

**KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF  
LENGKAP DENGAN BANTUAN FUNGSI KONTINU MULTIPLIKATIF**

**SKRIPSI**

untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



Diajukan oleh:

**YOGI KURNIAWAN**

**14610002**

Kepada:

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2018**

## SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : persetujuan skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Yogi Kurniawan  
NIM : 14610002  
Judul Skripsi : Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif  
Lengkap dengan Bantuan Fungsi Kontinu Multiplikatif

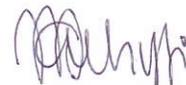
sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 24 Januari 2018  
Pembimbing



MALAHAYATI, M.Sc.  
NIP. 19840412 201101 2 010



## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-795/Un.02/DST/PP.00.9/02/2018

Tugas Akhir dengan judul : Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap dengan Bantuan Fungsi Kontinu Multiplikatif

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : YOGI KURNIAWAN  
Nomor Induk Mahasiswa : 14610002  
Telah diujikan pada : Senin, 12 Februari 2018  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Malahayati, S.Si., M.Sc  
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji I

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.  
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.  
NIP. 19861208 201503 2 006

Yogyakarta, 12 Februari 2018

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

DEKAN



Dr. Murtono, M.Si.  
NIP. 19691212 200003 1 001

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yogi Kurniawan  
NIM : 14610002  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul: **Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap dengan Bantuan Fungsi Kontinu Multiplikatif** adalah benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya, tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan ilmiah yang lazim.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 29 Januari 2018

Yang menyatakan



Yogi Kurniawan

NIM.14610002

## MOTTO

### **Man Jadda Wa Jadda**

"Barang siapa yang bersungguh-sungguh akan mendapatkannya"

Intelligence is not the measurement, but intelligence support all!

*"Hiduplah seperti pohon kayu yang lebat buahnya; hidup di tepi jalan dan dilempari orang dengan batu, tetapi dibalas dengan buah." (Abu Bakar Sibli)*

*"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan sholatmu sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar" (Al-Baqarah: 153)*

*"Sibukkan dirimu dengan yang baik sampai tak sempat untuk yang buruk"*

## PERSEMBAHAN

*Skripsi ini penulis persembahkan kepada:*

*Allah SWT TuhanKu. Alhamdulillahirobbil' alamin, Segala Puji bagi-Mu ya Allah. Sujud syukurKu kusembahkan kepada-Mu Tuhan yang Maha Agung nan Maha Tinggi nan Maha Adil nan Maha Penyayang. Atas takdirMu telah Kau jadikan aku manusia yang senantiasa berfikir, berilmu, beriman, dan bersyukur dalam menjalani kehidupan ini. Semoga keberhasilan ini menjadi satu langkah awal bagiku untuk meraih cita-cita besarku.*

*Kepada keluarga besar Sastrosentono tersayang yang telah mengajarkanKu tata krama dan sopan santun guna mengiringi langkahKu selama ini. Alm. AyahKu (Maryanto), Bapak tiriku (Wajiman) dan IbuKu (Puji Rahayu) tercinta yang telah membimbing dan mendidiku dari kecil, tanpa lelah dalam memberikan nasihat dan motivasi sekaligus bekerja keras untukKu dengan penuh kesabaran. KakakKu (Royi Irmawan) yang telah mengajariKu banyak hal yang tidak dapat saya ambil dari bangku perkuliahan. Serta kakak ipar (Asih), keponakan (Farel), pamanku (Wasidi), bibiku (Punirah), AdekKu (Riyan) dan Adek (Salwa) dan seluruh kerabat keluarga.*

*Semua temanku sejak kecil sampai saat ini yang selalu setia mendampingi, terkhusus teman-teman matematika angkatan 2014 kalian luar biasa dan kamu (Siti Bahjatun Saniyah) yang masih menjadi teman terbaikku yang mungkin akan menjadi teman hidupku.*

*Bapak Ibu Dosen dan staff karyawan Fakultas Sains dan Teknologi yang telah mengajar, mendidik, dan melayani dengan sepenuh hati.*

