung perangkat yang digunakan. Karena energi yang disimpan pada baterai memiliki jumlah yang terbatas, maka baterai akan mengalami siklus *charge* dan *discharge*. Kondisi *charge* adalah kondisi dimana baterai dalam mode pengisian, sedangkan *discharge* adalah mode pemakaian. Proses *charge* dan *discharge* yang tidak tepat dapat menurunkan performa baterai, selain itu juga dapat mengurangi umur baterai secara cepat (dalam hal ini menyebabkan terjadinya penuaan baterai biasa disebut dengan *battery aging*). Oleh karena itu diperlukannya *Battery Management System (BMS)* untuk menjaga baterai selalu dalam kondisi yang baik. Salah satu aspek BMS adalah pemantauan *State of Charge (SoC)* yang merupakan parameter energi yang tersisa pada baterai. Pemantauan SoC secara tepat dapat menjaga baterai dari kerusakan dan dapat memperpanjang umur baterai, yaitu dengan cara menghindari *overcharging* (pengisian berlebih) dan *overdischarging* (pemakaian berlebih). Diperlukan model yang akurat untuk memantau SoC. Model ini diambil dari model baterai RC (*Resistor-Capacitor*) yang diturunkan ke dalam persamaan *state*. Untuk mengetahui keakuratan dari model tersebut digunakan *Kalman Filter* yang dapat meminimalkan rata-rata dari kuadrat *error*nya.

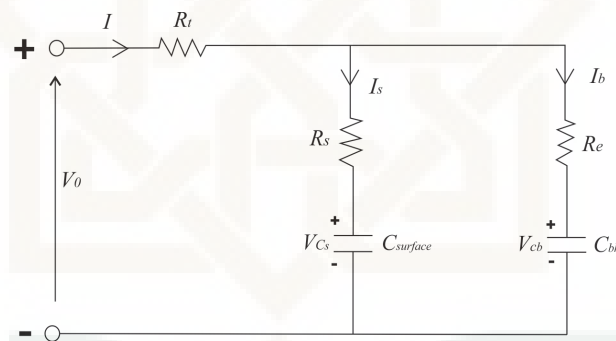
Berdasarkan pemaparan di atas, pada bab ini akan dibahas menge-

nai pemodelan baterai RC yang tepat menggunakan model *state space* dan respon *Kalman Filter* dalam mengestimasi *State of Charge* dengan simulasi numerik yang akan di bahas di bab selanjutnya.

### 3.1. Pemodelan Baterai RC yang Tepat Menggunakan Model *State Space*

Pada bagian ini, akan dibahas mengenai model baterai RC, penurunan matematis model baterai RC, model *state space* baterai RC dan mengubah model *state space* menjadi fungsi transfer.

#### 3.1.1. Model baterai RC



Gambar 3.1 Skematik model baterai RC

Model baterai yang digunakan untuk menentukan SoC dari baterai diambil dari model baterai RC (*Resistor-Capacitor*), seperti pada Gambar (3.1). Dalam hal ini, model baterai tersebut digunakan untuk menentukan penurunan rumus secara matematis ke dalam bentuk variabel *state*. Parameter yang ada dalam model tersebut antara lain:

- $C_{bk}$ , kapasitor terbesar yang bertugas sebagai bagian penyimpanan energi dalam bentuk pengisian,
- $C_{surface}$ , kapasitor permukaan

- $I$ , besar arus pada sambungan
- $I_b$ , besar arus pada kapasitor terbesar
- $I_s$ , besar arus pada pada kapasitor permukaan
- $R_t$ , hambatan sambungan
- $R_s$ , hambatan permukaan
- $R_e$ , hambatan akhir
- $V_{Cb}$ , tegangan yang melintasi kapasitor terbesar
- $V_{Cs}$ , tegangan yang melintasi kapasitor permukaan
- $V_0$ , tegangan sambungan.

### 3.1.2. Penurunan Matematis dari Model Baterai

Tujuan penurunan matematis dari model baterai ini adalah untuk membentuk model *state space* yang memuat variabel *state*  $V_{Cb}$ ,  $V_{Cs}$ , dan  $V_0$ . Variabel *state* merupakan deskripsi matematis dari *state* sistem dinamik. Keadaan sistem ini digunakan untuk menentukan proses selanjutnya. Model tersebut memuat persamaan diferensial orde pertama dalam bentuk variabel *state*. Berdasarkan Gambar (3.1), maka tegangan sambungan  $V_0$  dapat dimodelkan menggunakan dua cara yaitu dengan menggunakan tegangan pada kapasitor terbesar ( $V_{Cb}$ ) dan menggunakan tegangan pada kapasitor permukaan ( $V_{Cs}$ ).

Untuk menentukan besarnya  $V_0$  pada  $C_{bk}$  adalah sebagai berikut:

$$V_0 = IR_t + I_b R_e + V_{Cb}, \quad (3.1)$$

dan untuk menentukan besarnya  $V_0$  pada  $C_s$  adalah sebagai berikut:

$$V_0 = IR_t + I_s R_s + V_{Cs}. \quad (3.2)$$

Setelah dicari besarnya tegangan sambungan  $V_0$  maka untuk mencari besarnya arus dari kedua kapasitor yaitu arus pada  $C_{bk}$  dan  $C_s$  bisa diperoleh dengan menyamakan persamaan (3.1) dan persamaan (3.2), maka

$$IR_t + I_b R_e + V_{Cb} = IR_t + I_s R_s + V_{Cs}$$

$$I_b R_e = IR_t + I_s R_s + V_{Cs} - IR_t - V_{Cb}$$

sehingga diperoleh hasil arus pada  $C_{bk}$  dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$I_b R_e = I_s R_s + V_{Cs} - V_{Cb} \quad (3.3)$$

selain itu berlaku juga besarnya arus pada  $C_s$  adalah

$$IR_t + I_b R_e + V_{Cb} = IR_t + I_s R_s + V_{Cs}$$

$$I_s R_s = IR_t + I_b R_e + V_{Cb} - IR_t - V_{Cs}$$

$$I_s R_s = I_b R_e + V_{Cb} - V_{Cs}.$$

Setelah  $I_b$  dan  $I_s$  diketahui, langkah selanjutnya adalah mencari besarnya arus pada sambungan ( $I$ ). Berdasarkan Gambar (3.1) dapat dicari besarnya arus  $I$  yaitu dengan mengacu pada Hukum Kirchoff. Menurut Hukum Kirchoff, bahwa besarnya arus yang masuk melalui sebuah simpul besarnya akan sama dengan arus yang keluar dari simpul tersebut. Terlihat bahwa pada Gambar (3.1) bahwa arus  $I$  adalah arus yang masuk ke dalam sebuah simpul, sedangkan arus  $I_b$  dan  $I_s$  adalah arus yang keluar dari sebuah simpul. Dari pernyataan tersebut diperoleh  $I = I_b + I_s$ , maka dapat dinyatakan bahwa

