

**PERBANDINGAN ESTIMASI PARAMETER PADA DISTRIBUSI
BINOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM
LIKELIHOOD DAN METODE BAYES**

SKRIPSI

untuk memenuhi sebagian persyaratan mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

HAMID WAN NENDRA

14610018

Kepada:

**STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

2018



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : persetujuan skripsi

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Hamid Wan Nendra
NIM : 14610018
Judul Skripsi : Perbandingan Estimasi Parameter pada Distribusi Binomial dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 13 Februari 2018

Pembimbing

Moh Farhan Oudratullah, M.Si

NIP. 19790922 200801 1 011



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor: B-1164/Un.02/DST/PP.00.9/02/2018

Tugas Akhir dengan judul : Perbandingan Estimasi Parameter pada Distribusi Binomial dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : HAMID WAN NENDRA
Nomor Induk Mahasiswa : 14610018
Telah diujikan pada : Kamis, 22 Februari 2018
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Mohammad Fakhri Qudratullah, S.Si., M.Si
NIP. 19790922 200801 1 011

Penguji I

Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc
NIP. 19750912 200801 2 015

Penguji II

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
NIP. 19800402 200501 1 003

Yogyakarta, 22 Februari 2018

UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
DEKAN



Murtono, M.Si.
NIP. 19691212 200003 1 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Hamid Wan Nendra

NIM : 14610018

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

dengan ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan ilmiah yang lazim.

Yogyakarta, 13 Februari 2018

Yang menyatakan



Hamid Wan Nendra

14610018

HALAMAN PERSEMBAHAN

Ku persembahkan skripsiku ini untuk yang selalu bertanya:

“kapan skripsimu selesai?”

Terlambat lulus atau lulus tidak tepat waktu bukan sebuah kejahatan, bukan sebuah aib. Alangkah kerdilnya jika mengukur kepintaran seseorang hanya dari siapa yang paling cepat lulus. Bukankah sebaik-baiknya skripsi adalah skripsi yang selesai? Baik itu selesai tepat waktu maupun tidak tepat waktu.

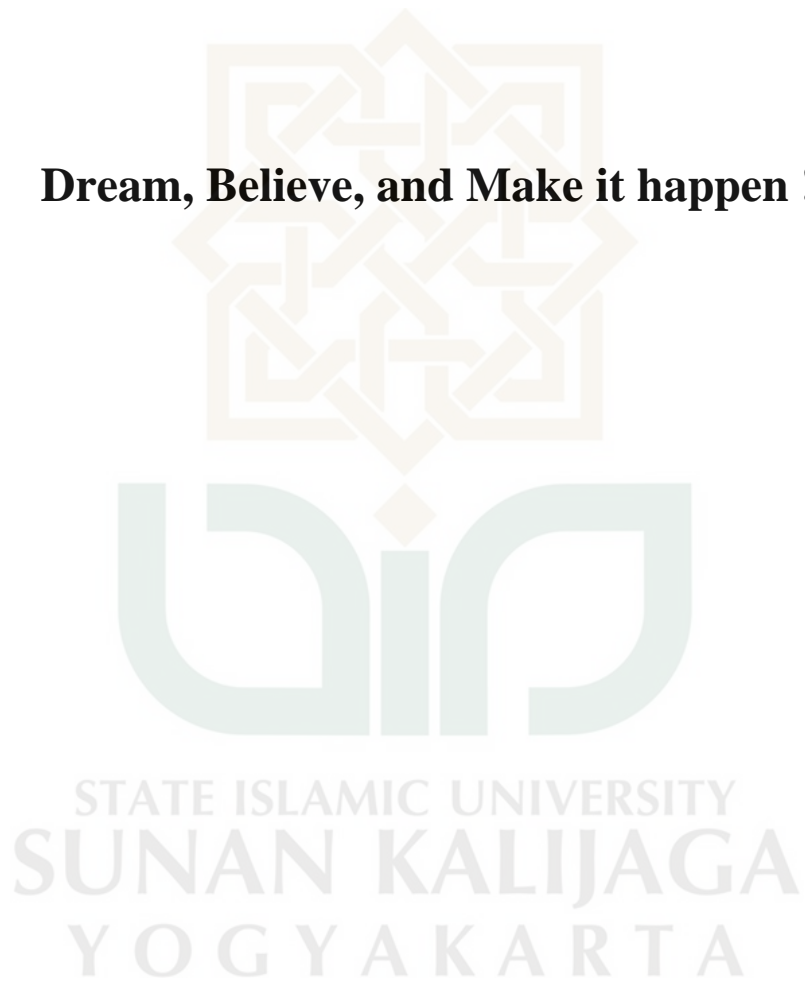
Spesial orangtuaku, terimakasih untuk segala yang telah engkau berikan, dukungan dan kasihmu yang membuatku kuat.