*Kampus tercinta, Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.*

## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrohmanirrohim*

Alhamdulillah robbil‘alamin, penulis mengucapkan puji dan syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan inayah-Nya serta yang telah memberikan nikmat kesehatan, kemudahan dan kelancaran sampai dengan penyusunan skripsi yang berjudul “Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap dengan Bantuan Fungsi Kontinu Multiplikatif” ini selesai. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, para sahabat dan para pengikutnya seluruh umat Islam sampai akhir zaman nanti.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi sebagian persyaratan kuliah guna memperoleh gelar Sarjana Progam Studi Matematika. Penyusunan skripsi ini tidak akan selesai dengan baik tanpa bantuan, bimbingan, motivasi dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada semua pihak yang telah membantu terwujudnya skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung. Ucapan terima kasih ini penulis tunjukan terutama kepada:

1. Bapak Prof. Drs. KH. Yudian Wahyudi, M.A., Ph.D., selaku Rektor UIN Sunan Kalijaga
2. Bapak Dr. Murtono, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.

3. Bapak M. Wakhid Musthofa, M.Si., selaku Kepala prodi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Ibu Malahayati M.Sc., selaku Dosen Penasehat Akademik, pembimbing tema, dan pembimbing skripsi, yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan, arahan, bantuan dan ilmu sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Bapak/Ibu Dosen dan Staf Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta atas ilmu, bimbingan dan pelayanan selama perkuliahan.
6. Alm. Bapak Maryanto, Bapak Wajiman bapak tiriku dan Ibu Puji Rahayu orang tuaku tersayang, yang dengan sabar mendidik, menasihati dan selalu memberikan yang terbaik. Terimakasih atas dorongan doa, air mata, senyum, dan motivasinya yang selalau dapat meneduhkan dan menenangkan jiwa dalam keadaan apapun.
7. *Mbah kakung* Sarmo, *Mbok idok* Sami, Alm. Kakek Susilo, nenek Parsinah, kakak Royi Irmawan, kakak ipar mbak Asih, keponakan Farel, paman Wasidi, bibi Punirah, adik Riyan dan Salwa, serta seluruh keluarga besar yang telah memberikan bantuan, arahan, doa dan motivasinya untuk selalu maju untuk meraih apa yang dicita-citakan.
8. Semua teman Matematika angkatan 2014 yang selalu memberikan motivasi, semangat dan bantuannya sehingga hidup ini terasa lebih indah, penuh canda tawa dan penuh dengan kebahagiaan. Semoga sukses terus Matematika 2014.

9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu segala kritik maupun saran yang bersifat membangun dalam pengembangan penelitian ini sangat diharapkan. Semoga penyusunan skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak serta ilmunya dapat dikembangkan lebih luas lagi.

Yogyakarta, 29 Januari 2018

Penulis

**Yogi Kurniawan**

**NIM: 14610002**



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSETUJUAN .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iii
HALAMAMAN PERNYATAAN KEASLIAN .....	iv
HALAMAN MOTTO .....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	vi
KATA PENGANTAR .....	vii
DAFTAR ISI .....	x
DAFTAR LAMBANG .....	xii
ABSTRAK .....	xiv
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1. Latar Belakang Masalah .....	1
1.2. Batasan Masalah .....	4
1.3. Rumusan Masalah.....	4
1.4. Tujuan Penelitian .....	5
1.5. Manfaat Penulisan .....	5
1.6. Tinjauan Pustaka .....	5

1.7. Metode Penelitian .....	7
1.8. Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II DASAR TEORI .....</b>	<b>10</b>
2.1. Dasar-dasar Analisis Real.....	10
2.2. Ruang Metrik.....	27
2.3. Titik Periodik dan Titik Tetap.....	34
<b>BAB III TEOREMA KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF.....</b>	<b>36</b>
3.1. Ruang Metrik Multiplikatif.....	36
3.3. Teorema Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif dengan Bantuan Fungsi Kontinu Multiplikatif.....	48
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>74</b>
4.1. Kesimpulan .....	74
4.2. Saran .....	75
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>77</b>
<b>LAMPIRAN.....</b>	<b>78</b>

## DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$  : Himpunan bilangan asli

$\mathbb{R}$  : Himpunan bilangan real

$A \subset B$  : Himpunan  $A$  bagian (subset) himpunan  $B$

$A \subseteq B$  : Himpunan  $A$  bagian (subset) atau sama dengan himpunan  $B$

$\forall$  : Untuk setiap

$\exists$  : Ada, terdapat

$u \in M$  :  $u$  anggota himpunan  $M$

$\ni$  : Sedemikian hingga

$>$  : Lebih dari

$<$  : Kurang dari

$\geq$  : Lebih dari sama dengan

$\leq$  : Kurang dari sama dengan

$$T^n(u_0) : \left( \underbrace{T \circ T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ kali}} \right) (u_0)$$

$(X, d)$  : Ruang metrik pada himpunan  $X$  dengan metrik  $d$

$(M, d)$  : Ruang metrik multiplikatif pada himpunan  $M$  dengan metrik  $d$

→ : Menuju

∞ : Tak terhingga

■ : Akhir dari suatu pembuktian



## ABSTRAK

Ruang metrik multiplikatif adalah himpunan tak kosong yang memiliki definisi jarak antar elemennya dan memenuhi empat aksioma multiplikatif. Bashirov. dkk. (2008) memperkenalkan ruang metrik multiplikatif kemudian Ozavsar dan Cevikel (2012) membahas pemetaan kontraksi multiplikatif di dalamnya. Penelitian ini membahas pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif yang ditulis oleh Sarwar dan Rome (2014) serta beberapa akibat teorema. Masalah penelitian yaitu, bagaimana membuktikan teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dan pembuktian akibat teorema.

Skripsi ini menghasilkan ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif. Teorema dibuktikan dengan beberapa langkah, dimulai dengan membentuk suatu barisan secara iteratif. *Pertama* menunjukkan suatu barisan konvergen, fungsi kontinu multiplikatif berperan penting dalam membuktikan kekonvergenan barisan tersebut. *Kedua* membuktikan kembali suatu barisan konvergen dengan memanfaatkan hasil pertama. *Ketiga* membuktikan pemetaannya memiliki titik periodik dengan memanfaatkan sifat-sifat ruang metrik multiplikatif dan barisan di dalamnya. *Keempat* membuktikan pemetaan ini memiliki titik tetap dengan memanfaatkan titik periodik yang telah didapatkan pada langkah sebelumnya. *Kelima* membuktikan ketunggalan titik tetap dari hasil langkah keempat dengan memanfaatkan definisi ruang metrik multiplikatif.

Akibat dari teorema yang sudah dibuktikan ada dua. Akibat pertama hanya merubah kondisi yang disyaratkan untuk mendapatkan ketunggalan titik tetap. Sehingga akibat ini sudah tidak lagi menggunakan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dalam membuktikan ketunggalan titik tetapnya. Pembuktiannya dengan menunjukkan bahwa kondisi pada akibat memenuhi kondisi pada teorema. Akibat kedua berbeda dengan akibat pertama, akibat ini sudah memenuhi kondisi yang disyaratkan untuk mendapatkan ketunggalan titik tetap. Oleh karena itu, perlu dibuktikan fungsi pada akibat memenuhi kondisi fungsi pada teorema. Kedua akibat teorema, menghasilkan ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif.

**Kata Kunci:** Ruang metrik multiplikatif lengkap, Fungsi kontinu multiplikatif, Titik periodik, Titik tetap.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika ialah bahan kajian yang mempunyai suatu objek abstrak serta dibangun dengan melalui proses penalaran deduktif, yaitu kebenaran suatu konsep yang diperoleh sebagai akibat logis dari suatu kebenaran yang sebelumnya diterima sehingga memiliki keterkaitan antara konsep yang ada dalam matematika bersifat sangat kuat serta jelas. Selain itu matematika bukan merupakan pengetahuan menyendiri yang dapat menjadi sempurna karena matematika itu sendiri, melainkan dengan adanya matematika itu terutama agar dapat membantu manusia dalam mengatasi dan memahami permasalahan ekonomi, sosial, dan juga alam. Ilmu matematika tumbuh serta berkembang karena adanya proses berpikir, oleh sebab itu logika merupakan salah satu dasar agar terbentuknya matematika.