$$I_s = I - I_b. \quad (3.4)$$

Substitusikan persamaan (3.4) ke persamaan (3.3) diperoleh

$$I_b R_e = I_s R_s + V_{C_s} - V_{C_b}$$

$$I_b R_e = (I - I_b) R_s + V_{C_s} - V_{C_b}$$

$$I_b R_e = I R_s - I_b R_s + V_{C_s} - V_{C_b}$$

$$I_b R_e + I_b R_s = I R_s + V_{C_s} - V_{C_b}$$

$$I_b (R_e + R_s) = I R_s + V_{C_s} - V_{C_b}.$$

Sehingga arus  $I_b$  dapat dinyatakan dengan

$$I_b = \frac{I R_s}{(R_e + R_s)} + \frac{V_{C_s} - V_{C_b}}{(R_e + R_s)}. \quad (3.5)$$

Dengan proses yang sama dapat juga dicari arus  $I_s$  sebagai berikut

$$I_s R_s = I_b R_e + V_{C_b} - V_{C_s}$$

$$I_s R_s = (I - I_s) R_e + V_{C_b} - V_{C_s}$$

$$I_s R_s = I R_e - I_s R_e + V_{C_b} - V_{C_s}$$

$$I_s R_s + I_s R_e = I R_e + V_{C_b} - V_{C_s}$$

$$I_s (R_e + R_s) = I R_e + V_{C_b} - V_{C_s}$$

sehingga arus  $I_s$  dapat dinyatakan dengan

$$I_s = \frac{I R_e}{(R_e + R_s)} + \frac{V_{C_b} - V_{C_s}}{(R_e + R_s)}. \quad (3.6)$$

Setelah dicari arus  $I_b$  dan  $I_s$  maka untuk menentukan variabel *state* dari masing-masing model maka dicari turunan pertama dari masing-masing tegangan. Dengan mengingat bahwa besarnya kapasitor yang dilewati sebuah arus, maka pada kedua ujung kapasitor tersebut akan muncul beda potensial atau tegangan, secara matematis dapat ditulis  $i = C \frac{\partial V}{\partial t}$ . Sehingga laju perubahan tegangan pada kapasitor terbesar  $C_{bk}$  dapat dibentuk  $I_b = C_{bk} \dot{V}_{C_b}$ . Maka dengan mensubstitusikan  $I_b$  dengan  $C_{bk} \dot{V}_{C_b}$  diperoleh

$$C_{bk}\dot{V}_{Cb} = \frac{IR_s}{(R_e + R_s)} + \frac{V_{Cs}}{(R_e + R_s)} - \frac{V_{Cb}}{(R_e + R_s)}$$

$$\dot{V}_{Cb} = \frac{IR_s}{C_{bk}(R_e + R_s)} + \frac{V_{Cs}}{C_{bk}(R_e + R_s)} - \frac{V_{Cb}}{C_{bk}(R_e + R_s)}. \quad (3.7)$$

Dengan pengaplikasian yang sama seperti persamaan di atas, laju perubahan tegangan kapasitor permukaan, diambil dari persamaan (3.6). Maka dengan mensubstitusikan  $I_s$  dengan  $C_s\dot{V}_{Cs}$  sehingga diperoleh

$$C_s\dot{V}_{Cs} = \frac{IR_e}{(R_e + R_s)} + \frac{V_{Cb}}{(R_e + R_s)} - \frac{V_{Cs}}{(R_e + R_s)}$$

$$\dot{V}_{Cs} = \frac{IR_e}{C_{surface}(R_e + R_s)} - \frac{V_{Cs}}{C_{surface}(R_e + R_s)} + \frac{V_{Cb}}{C_{surface}(R_e + R_s)} \quad (3.8)$$

Untuk mempermudah dalam perhitungan selanjutnya, maka dengan mengasumsikan  $A = \frac{1}{C_{bk}(R_e + R_s)}$  dan  $B = \frac{1}{C_{surface}(R_e + R_s)}$ , persamaan (3.7) dan (3.8) dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{V}_{Cb} = A.IR_s + A.V_{Cs} - A.V_{Cb}, \quad (3.9)$$

dan

$$\dot{V}_{Cs} = B.IR_e - B.V_{Cs} + B.V_{Cb}. \quad (3.10)$$

Selanjutnya persamaan (3.9) dan (3.10) dapat dikombinasikan ke dalam bentuk variabel *state* yang menghubungkan tegangan  $V_{Cs}$ ,  $V_{Cb}$  dan arus  $I$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb} \\ \dot{V}_{Cs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & A \\ B & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb} \\ V_{Cs} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A.R_s \\ B.R_e \end{bmatrix} I. \quad (3.11)$$

Selanjutnya untuk *output* tegangan tersebut diambil dari persamaan (3.1) dan (3.2) dengan menjumlahkan kedua persamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$2V_0 = 2IR_t + I_bR_e + I_sR_s + V_{Cb} + V_{Cs}. \quad (3.12)$$

Dengan mensubstitusikan  $I_b = \frac{IR_s}{R_s+R_e}$  dan  $I_s = \frac{IR_e}{R_s+R_e}$  ke dalam persamaan (3.12) maka

$$2V_0 = 2IR_t + \frac{IR_s}{R_s + R_e}R_e + \frac{IR_e}{R_s + R_e}R_s + V_{Cb} + V_{Cs}$$

$$V_0 = \frac{V_{Cb} + V_{Cs}}{2} + (R_t + \frac{R_e R_s}{R_e + R_s})I \quad (3.13)$$