Terakhir untuk kaptenku, sukses selalu !!!

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

Dream, Believe, and Make it happen !!!



KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, dan karunia serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta sekaligus dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Perbandingan Estimasi Parameter pada Distribusi Binomial dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes.”

Shalawat serta salam semoga terlimpahkan pada Nabi Muhammad SAW, keluarga serta sahabat-sahabatnya, yang telah menuntun ke jalan yang benar. Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membimbing, mengarahkan dan memotivasi penulis. Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya, Amin.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis mengharap kritik dan saran dari semua pihak guna kesempurnaan dan kebaikan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan dapat menambah khazanah keilmuan, Amin.

Yogyakarta, 13 Februari 2018

Penulis

Hamid Wan Nendra

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
MOTTO	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	4
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat	5
1.6 Tinjauan Pustaka	5
1.7 Sistematika Penulisan	7
1.8 Metode Penelitian	9
BAB II DASAR TEORI	10
2.1 Variabel Random	10
2.2 Fungsi Distribusi Peluang	10
2.3 Ekspektasi dan Varian	11
2.4 Fungsi Densitas Peluang Bersama	14

2.5 Fungsi Densitas Peluang Marginal	15
2.6 Distribusi Bersyarat	15
2.7 Fungsi Gamma	16
2.8 Distribusi Beta	20
2.9 Distribusi Binomial	23
2.10 Keluarga Eksponensial	25
2.11 Teorema Bayes	26
2.12 Fungsi Turunan	27
2.13 Estimasi dan Sifat-Sifat Estimator	29
2.14 Fungsi Likelihood	30
2.15 Distribusi Prior	31
2.16 Distribusi Posterior	33
2.17 Metode Maksimum Likelihood	34
2.18 <i>Mean Square Error</i> (MSE)	35
2.19 <i>Bayesian Information Criterion</i> (BIC)	37
BAB III PEMBAHASAN	38
3.1 Distribusi Binomial Berasal dari Keluarga Eksponensial	38
3.2 Distribusi Beta Berasal dari Keluarga Eksponensial	39
3.3 Metode Maksimum Likelihood untuk Distribusi Binomial	40
3.3.1 Fungsi Likelihood Distribusi Binomial	41
3.3.2 Estimator Maksimum Likelihood Distribusi Binomial	42
3.4 Sifat-Sifat Estimator untuk Metode Maksimum Likelihood	44
3.4.1 Sifat Tak Bias (<i>unbiased</i>)	44
3.4.2 <i>Mean Square Error</i> (MSE)	45

3.5 Metode Bayes untuk Distribusi Binomial	45
3.5.1 Distribusi Beta	46
3.5.2 Menentukan Prior	47
3.5.3 Distribusi Posterior dari Distribusi Binomial	52
3.5.4 <i>Posterior Mean Square</i> (PMS)	53
3.5.5 Estimator Bayes dari Distribusi Binomial dengan Prior Beta	56
3.5.6 Nilai Ekspektasi atau Mean Distribusi Posterior	58
3.5.7 Varian Distribusi Posterior	60
3.6 Sifat-Sifat Estimator untuk Metode Bayes	62
3.6.1 Sifat Tak Bias (<i>unbiased</i>)	62
3.6.2 <i>Mean Square Error</i> (MSE)	63
3.7 <i>Bayesian Information Criterion</i> (BIC)	64
BAB IV STUDI KASUS	67
4.1 Gambaran Umum Data I	67
4.2 Estimasi Parameter dengan Metode Maksimum Likelihood untuk Data I	68
4.2.1 Ekspektasi dan Variansi untuk Data I	69
4.2.2 <i>Mean Square Error</i> (MSE) Metode Maksimum Likelihood untuk Data I	
4.2.3 <i>Bayesian Information Criterion</i> (BIC) Metode Maksimum Likelihood	70
4.3 Estimasi Parameter dengan Metode Bayes untuk Data I.....	71
4.3.1 Prior Beta	71
4.3.2 Ekspektasi dan Variansi Prior untuk Data I	72
4.3.3 Distribusi Posterior dan Estimator Bayes untuk Data I.....	73
4.3.4 Ekspektasi dan Variansi Distribusi Posterior untuk Data I	74
4.3.5 <i>Mean Square Error</i> (MSE) Metode Bayes untuk Data I	75
4.3.6 <i>Bayesian Information Criterion</i> (BIC) Metode Bayes untuk Data I...	76