Analisis (dari bahasa Yunani *analisis*, yang berarti memecah atau memisahkan) adalah proses membagi atau memecah suatu topik atau masalah yang mempunyai struktur kompleks menjadi beberapa bagian yang lebih kecil agar diperoleh pemahaman yang lebih baik akan topik atau masalah tersebut. Matematika analisis, secara singkat sering disebut analisis, merupakan cabang matematika murni yang meliputi teori-teori mengenai limit, deret tak hingga, fungsi analitik, derivative, serta ukuran dan integral. Matematika analisis

dapat diaplikasikan pada berbagai cabang matematika yang mempunyai hubungan dengan konsep ruang topologi atau ruang metrik. Matematika analisis mengajarkan cara berpikir analitis, sehingga dapat membantu dalam menyelesaikan masalah-masalah baru yang tidak standar/baku. Oleh karena itu, matematika analisis merupakan fondasi yang cukup penting untuk pengembangan konsep dan metode, baik dalam matematika analisis itu sendiri, cabang matematika di luar analisis, maupun terapannya.

Perkembangan penelitian dibidang matematika terus berkembang, khususnya penelitian dibidang analisis. Analisis merupakan bagian dari studi matematika yang banyak diminati oleh para ilmuwan matematika. Salah satu penelitian bidang analisis yang berkembang saat ini yaitu mengenai ruang metrik. Ruang metrik adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu fungsi yang disebut metrik yang memenuhi beberapa aksioma.

Bashirov dkk. pada tahun 2008 memperkenalkan kalkulus multiplikatif dalam penelitiannya yang berjudul "*Multiplicative Calculus and Its Applications*". Selanjutnya, Ozavsar dan Cevikel pada tahun 2012 dalam jurnal yang berjudul "*Fixed Point of Multiplicative Contraction Mappings on Multiplicative Metric Space*" memperkenalkan konsep pemetaan kontraksi multiplikatif dan membuktikan beberapa teorema titik tetap pada pemetaan ruang metrik multiplikatif lengkap. Mereka juga memberikan beberapa sifat topologi yang relevan pada ruang metrik multiplikatif.

Salah satu teori yang erat hubungannya dengan ruang metrik adalah teori titik tetap. Teori titik tetap juga merupakan topik di dalam ilmu matematika analisis yang menarik untuk dipelajari dan dikaji lebih dalam karena mempunyai peranan penting baik di dalam ilmu matematika itu sendiri maupun di bidang ilmu lainnya. Teori titik tetap juga sering diaplikasikan dalam permasalahan-permasalahan persamaan linear, persamaan differensial, persamaan integral, teori permainan, sistem dinamik dan ekonomi.

Berdasarkan perkembangan ruang metrik, penelitian mengenai teori titik tetap di ruang metrik multiplikatif merupakan penelitian yang terus berkembang dan aplikatif sehingga menarik untuk diteliti lebih lanjut. Khususnya, penelitian ini mempelajari mengenai teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dan beberapa akibat dari teorema. Teorema dan akibat tersebut merupakan penjabaran dari jurnal yang ditulis oleh Sarwar dan Rome yang berjudul "*Some Unique Fixed Points Theorems in Multiplicative Metric Space*", serta melengkapi langkah-langkah pembuktian teorema yang belum dijabarkan secara mendetail. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini merupakan pengembangan dari titik tetap di ruang metrik umum hausdorff lengkap oleh Aydi dkk. pada tahun 2012 dalam jurnal yang berjudul "*Fixed Point Results on A Class of Generalized Metric Spaces*" untuk ruang metrik multiplikatif.

## 1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah diperlukan supaya ruang lingkup penelitian menjadi lebih jelas, fokus, dan spesifik. Selain itu guna menghindari kesalahpahaman terhadap objek dari suatu penelitian dan untuk membantu penulis mengarah sesuai dengan tema penelitian. Berdasarkan pada latar belakang masalah dan kajian-kajian pendukung lainnya maka penulisan skripsi ini dibatasi pada pembahasan ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif dengan pembahasan pokok yang sudah ditentukan dan sifat-sifat pada ruang metrik multiplikatif dan teori yang lain yang diperlukan dalam menyelesaikan permasalahan pada pembahasan tersebut. Sehingga sifat-sifat dan pembahasan ketunggalan titik tetap yang lain di ruang metrik multiplikatif yang sama tidak dibahas dalam skripsi ini.