Dengan menurunkan tegangan *output* terhadap waktu dan mengasumsikan  $\frac{dI}{dt} \approx 0$ . Maksud dari hal tersebut adalah rata-rata perubahan dari arus sambungan diabaikan ketika diterapkan secara digital. Oleh sebab itu didapatkan

$$\dot{V}_0 = \frac{\dot{V}_{Cb} + \dot{V}_{Cs}}{2}. \quad (3.14)$$

Dengan mensubstitusikan hasil diperoleh lebih awal pada persamaan (3.9) dan (3.10) ke dalam persamaan (3.14), menghasilkan

$$\dot{V}_0 = \frac{\dot{V}_{Cb} + \dot{V}_{Cs}}{2}$$

$$2\dot{V}_0 = \dot{V}_{Cb} + \dot{V}_{Cs}$$

$$2\dot{V}_0 = (A.IR_s + A.V_{Cs} - A.V_{Cb}) + (B.IR_e - B.V_{Cs} + B.V_{Cb})$$

$$2\dot{V}_0 = -A.V_{Cb} + B.V_{Cb} + A.V_{Cs} - B.V_{Cs} + A.IR_s + B.IR_e$$

$$2\dot{V}_0 = (-A + B)V_{Cb} + (A - B)V_{Cs} + (AR_s + BR_e)I. \quad (3.15)$$

Kemudian untuk mencari  $V_{Cs}$  dari persamaan (3.13)

$$V_0 = \frac{V_{Cb} + V_{Cs}}{2} + (R_t + \frac{R_e R_s}{R_e + R_s})I$$

$$2V_0 = V_{Cb} + V_{Cs} + 2(R_t + \frac{R_e R_s}{R_e + R_s})I$$

$$V_{Cs} = 2V_0 - 2(R_t + \frac{R_e R_s}{R_e + R_s})I - V_{Cb}.$$

Dengan mengasumsikan  $\frac{R_e R_s}{R_e + R_s} = D$  maka persamaan menjadi

$$V_{Cs} = 2V_0 - 2(R_t + D)I - V_{Cb}. \quad (3.16)$$



Setelah diperoleh  $V_{Cs}$ , kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.15)

$$\begin{aligned}
2\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)(2V_0 - 2(R_t + D)I - V_{Cb}) + (AR_s + BR_e)I \\
2\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)(2V_0) - 2(A - B)(R_t + D)I - (A - B)(V_{Cb}) + (AR_s + BR_e)I \\
2\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (-A + B)(V_{Cb}) + 2(A - B)V_0 - 2(A - B)(R_t + D)I + (AR_s + BR_e)I \\
2\dot{V}_0 &= 2(-A + B)V_{Cb} + 2(A - B)V_0 - 2(AR_t + AD - BR_t - BD)I + (AR_s + BR_e)I \\
\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)V_0 - (AR_t + AD - BR_t - BD)I + 0,5(AR_s + BR_e)I \\
\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)V_0 + (-AR_t - AD + BR_t + BD)I + 0,5(AR_s + BR_e)I \\
\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)V_0 + (-AR_t - AD + BR_t + BD + 0,5AR_s + 0,5BR_e)I \\
\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)V_0 + (0,5AR_s - AR_t - AD + 0,5BR_e + BR_t + BD)I \\
\dot{V}_0 &= (-A + B)V_{Cb} + (A - B)V_0 + [A(0,5R_s - R_t - D) + B(0,5R_e + R_t + D)]I.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Setelah melakukan penurunan rumus tersebut, untuk memperoleh variabel *state* yang lengkap maka persamaan (3.17) dikombinasikan dengan persamaan (3.11). Sehingga variabel *state* menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb} \\ \dot{V}_{Cs} \\ \dot{V}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A & A & 0 \\ B & -B & 0 \\ (-A + B) & 0 & (A - B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb} \\ V_{Cs} \\ V_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A.R_s \\ B.R_e \\ A(0,5R_s - R_t - D) + B(0,5R_e + R_t + D) \end{bmatrix} I, \tag{3.18}$$

dengan konstanta  $A$ ,  $B$  dan  $D$  yang telah diberikan sebelumnya, kemudian dibentuk kedalam variabel *state* maka menjadi

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{bk}(R_e + R_s)} \\ \frac{1}{C_{surface}(R_e + R_s)} \\ \frac{R_e R_s}{R_e + R_s} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Untuk mempermudah dalam membentuk persamaan maka dengan

mendefinisikan matriks

$$\begin{bmatrix} -A & A & 0 \\ B & -B & 0 \\ (-A+B) & 0 & (A-B) \end{bmatrix} := \mathbf{M} \quad (3.20)$$

dan

$$\begin{bmatrix} A.R_s \\ B.R_e \\ A(0.5R_s - R_t - D) + B(0.5R_e + R_t + D) \end{bmatrix} := \mathbf{N}, \quad (3.21)$$

maka diperoleh persamaan variabel *state* sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb} \\ \dot{V}_{Cs} \\ \dot{V}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} V_{Cb} \\ V_{Cs} \\ V_0 \end{bmatrix} + \mathbf{N}I, \quad (3.22)$$

### 3.1.3. Model *State Space* Baterai RC

Berdasarkan teori sistem, model *state space* dari sebuah sistem linier waktu invarian dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \end{aligned}$$

dengan

$x(t)$  : variable *state* dari sistem,

$u(t)$  : *input* sistem,

$y(t)$  : *output* dari sistem,

$\mathbf{A}$  : matriks *state time-invariant*,

$\mathbf{B}$  : matriks *inputtime-invariant*,

$\mathbf{C}$  : matriks *outputtime-invariant*,

$\mathbf{D}$  : matriks transmisi *time-invariant*.

Dalam pembahasan disini model *state space* untuk persamaan (3.22), didapat dengan mengambil variabel *state*  $\dot{x}(t)$  yang dinyatakan dengan

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb}(t) \\ \dot{V}_{Cs}(t) \\ \dot{V}_0(t) \end{bmatrix}$$

sehingga berlaku juga

$$x(t) = \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \mathbf{M},$$

dan

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}.$$

*Input* dari sistem ini adalah besarnya arus, sehingga dapat dinyatakan *input*

$$u(t) = I(t).$$

Sedangkan *output* dari sistem ini adalah tegangan sambungan  $V_0$ , sehingga dapat dinyatakan *output*

$$y(t) = V_0$$

sehingga matiks

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dan

$$\mathbf{D} = [0].$$

Berdasarkan penjelasan di atas, sehingga dapat dibentuk model *state space*

beserta dengan *output* sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb}(t) \\ \dot{V}_{Cs}(t) \\ \dot{V}_0(t) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix} + \mathbf{N}I(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix}.$$

dengan

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -A & A & 0 \\ B & -B & 0 \\ (-A+B) & 0 & (A-B) \end{bmatrix}$$

dan  $\mathbf{N} =$

$$\begin{bmatrix} A.R_s \\ B.R_e \\ A(0.5R_s - R_t - D) + B(0.5R_e + R_t + D) \end{bmatrix}.$$

### 3.1.4. Mengubah Model *State Space* Menjadi Fungsi Transfer

Menurut Ogata (2004), fungsi transfer didefinisikan sebagai rasio transformasi *Laplace output* terhadap transformasi *Laplace input* dengan asumsi bahwa semua kondisi awal sama dengan nol.