4.4 Gambaran Umum Data II	78
4.5 Estimasi Parameter dengan Metode Maksimum Likelihood	
untuk Data II	79
4.5.1 Ekspektasi dan Variansi untuk Data II	79
4.5.2 <i>Mean Square Error</i> (MSE) Metode Maksimum Likelihood untuk Data I	
4.5.3 <i>Bayesian Information Criterion</i> (BIC) Metode Maksimum Likelihood	81
4.6 Estimasi Parameter dengan Metode Bayes untuk Data II	81
4.6.1 Prior Beta	81
4.6.2 Ekspektasi dan Variansi Prior untuk Data II	83
4.6.3 Distribusi Posterior dan Estimator Bayes untuk Data II.....	84
4.6.4 Ekspektasi dan Variansi Distribusi Posterior untuk Data II.....	85
4.6.5 <i>Mean Square Error</i> (MSE) Metode Bayes untuk Data II	85
4.6.6 <i>Bayesian Information Criterion</i> (BIC) Metode Bayes untuk Data II..	86
BAB V PENUTUP	87
5.1 Kesimpulan	87
6.2 Saran	88
DAFTAR PUSTAKA	89
LAMPIRAN I	90
LAMPIRAN II	93

DAFTAR SIMBOL

$f(x)$: Fungsi densitas peluang dari variabel random X
$E(X)$: Nilai ekspektasi dari variabel random X
$Var(X)$: Variansi dari variabel random X
\sim	: Berdistribusi
$\sum_i^n x_i$: Penjumlahan himpunan anggota x_i, \dots, x_n
θ	: Parameter proporsi
σ	: Standar deviasi
a	: Batas bawah parameter distribusi Beta
b	: Batas atas parameter distribusi Beta
Γ	: Fungsi Gamma
∂	: Diferensial
n	: Jumlah data sampel
L	: Likelihood
e	: Eksponensial
$f(\theta)$: Distribusi prior
$f(x \theta)$: Fungsi likelihood
$f(\theta x)$: Distribusi posterior

PERBANDINGAN ESTIMASI PARAMETER PADA DISTRIBUSI BINOMIAL DENGAN MENGGUNAKAN METODE MAKSIMUM LIKELIHOOD DAN METODE BAYES

Oleh : Hamid Wan Nendra (14610018)

ABSTRAKSI

Estimasi titik dari sebuah parameter populasi adalah sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai penaksir dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Estimasi titik dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa metode, diantaranya metode klasik dan metode Bayes. Metode klasik merupakan metode estimasi yang didasarkan untuk memaksimalkan fungsi likelihood, sedangkan metode Bayes merupakan metode yang menggabungkan informasi saat ini dengan informasi sebelumnya atau yang biasa disebut distribusi prior. Penggabungan informasi tersebut menghasilkan distribusi posterior, selanjutnya distribusi tersebut digunakan sebagai dasar estimasi parameter.

Pada penelitian ini, distribusi sampel yang digunakan adalah distribusi Binomial dengan prior konjugat yaitu distribusi Beta. Hasil estimasi parameter distribusi Binomial dengan kedua metode yaitu metode maksimum likelihood dan metode Bayes akan diaplikasikan pada 2 (dua) data, yaitu 50 data mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi dan 513 data mahasiswa angkatan 2017 Fakultas Sains dan Teknologi serta dievaluasi dengan melihat *Mean Square Error* dan *Bayesian Information Criterion*nya.

Hasil aplikasi pada 50 data mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi dan 513 data mahasiswa angkatan 2017 Fakultas Sains dan Teknologi menunjukkan bahwa nilai estimasi titik dari kedua metode yaitu metode maksimum likelihood dan metode Bayes adalah sama yaitu 0.38 untuk data I dan 0.255 untuk data II sehingga diperoleh nilai *Bayesian Information Criterion* (BIC) dari kedua metode tersebut sama yaitu 8.227117 untuk data I dan 12.660223 untuk data II, namun nilai *Mean Square Error* (MSE) untuk metode Bayes lebih kecil dari metode maksimum likelihood, sehingga metode Bayes lebih baik digunakan untuk mengestimasi parameter jika ukurannya adalah *Mean Square Error* (MSE).