## 1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut, maka rumusan masalah yang akan diselesaikan dalam penulisan skripsi ini adalah

1. Bagaimana pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif?
2. Bagaimana pembuktian akibat dari teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif ?

#### 1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Mengetahui bagaimana pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif.
2. Mengetahui bagaimana pembuktian akibat dari teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

- 1 Memberi pengetahuan mengenai ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif.
- 2 Penelitian ini dapat dijadikan pembaca maupun peneliti sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya sehingga bisa dikaji lebih lanjut, dan memberikan wawasan baru bagi pembaca untuk lebih mengenal ruang metrik multiplikatif yang merupakan bentuk ruang metrik yang lebih khusus dan teorema ketunggalan titik tetap yang ada di dalamnya.

#### 1.6 Tinjauan Pustaka

Buku yang berjudul "*Metric Spaces*" yang ditulis oleh Shirali dkk. pada tahun 2006 memberikan gambaran mengenai ruang metrik secara umum dan beberapa konsep terkait. Penelitian mengenai ruang metrik multiplikatif pertama kali dikenalkan oleh Bashirov dkk. pada tahun 2008 dalam jurnal yang

berjudul “*Multiplicative Calculus and Its Applications*” yang menginisiatif ruang metrik multiplikatif. Beberapa referensi lain yang dijadikan sebagai materi pendukung dalam mempelajari ruang metrik multiplikatif antara lain: buku “*Introduction to Real Analysis*” yang ditulis Robert G. Bartle edisi tahun 2000 dan 2010. Buku ini merupakan salah satu referensi yang digunakan dalam memahami konsep dasar sifat- sifat dari bilangan real seperti halnya kekontinuan, kekonvergenan dan lain sebagainya. Sifat-sifat tersebut digunakan dalam memahami sifat di ruang metrik multiplikatif.

Ozavsar dan Cevikel pada tahun 2012 dalam jurnal yang berjudul “*Fixed Point of Multiplicative Contraction Mappings on Multiplicative Metric Space*” memberikan konsep pemetaan kontraksi multiplikatif dan membuktikan beberapa teorema titik tetap pada pemetaan ruang metrik multiplikatif lengkap. Jurnal tersebut memberikan definisi- definisi terkait dalam ruang metrik multiplikatif dan beberapa teorema yang mendasar. Selain itu pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif pada penelitian ini membutuhkan definisi dari titik periodik yang dipelajari dari jurnal yang dituliskan oleh Khabibah pada tahun 2013. Kemudian untuk memahami teori titik tetap dapat dipelajari dalam jurnal yang berjudul “*Common Fixed Points for Weak Commutative Mappings on A Multiplicative Metric Space. Fixed Point Theory and Applications*” yang ditulis oleh Hxiaoju dkk. pada tahun 2014

Penulisan skripsi ini merujuk pada jurnal penelitian yang berjudul “*Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplikatif Metric Space*” yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome yang dipublikasikan pada Desember

2014. Jurnal tersebut membahas mengenai teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif. Jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome ini yang kemudian dijadikan sebagai literatur utama.

Skripsi dengan judul “Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif dengan Bantuan Fungsi Kontinu Multiplikatif” disusun berdasarkan beberapa tinjauan pustaka di atas. Penelitian ini hanya fokus membahas ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dan beberapa akibat dari teorema tersebut beserta pembuktiannya. Teorema pendukung yang digunakan dalam membuktikan ketunggalan titik tetap tersebut juga diberikan sebelumnya guna mempermudah memahami alur pembuktiannya. Pada penelitian ini juga diberikan sifat-sifat dari ruang metrik multiplikatif guna mempermudah dalam membuktikan ketunggalan titik tetap di dalamnya.