Sebelum mencari fungsi transfer maka akan dipaparkan terlebih dahulu mengenai transformasi *Laplace* yang didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 3.1.1** (Ogata, 2004) Transformasi *Laplace* dari  $f(t)$ , dilambangkan dengan  $F(s)$  adalah

$$\mathcal{L}[f(s)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt [f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Diberikan sistem invarian waktu. Maka, matriks respon impulsnya adalah

$$y(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (3.23)$$

Untuk lebih sederhananya, diasumsikan  $u(t) = 0$  untuk  $t \leq 0$ , maka

$$y(t) = \int_0^t G(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (3.24)$$

Andaikan bahawa fungsi  $y(t)$ ,  $u(t)$  dan  $G(t)$  mempunyai transformasi *Laplace* yang masing-masing dinotasikan  $Y(s)$ ,  $U(s)$  dan  $G(s)$ , sehingga

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}dt, \\ U(s) &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt, \\ G(s) &= \int_0^{\infty} G(t)e^{-st}dt. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Maka, transformasi *Laplace* dari (3.24) diberikan oleh

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (3.26)$$

Bila  $X(s)$  adalah transformasi *Laplace* dari  $x(t)$ , maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right) &= \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt \\ &= x(t)|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} dx(t)e^{-st}dt \\ &= -x(0) + sX(s). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sehingga transformasi *Laplace* dari  $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$ ,  $x(0) = x_0$  adalah

$$sX(s) - x(0) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}U(s)$$

$$sX(s) - \mathbf{A}X(s) = \mathbf{I}x(0) + \mathbf{B}U(s)$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})X(s) = \mathbf{I}x(0) + \mathbf{B}U(s)$$

$$X(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}x_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s). \quad (3.28)$$

Apabila transformasi *Laplace* keluaran  $y(t) = \mathbf{C}x(t)$  adalah  $Y(s) = \mathbf{C}X(s)$  dan jika diasumsikan  $x(0) = 0$ , maka

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \\ &= G(s)U(s). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Misal diberikan fungsi transfer  $G(s)$  maka representasi dari fungsi  $G(s)$  adalah sebagai berikut

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{output}]}{\mathcal{L}[\text{input}]}. \quad (3.30)$$

Berdasarkan persamaan (3.29)  $G(s)$  dapat dinyatakan dengan persamaan

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \quad (3.31)$$

Dalam kasus ini, *input* dari sistem dinotasikan dengan  $I(t)$  dan *output* dinotasikan dengan  $y(t)$ . Jika transformasi *Laplace input* adalah  $U(s) = I(s)$  dan transformasi *Laplace output* adalah  $Y(s)$  maka fungsi transfer dari sistem dapat diambil dari persamaan (3.31), sehingga

$$G(s) = \frac{Y(s)}{I(s)}. \quad (3.32)$$

Dengan memperhatikan persamaan (3.29) maka dapat diperoleh

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}. \quad (3.33)$$

Seperti yang telah diasumsikan sebelumnya bahwa  $\mathbf{A} = \mathbf{M}$  dan  $\mathbf{B} = \mathbf{N}$ , sehingga persamaan (3.33) menjadi

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} \quad (3.34)$$

dengan  $\mathbf{I}$  adalah matriks identitas.

### 3.1.5. Hitung Numerik

Setelah dibentuk matrik dari variabel *state* yang lengkap, berikut adalah contoh numerik dari kapasitor dan resistor



**Tabel 3.1 Parameter untuk Model Baterai**

$C_{bk}$	$C_{surface}$	$R_e$	$R_s$	$R_t$
88372.83 F	82.11 F	0.00375 $\Omega$	0.00375 $\Omega$	0.002745 $\Omega$

Dengan mensubstitusikan semua hasil kapasitor dan resistor dari Tabel (3.1) ke dalam persamaan (3.19) maka

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{bk}(R_e+R_s)} \\ \frac{1}{C_{surface}(R_e+R_s)} \\ \frac{R_e R_s}{R_e+R_s} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{88372,83(0,00375+0,00375)} \\ \frac{1}{82,11(0,00375+0,00375)} \\ \frac{(0,00375 \times 0,00375)}{(0,00375+0,00375)} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0,001508759347566 \\ 1,623837940973491 \\ 0,001875000000000 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

atau lebih sederhananya

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,51 \times 10^{-3} \\ 1,6238 \\ 1,88 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Setelah diketahui masing-masing nilai dari  $A$ ,  $B$  dan  $D$  maka hasil dari  $A$ ,  $B$  dan  $D$  disubstitusikan ke matriks  $\mathbf{M}$  dan matriks  $\mathbf{N}$  sehingga

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ (-0,0015 + 1,6238) & 0 & (0,0015 - 1,6238) \end{bmatrix}$$



$$= \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

dan untuk nilai  $\mathbf{N}$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 0,0015 \times 0,00375 \\ 1,6238 \times 0,00375 \\ 0,0015((0,5 \times 0,00375) - 0,002745 - 0,0019) + 1,6238((0,5 \times 0,00375) + 0,002745 + 0,0019) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ (0,0015 \times (-0,002745)) + (1,6238 \times 0,006495) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Setelah diketahui elemen dari matrik  $\mathbf{M}$  dan  $\mathbf{N}$  maka model *state space* dari persamaan (3.22) diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb}(t) \\ \dot{V}_{Cs}(t) \\ \dot{V}_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix} I(t) \quad (3.37)$$

dan persamaan *output* diperoleh

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix}.$$

### 3.1.6. Keteramatan Model Baterai RC

Dalam teori kendali, keteramatan adalah derajat dalam memprediksikan keadaan dalam sebuah sistem melalui *output*. Dengan demikian, untuk sebuah

sistem yang dapat diamati, perilaku seluruh sistem dapat diprediksi melalui *output* sistem. Di sisi lain, jika sistem tidak dapat diamati, maka hasil dari keadaannya tidak dapat diprediksi dari *output*. Seperti yang sudah disebutkan dalam bab sebelumnya, bahwa sistem teramati jika untuk setiap *input*  $u(t)$  maka implikasi berikut ini berlaku

$$y(t; x_0, u) = y(t; x_1, u), t \geq 0 \Rightarrow x_0 = x_1. \quad (3.38)$$

Secara teori, keteramatan dari sebuah sistem dapat ditentukan dengan membentuk matrik keteramatan  $\mathfrak{S}$

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CM} \\ \mathbf{CM}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CM}^{n-1} \end{bmatrix}$$

dan sistem dikatakan teramati jika *rank* baris/kolom sama dengan  $n$ .

Seperti yang sudah diketahui sebelumnya bahwa matrix

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix}$$

dan matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Karena ukuran matriks  $\mathbf{M}$  berdimensi 3, maka untuk menyusun matrik keteramatan diperlukan hingga  $\mathbf{CM}^2$ . Berikut adalah hasil perhitungan dari  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{CM}$ ,  $\mathbf{CM}^2$ .

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CA} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CA}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0024 & -0,0024 & 0 \\ -2,6392 & 2,6392 & 0 \\ -2,6343 & 0,0024 & 2,6319 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2,6343 & 0,0024 & 2,6319 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.39), (3.40) dan (3.41) ke dalam matriks  $\mathfrak{S}$  maka diperoleh

$$\mathfrak{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \\ -2,6343 & 0,0024 & 2,6319 \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Matriks  $\mathfrak{S}$  mempunyai *rank* sebanyak 3, hal ini sama dengan pernyataan sebelumnya yaitu sistem dapat diamati jika banyaknya *rank* sama dengan banyaknya dimensi matriks  $\mathfrak{S}$ . Sehingga dapat dikatakan bahwa sistem ini teramati.

### 3.2. Kalman Filter untuk Estimasi State of Charge

Diberikan sistem linier *time-invariant* kontinu dideskripsikan dalam variabel *state* sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t),\end{aligned}\tag{3.43}$$

dengan

$x(t)$  : vektor *state* dari sistem,

$u(t)$  : *input* sistem,

$y(t)$  : *output* sistem,

$\mathbf{A}$  : matriks *state time-invariant*

$\mathbf{B}$  : matriks *input time-invariant*

$\mathbf{C}$  : matriks *output time-invariant*.

Jika *input*  $u(t)$  yang diterapkan diasumsikan konstan selama setiap interval sampling, maka model diskrit menjadi

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_d \cdot x(k) + B_d \cdot u(k) \\ y(k) &= C_d \cdot x(k)\end{aligned}$$

dengan

$x(k)$  : vektor *state* dari sistem waktu diskrit,

$u(k)$  : *input* sistem waktu diskrit,

$y(k)$  : *output* sistem waktu diskrit,

$A_d$  : matriks *state time-invariant* waktu diskrit,

$B_d$  : matriks *input time-invariant* waktu diskrit,

$C_d$  : matriks *output time-invariant* waktu diskrit.

di mana

$$\begin{aligned}A_d &\approx \mathbf{I} + \mathbf{A} \cdot T_c, \\ B_d &= \mathbf{B} \cdot T_c, \\ C_d &= \mathbf{C}\end{aligned}\tag{3.44}$$

dengan  $\mathbf{I}$  adalah matriks identitas dan  $T_c$  adalah periode sampling. Setelah dibentuk ke dalam model diskrit, seperti yang telah dibahas pada pembentukan model *state space* yaitu matriks  $\mathbf{A} = \mathbf{M}$  dan  $\mathbf{B} = \mathbf{N}$  maka persamaan (3.44) menjadi

$$\begin{aligned} A_d &\approx \mathbf{I} + \mathbf{M}.T_c, \\ B_d &= \mathbf{N}.T_c, \\ C_d &= \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Selanjutnya untuk mencari matriks  $A_d$ ,  $B_d$  dan  $C_d$  dapat dilakukan dengan mengambil  $T_c = 1$  sehingga matriks  $A_d$ ,  $B_d$  dan  $C_d$  menjadi

$$\begin{aligned} A_d &= \mathbf{I} + \mathbf{M}.T_c \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix} \cdot 1 \\ &= \begin{bmatrix} 0,9984 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & 0,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & 0,6223 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_d &= \mathbf{N}.T_c \\ &= \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \cdot 1 \\ &= \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_d &= \mathbf{C} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Persoalan umum untuk *Kalman Filter* adalah untuk mengestimasi *state* dari

sebuah proses waktu diskrit yang dinyatakan oleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k) + w \\ y(k) &= C_d x(k) + v,\end{aligned}\tag{3.46}$$

dengan

$w$  vektor yang merepresentasikan *noise* proses dan ketidakakuratan model

$v$  vektor yang merepresentasikan *noise* pengukuran.

Baik  $w$  dan  $v$  keduanya saling bebas, sehingga nilai korelasinya nol dan keduanya memiliki probabilitas berdistribusi normal

$$\begin{aligned}p(w) &\sim N(0, \mathbf{Q}) \\ p(v) &\sim N(0, \mathbf{R})\end{aligned}\tag{3.47}$$

dengan  $\mathbf{Q}$  adalah kovarian dari *noise* proses dan  $\mathbf{R}$  adalah kovarian dari *noise* pengukuran. Kovarian adalah ukuran korelasi antara dua (atau lebih) variabel acak. Sehingga matriks kovarian dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned}E[w.w^T] &= \mathbf{Q}, \\ E[v.v^T] &= \mathbf{R},\end{aligned}\tag{3.48}$$

di mana  $E$  menunjukkan harapan (atau rerata) operator dan  $T$  berarti transpos dari masing-masing vektor.  $\mathbf{Q}$  dan  $\mathbf{R}$  bisa berubah dalam tiap waktu atau pengukuran, namun dalam kasus ini diasumsikan konstan.