### **1.7 Metode Penelitian**

Metode yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini adalah studi literatur, yaitu mempelajari beberapa sumber tertulis tentang ruang metrik multiplikatif sesuai dengan tema penelitian. Adapun sifat penelitian dalam skripsi ini adalah kualitatif. Sebelumnya, dijelaskan dasar-dasar analisis real, konsep ruang metrik dan teori titik tetap sebagai dasar teori. Konsep fungsi kontinu, kekonvergenan dan barisan Cauchy pada ruang metrik juga dijelaskan untuk memudahkan dalam memahami pembuktian teorema di ruang metrik multiplikatif. Selanjutnya

diberikan definisi ruang metrik biasa sebagai dasar dalam mempelajari ruang metrik multiplikatif.

Pembahasan inti dari penelitian ini adalah tentang teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif. Dengan lengkap dijelaskan langkah-langkah pembuktian teorema titik tetap pada ruang metrik multiplikatif yang mengacu pada jurnal yang ditulis oleh Sarwar and Rome pada tahun 2014 yang berjudul “*Some Unique Fixed Points Theorems in Multiplicative Metric Space*”. Beberapa langkah pembuktian teorema tidak dijelaskan dalam jurnal tersebut sehingga digunakan jurnal-jurnal lain yang berkaitan sebagai rujukan.

### **1.8 Sistematika Penulisan**

Sistematika penulisan ini disusun untuk memberikan gambaran secara menyeluruh dan mempermudah dalam memahami penulisan ini. Secara garis besar sistematika skripsi ini terdiri dari empat bab sebagai berikut:

#### **BAB I: PENDAHULUAN**

Bab ini membahas mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian serta sistematika penulisan.

#### **BAB II: LANDASAN TEORI**

Pada bagian ini memaparkan secara lebih jelas dan menguraikan teori-teori yang menjadi dasar untuk dipahami agar mudah mengikuti pembahasan yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

### BAB III: PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas inti dari penelitian yaitu ruang metrik multiplikatif dan Teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap dengan bantuan fungsi kontinumultiplikatif.

### BAB IV: PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan pada bab sebelumnya, beserta saran-saran yang perlu disampaikan untuk pembaca dan matematikawan dalam penelitian selanjutnya.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Fungsi yang terdefinisi di ruang metrik multiplikatif lengkap dan dipetakan ke dirinya sendiri serta memenuhi pertidaksamaan tertentu, memiliki titik tetap tunggal dengan bantuan fungsi kontinu multiplikatif. Pembuktian dimulai dengan membentuk suatu barisan secara iteratif. *Pertama* menunjukkan suatu barisan konvergen. Fungsi kontinu multiplikatif disini berperan penting dalam membuktikan kekonvergenan barisan tersebut. *Kedua* membuktikan kembali suatu barisan konvergen, pembuktian memanfaatkan hasil dari langkah pertama. *Ketiga* membuktikan pemetaannya memiliki titik periodik. Pembuktiannya memanfaatkan dari sifat-sifat ruang metrik multiplikatif dan barisan di dalamnya. Hasil dari langkah pertama dan kedua tersebut banyak digunakan dalam pembuktian tahap ini. *Keempat* membuktikan pemetaan ini memiliki titik tetap dengan memanfaatkan titik periodik yang telah didapatkan pada langkah sebelumnya. *Kelima* membuktikan ketunggalan titik tetap dari hasil langkah keempat dengan memanfaatkan definisi ruang metrik multiplikatif.

2. Akibat dari teorema yang sudah dibuktikan ada dua. Akibat pertama hanya merubah kondisi yang disyaratkan untuk mendapatkan ketunggalan titik tetap. Sehingga akibat ini sudah tidak lagi menggunakan bantuan fungsi kontinu multiplikatif dalam membuktikan ketunggalan titik tetapnya. Pembuktian akibat pertama ini dengan menunjukkan bahwa kondisi pada akibat memenuhi kondisi pada teorema. Akibat kedua berbeda dengan akibat pertama, akibat kedua ini sudah memenuhi kondisi yang disyaratkan untuk mendapatkan ketunggalan titik tetap. Oleh karena itu, perlu dibuktikan fungsi pada akibat memenuhi kondisi fungsi pada teorema. Kedua akibat teorema, menghasilkan titik tetap tunggal di ruang metrik multiplikatif.