### 3.2.1. Komputasi Filter

Didefinisikan  $\hat{x}_{\bar{k}}$  sebagai pra-estimasi *state* pada step  $k$  berdasarkan data dari proses (3.46) sebelum step  $k$  dan  $\hat{x}_k$  sebagai pasca estimasi *state* pada step  $k$  berdasarkan nilai  $y(k)$ . Sehingga dapat didefinisikan pra dan pasca estimasi untuk *error* sebagai

$$\begin{aligned}e_{\bar{k}} &= x_k - \hat{x}_{\bar{k}}, \\ e_k &= x_k - \hat{x}_k.\end{aligned}\tag{3.49}$$

Sedangkan untuk kovarian pra-estimasi *error* dan kovarian pasca-estimasi *error* adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} P_{\bar{k}} &= E[e_{\bar{k}}e_{\bar{k}}^T], \\ P_k &= E[e_k e_k^T] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Dalam menurunkan persamaan untuk *Kalman Filter*, dimulai dengan persamaan yang menghitung pasca-estimasi *state*  $\hat{x}_k$  yang dibangun dengan kombinasi pra-estimasi  $\hat{x}_{\bar{k}}$  dan selisih antar nilai ukur aktual  $y(k)$  dan prediksi nilai ukur  $C_d \hat{x}_{\bar{k}}$  sebagai berikut

$$x_k = \hat{x}_{\bar{k}} + K(y(k) - C_d \hat{x}_{\bar{k}}) \quad (3.51)$$

Selisih  $(y(k) - C_d \hat{x}_{\bar{k}})$  pada persamaan (3.51) disebut perbaikan atau selisih pengukuran. Selisih ini, merupakan ketidaksesuaian antara nilai ukur yang diprediksi  $C_d \hat{x}_{\bar{k}}$  dan nilai ukur sebenarnya  $y(k)$ . Apabial selisihnya nol.

Selanjutnya dipilih matriks *kalman gain* ( $K$ ) sebagai faktor penguat yang meminimumkan kovarian pasca-estimasi *error* sebagai berikut

$$K_k = P_{\bar{k}} C_d^T (C_d P_{\bar{k}} C_d^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.52)$$

Seperti yang telah dijelaskan di bab sebelumnya bahwa *Kalman Filter* mengestimasi satu proses melalui mekanisme kendali umpan balik, Filter mengestimasi *state* dari proses kemudian mendapat umpan balik berupa nilai hasil pengukuran yang bercampur *noise*. Dengan demikian *Kalman Filter* dikelompokkan dalam dua bagian yaitu persamaan *update* waktu dan persamaan *update* pengukuran. Persamaan *update* waktu biasa disebut dengan prediksi, sedangkan untuk *update* pengukuran biasa disebut dengan koreksi.

Persamaan *update* waktu (prediksi):

1. Prediksi *state*

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k \quad (3.53)$$

## 2. Prediksi kovarian error

$$P_{k+1} = A_d P_k A_d^T + \mathbf{Q} \quad (3.54)$$

dan persamaan *update* pengukuran (koreksi):

1. Menghitung *kalman gain*

$$K_k = P_k C_d^T (C_d P_k C_d^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3.55)$$

2. *Update* estimasi dengan pengukuran  $y(k)$ 

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K(y_k - C_d \hat{x}_k) \quad (3.56)$$

3. *Update* kovarian error

$$P_k = (1 - K_k C_d) P_k \quad (3.57)$$

Hal terpenting dari *Kalman Filter* adalah dengan memperhatikan *Root Mean Square* (RMS) pada simulasi yang akan dibahas di bab selanjutnya. *Kalman Filter* mampu meminimalisir RMS dengan menghitung kovarian *error* pra-estimasi dan kovarian *error* pasca-estimasi yang dinyatakan dengan persamaan (3.50).



## BAB IV

### SIMULASI

Pada bab ini akan dibahas mengenai simulasi numerik mengestimasi SoC dengan *Kalman Filter* menggunakan program Matlab 7.1. Sebelum dilakukan simulasi, maka perlu diketahui terlebih dahulu mengenai nilai dari masing-masing parameter. Berikut adalah parameter yang digunakan dalam simulasi numerik mengestimasi *State of Charge* yang sudah dibahas di bab selanjutnya.

Tabel 4.1 Parameter

Parameter	Definisi Parameter	Nilai
$C_{bk}$	kapasitor terbesar	88372.83 F
$C_{surface}$	kapasitor permukaan	82.11 F
$R_e$	hambatan akhir	0.00375 $\Omega$
$R_s$	hambatan permukaan	0.00375 $\Omega$
$R_t$	hambatan sambungan	0.002745 $\Omega$

Sumber: Jurnal "State of Charge for Battery Management System via Kalman Filter" oleh T.O. Ting, dkk.

Setelah mengetahui besaran masing-masing parameter, maka berikut adalah asumsi-asumsi yang digunakan dalam simulasi

- *Input* dari sistem yaitu arus  $I(t)$  konstan. Sehingga perubahan besar arus tiap satuan waktu adalah nol.
- Dalam proses *charging* membutuhkan waktu 60000 s.
- *Noise* estimasi dan *noise* pengukuran adalah matriks acak berdistribusi

normal.

Pada bab sebelumnya telah dibahas membentuk model *state space* dari rangkaian baterai RC yang digunakan untuk menentukan SoC baterai. Diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{Cb}(t) \\ \dot{V}_{Cs}(t) \\ \dot{V}_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0015 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & -1,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & -1,6223 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix} I(t)$$

dengan persamaan outputnya

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cb}(t) \\ V_{Cs}(t) \\ V_0(t) \end{bmatrix}$$

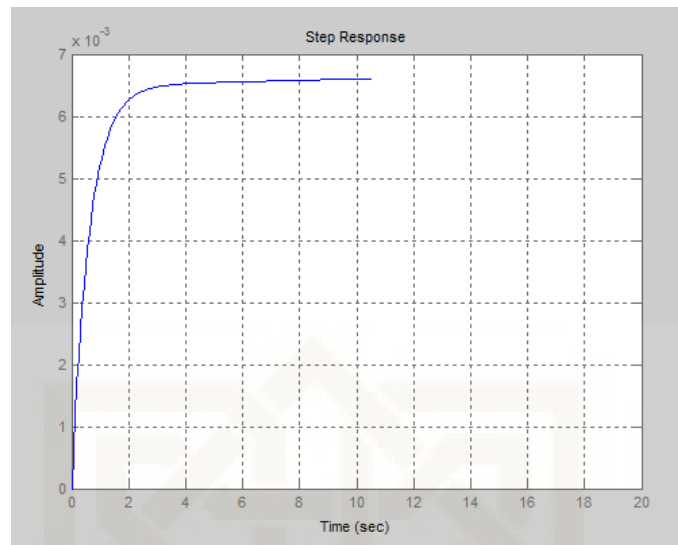
dari persamaan di atas akan dicari hubungan antara *input* dan *outputnya* yaitu dengan mengubah bentuk *state space* ke dalam fungsi transfer.

#### 4.1. Fungsi Transfer

Fungsi transfer menggambarkan hubungan antara *input* dengan *output* sistem. Berdasarkan pembahasan pada Bab III pembentukan fungsi transfer dari sistem linier *time invariant* adalah dengan persamaan (3.30). Untuk mempermudah dalam mencari fungsi transfer  $G(s)$  dapat menggunakan program Matlab. Dalam program Matlab menggunakan fungsi `ss2tf`. Sehingga fungsi transfer dari model *state space* adalah

$$G(s) = \frac{0.01054s^2 + 0.01714s + 2.981 \times 10^{-5}}{s^3 + 3.248s^2 + 2.637s - 1.144 \times 10^{-018}}$$

kemudian akan muncul grafik



**Gambar 4.1 Respon model RC**

Grafik di atas menunjukkan output dari respon unit step dari transfer fungsi  $G(s)$ . Berdasarkan grafik tersebut, menunjukkan bahwa respon step unit dari tegangan sambungan bertambah secara linier sampai jangka waktu yang tak terhingga selama proses pengisian.

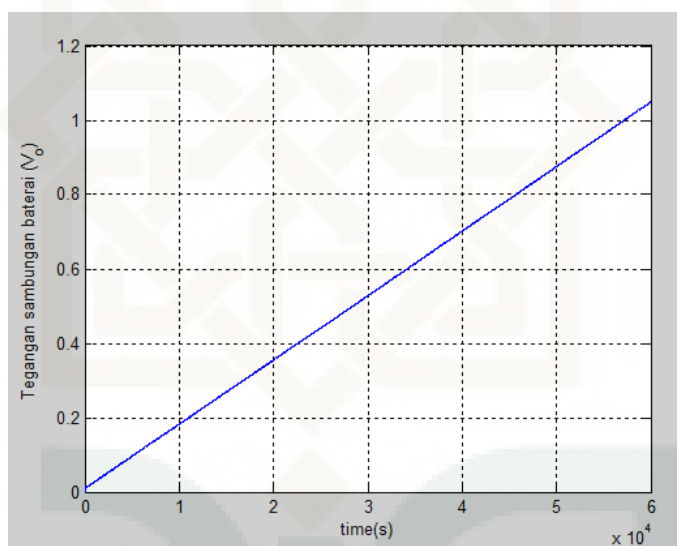
#### **4.2. Proses Charging**

Pada proses *charge* ini bertujuan untuk mengetahui berapa lama pengisian baterai agar tidak terjadi *overcharging* dengan mengetahui besarnya arus yang di alirkan. Arus yang diberikan pada proses *charging* ini sebesar 1,53 A. Arus yang diberikan selama proses *charging* tetap agar beban yang diberikan tidak berlebih dan dapat membuat baterai menjadi awet.

Seperti yang sudah diasumsikan sebelumnya bahwa proses *charging* membutuhkan waktu 60000 s. Sehingga untuk mencari respon dari model *state space* baik yang masih mengandung *noise* atau yang sudah difilter menggunakan fungsi `out = lsim(SimModel, [w, v, u])`, dengan

- $w$  : *noise* pada persamaan *state*,
- $v$  : *noise* pada pengukuran (*output*) sistem,
- $u$  : *input* sistem yaitu arus sebesar 1.53 A.

Hasil yang diperoleh dari *out* adalah matriks berukuran  $60001 \times 1$ . Kolom pertama dari matriks *out* menunjukkan respon yang sebenarnya (masih terdapat *noise*), sedangkan kolom kedua matriks *out* menunjukkan respon yang sudah difilter (tidak ada *noise*). Adapun grafik dari respon yang sudah difilter adalah sebagai berikut:



**Gambar 4.2 Charging**

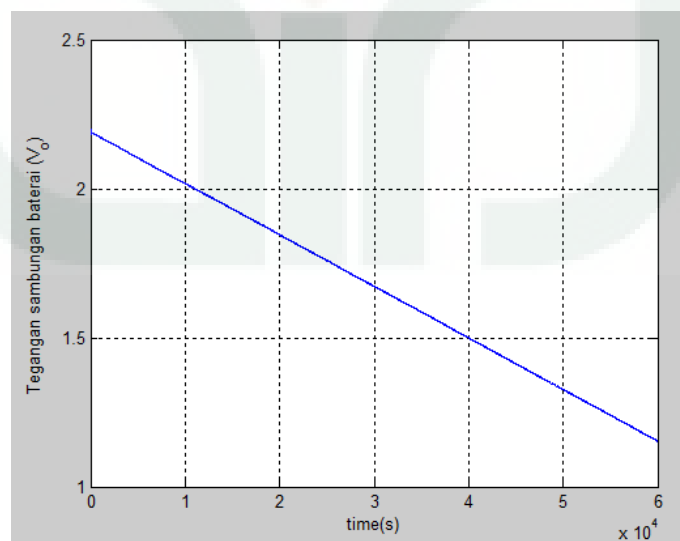
Berdasarkan grafik di atas, sumbu  $x$  menyatakan waktu dari proses *charging* dan sumbu  $y$  menyatakan besarnya tegangan selama proses *charging*. Selama proses *charging* diketahui bahwa tegangan sambungan naik dari  $0V$  sampai kira-kira  $1V$  (secara real adalah  $1,045V$ ) dalam waktu  $60000$  s. Seperti yang diasumsikan, bahwa proses *charging* membutuhkan waktu sekitar  $60000$  s untuk membuat baterai terisi penuh. Sehingga BMS akan segera memutus proses tersebut agar baterai tidak terjadi *overcharging*.

### 4.3. Proses *Discharging*

Kebalikan dari proses *charging*, proses *discharging* akan mengalami penurunan pada tegangannya. Untuk menentukan respon dari proses *discharging* yaitu dengan menggunakan fungsi `out = lsim(SimModel, [w, v, u])`, dengan

- $w$  : *noise* pada persamaan *state*,
- $v$  : *noise* pada pengukuran (*output*) sistem,
- $u$  : *input* sistem yaitu arus sebesar 1.53 A.