#### 4.2 Saran

Berdasarkan proses penelitian yang telah dilakukan, maka saran-saran yang dapat disampaikan penulis adalah:

1. Penelitian ini hanya membahas tentang konsep dasar ruang metrik multiplikatif dan beberapa teorema ketunggalan titik tetapnya. Oleh karena itu penelitian ini dapat dikembangkan lagi, misalnya membawa teorema yang ekuivalen ke ruang metrik yang berbeda. Selain itu, dapat mengkaji lebih jauh ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif dengan kondisi teorema yang baru.
2. Selain itu, dalam penelitian ini, contoh penerapan ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap terbatas dan belum diberikan contoh

untuk kedua akibat dari teorema tersebut sehingga perlu adanya contoh-contoh lain guna memudahkan dalam pemahaman teorema. Sehingga perlu adanya penelitian lebih lanjut mengenai hal ini.

Demikian saran-saran yang dapat disampaikan penulis, semoga tugas akhir ini dapat menjadi inspirasi bagi pembaca untuk mengembangkan lagi penerapan titik tetap di ruang metrik khususnya dan di ruang – ruang lain pada analisis fungsional pada umumnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R. G., and Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Third Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bartle, R. G., and Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces*. London: Springer – Verlag.
- M. Sarwar, and B. Rome , *Some Unique fixed points theorems in multiplicative metric space*. ArXiv: 1410.3384v2 [math, GM] (2014).
- A.E. Bashirov, E.M. Kurpnar and A. Ozyapc, *Multiplicative calculus and its Applications*. J. Math.Analy. App., 337(2008), 36–48.
- M. Ozavsar and A. C. Cevikel, *Fixed point of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric space*. arXiv:1205.5131v1 [matn.GN] (2012).
- H. Aydi, E. Karapinar and H. Lakzian, *Fixed point results on a class of generalized metric spaces*. J. Math. Sci. 1(2012), 6-46.
- H. Hxiaoju dkk. *common fixed points for weak commutative mappings on a multiplicative metric space*. *Fixed Point Theory and applications* 2014, 2014:48.

## LAMPIRAN I

Pembuktian ini digunakan dalam melengkapi pembuktian pada Teorema 2.1.15 di halaman 20 yaitu kekonvergenan subbarisan.

Pembuktian dengan induksi matematika:

Diberikan barisan

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$$

adalah bilangan asli yang naik tegas.

Akan dibuktikan  $n_k \geq k$  untuk setiap  $k \in \mathbb{N}$ .

**Bukti:**

(i) Benar bahwa untuk  $k = 1$ , berarti

$$n_1 \geq 1.$$

(ii) Diasumsikan benar untuk  $n_k \geq k$ .

Karena barisan  $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$  adalah bilangan asli yang naik tegas maka  $n_{k+1} > n_k$ .

Berdasarkan asumsi  $n_k \geq k$  maka  $n_{k+1} > n_k \geq k$ .

Sehingga diperoleh

$$n_{k+1} \geq k + 1.$$

Jadi terbukti benar bahwa  $n_k \geq k$  untuk setiap  $k \in \mathbb{N}$ . ■

## CURICULUM VITAE



Nama Lengkap : Yogi Kurniawan

Tempat/Tgl. Lahir : Gunungkidul, 9 September 1996

Alamat : Dsn. Tekik RT 028 RW 008, Desa  
Nglindur, Kecamatan Girisubo,  
Kabupaten Gunungkidul, Provinsi  
D.I. Yogyakarta

Telepon (Whatsapp) : +6285927484901

E-mail : [yogigunungkidul099@gmail.com](mailto:yogigunungkidul099@gmail.com)

Facebook : Yogi Kurniawan

Instagram : @yogikurniawan099

Google+ : Yogi Kurniawan

### Pendidikan Formal:

- MI YAPPI Tekik Tahun 2002-2008
- SMPN 1 Girisubo Tahun 2008-2011
- SMAN 2 Wonosari Tahun 2011-2014
- Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta Tahun 2014-2018