Berbeda dengan proses *charging*, dalam proses *discharging* pastilah terdapat tegangan awal. Sehingga dalam respon ini dengan mengatur tegangan awal  $2,2V$ . Respon proses *discharging* diperoleh dari mengurangi tegangan awal sebesar  $2,2V$  dengan entri-entri matriks `out`. Matriks `out` berukuran  $60001 \times 1$ , kolom pertama dari matriks `out` menunjukkan respon yang sebenarnya (masih terdapat *noise*), sedangkan kolom kedua matriks `out` menunjukkan respon yang sudah difilter (tidak ada *noise*). Berikut adalah grafik respon yang sudah difilter pada proses *discharging*:



Gambar 4.3 Discharging

Berdasarkan grafik di atas, sumbu  $x$  menyatakan waktu dari proses *discharging* dan sumbu  $y$  menyatakan penurunan tegangan selama proses *discharging*. Nilai awal dari tegangan sambungan,  $y_0 = V_0$  di atur sebesar  $2,2V$  pada program Matlab. Dari grafik di atas, teramati bahwa proses *discharging* ini mirip dengan proses *charging*, tetapi sekarang ditandai dengan menurunnya secara linear kemiringan  $V_0$ . Tegangan sambungan terbuka  $V_0$  turun dari  $2,2V$  sampai  $1,2V$  dalam kurun waktu  $60000$  s. Hal ini mirip dengan proses *charging* karena seperti yang diasumsikan dibutuhkan  $60000$  s untuk mencapai  $V_0 = 1$  dari potensial nol.

#### 4.4. Respon Kalman Filter

Pada bagian ini akan diketahui respon dari *Kalman Filter*. Seperti yang telah dibahas pada Bab III Subbab 3.7, yaitu dengan mengubah sistem kontinu ke sistem diskrit, diperoleh hasil sebagai berikut

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,9984 & 0,0015 & 0 \\ 1,6238 & 0,6238 & 0 \\ 1,6223 & 0 & 0,6223 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix} u(k) + w$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 5,66 \times 10^{-6} \\ 6,09 \times 10^{-3} \\ 1,05 \times 10^{-2} \end{bmatrix} x(k) + v.$$

Untuk mengetahui dalam simulasi ini, *noise* proses dan *noise* pengukuran diasumsikan berdistribusi normal. Sedangkan untuk matriks kovarian *noise* proses dan kovarian *noise* pengukuran diatur secara konstan, yaitu dengan mengatur matriks kovarian  $\mathbf{Q}$  dan  $\mathbf{R}$  dengan nilai 1. Setelah ditentukan masing-masing nilai kovarian  $\mathbf{Q}$  dan  $\mathbf{R}$  selanjutnya adalah menentukan *steady state* (keadaan sewaktu sifat-sifat suatu sistem tidak berubah dengan berjalannya waktu dari) *Kalman Filter*

dengan persamaan

*update* waktu

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k$$

dan *update* pengukuran

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K(y_k - C_d \hat{x}_k).$$

Dengan menggunakan program Matlab diperoleh *kalman gain* ( $K$ ) yang digunakan untuk *update* prediksi  $\hat{x}_k$  menggunakan pengukuran baru  $y(k)$  yaitu

$$\begin{bmatrix} 1,1207 \times 10^{-5} \\ 0,0001 \\ 0,0002 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk simulasi pemfilteran, diatur *input* dari sistem  $I(t)$  (yang dalam simulasi ini menggunakan variabel  $u$ ) sebesar 1,53 A. Diasumsikan bahwa perubahan arus yang dialirkan selalu konstan setiap waktunya maka besar arus akan selalu 1,53 A. Sedangkan waktu yang dibutuhkan selama proses *charging* atau *discharging* diatur selama 60000 s. Sedangkan *noise* dari estimasi  $w$  maupun *noise* pengukuran  $v$  yaitu dengan membuat matriks acak yang berdistribusi normal.

Setelah ditentukan masing-masing dari *input* dan *noise*, maka selanjutnya adalah membentuk matriks yang dibentuk oleh  $u$ ,  $w$  dan  $v$  dengan menggunakan `[out, x]=lsim(SimModel, [w, v, u])`. Hasil dari matriks tersebut kolom pertama sebagai respon yang sebenarnya  $y$  dan kolom kedua sebagai respon yang difilter  $ye$ . Selanjutnya untuk mencari respon yang diukur  $yv$  yaitu dengan menjumlahkan  $y$  dengan  $v$ .

Langkah terakhir adalah mencari RMS dari estimasi dan RMS dari

pengukuran, yang dinyatakan dengan persamaan berikut

$$\text{MeasErr} = y - y_v;$$

$$\text{MeasErrCov} = \dots$$

$$\text{sum}(\text{MeasErr} . * \text{MeasErr}) / \text{length}(\text{MeasErr});$$

dan

$$\text{EstErr} = y - y_e;$$

$$\text{EstErrCov} = \dots$$

$$\text{sum}(\text{EstErr} . * \text{EstErr}) / \text{length}(\text{EstErr});$$

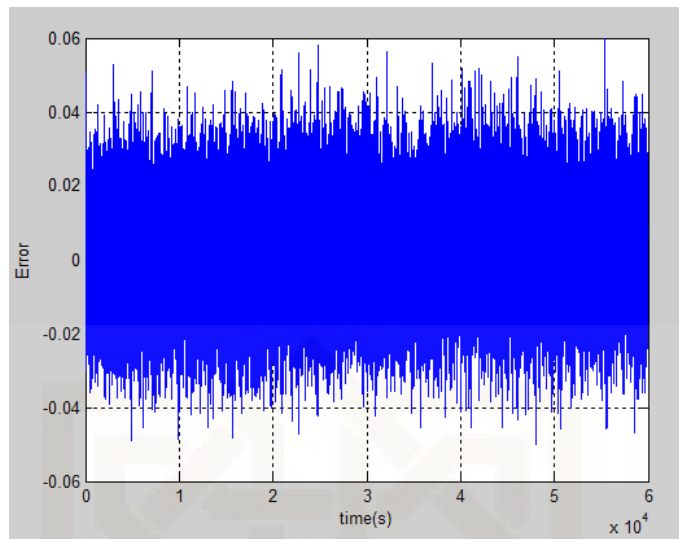
maka akan muncul hasil seperti pada tabel berikut

**Tabel 4.2 RMS Error**

RMS Error	Hasil
Pengukuran	1,00136010496
Estimasi	$1,91859 \times 10^{-4}$

Hasil yang diperoleh dinyatakan dalam tabel (4.2). Dari hasil tersebut, RMS dari estimasi *error*, yang merupakan kesalahan dari *Kalman Filter* jauh lebih kecil dibandingkan dengan kesalahan yang diukur, yaitu dengan hasil 1,0013V dan  $1,92 \times 10^{-4}$ . Berikut adalah plot dari *Kalman Filter* diatur dalam waktu 0-60000 s.





**Gambar 4.4 Respon Kalman Filter**