Kata kunci : BIC, Estimasi Parameter, Metode Bayes, Metode Maksimum Likelihood, MSE

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Statistika adalah suatu ilmu yang berisi sejumlah aturan dan prosedur untuk mengumpulkan data, menyajikan data, menganalisa data, serta menginterpretasikannya. Dalam ilmu statistika terdapat metode statistika yang terbagi dua, yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensi. Statistika deskriptif merupakan cabang statistika yang bertujuan untuk menyajikan informasi data sebagai deskripsi dari suatu peristiwa yang disajikan dalam bentuk numerik, tabel, grafik, atau kurva distribusi. Hal ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman dan pengambilan keputusan terhadap suatu peristiwa. Sedangkan statistika inferensi merupakan cabang statistika yang menggunakan konsep probabilitas untuk membuat perkiraan, prediksi, peramalan atau generalisasi suatu obyek berdasarkan data yang diperoleh baik berdasarkan populasi maupun sampel (Usman dan Akbar, 2006).

Pada statistika inferensi terdapat 2 (dua) bidang utama, yaitu pendugaan parameter dan pengujian hipotesis. Pendugaan parameter merupakan suatu cara untuk memprediksi karakteristik dari suatu populasi berdasarkan contoh yang diambil sehingga tujuan dari pendugaan ini adalah untuk mendapatkan gambaran yang jelas tentang ciri-ciri populasi yang tidak diketahui dengan menggunakan informasi contoh atau penduga (*estimator*). Dugaan terhadap

parameter tersebut dapat berupa titik (*point estimator*) dan dapat juga berupa dugaan selang (*interval estimator*) (Lungan, 2006). Suatu taksiran titik (*point estimator*) dari suatu parameter populasi θ ialah suatu nilai tunggal $\hat{\theta}$ dari suatu titik Θ . Sebagai contoh nilai \bar{x} , statistik yang dihitung dari suatu sampel ukuran n , merupakan suatu taksiran titik parameter populasi μ . Begitupun $\hat{p} = \frac{x}{n}$, suatu taksiran titik dari proporsi sesungguhnya p untuk suatu percobaan binomial. Statistik yang digunakan untuk mendapat taksiran titik disebut penaksiran suatu fungsi keputusan. Jadi fungsi keputusan s^2 , yang merupakan fungsi peubah acak, ialah suatu penaksiran σ^2 dan s^2 ialah ‘tindakan’ yang diambil. Sampel yang berlainan umumnya akan menghasilkan tindakan atau taksiran yang berlainan pula.

Teori estimasi titik dapat dilakukan dengan 2 (dua) metode yaitu metode Klasik dan metode Bayes. Salah satu teknik yang digunakan dalam metode klasik adalah metode maksimum likelihood. Metode Klasik sepenuhnya mengandalkan proses inferensi pada data sampel yang diambil dari populasi sedangkan Metode Bayes disamping memanfaatkan data sampel yang diambil dari populasi juga memperhitungkan suatu distribusi awal yang disebut distribusi prior (Walpole dan Myres, 1995). Metode Bayes yang memandang parameter sebagai variabel yang menggambarkan pengetahuan awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior (Bostald, 2007). Setelah pengamatan dilakukan, informasi dalam distribusi prior dikombinasikan dengan informasi data sampel

melalui teorema Bayes, dan hasilnya dinyatakan dalam bentuk distribusi yang disebut distribusi posterior yang selanjutnya menjadi dasar untuk inferensi didalam metode Bayes (Berger, 1990).

Penelitian sebelumnya yang menggunakan metode maksimum likelihood dan metode Bayes untuk mengestimasi parameter pada berbagai distribusi baik untuk distribusi diskrit maupun kontinu masih jarang. Oleh karena itu penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam tentang estimasi parameter. Pada penelitian ini penulis memilih distribusi Binomial untuk mengestimasi parameternya menggunakan Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes yang selanjutnya akan diterapkan dalam studi kasus mengenai proporsi mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang berasal dari Madrasah Aliyah (MA) atau Pondok Pesantren pada jenjang studi sebelumnya dan proporsi mahasiswa angkatan 2017 Fakultas Sains dan Teknologi berasal dari Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, dalam penulisan penelitian ini, permasalahan yang dibahas yaitu

1. Bagaimana hasil estimasi titik pada distribusi Binomial dengan menggunakan Metode Maksimum Likelihood?
2. Bagaimana hasil estimasi titik pada distribusi Binomial dengan menggunakan Metode Bayes?

3. Bagaimana perbandingan estimasi titik pada distribusi Binomial yang dicari menggunakan metode maksimum likelihood dan metode Bayes untuk parameter proporsi Binomial (θ) yang tidak diketahui?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan penelitian ini pembahasan masalah akan dibatasi oleh

1. Prior Beta sebagai prior konjugat dari distribusi Binomial.
2. Metode Bayes dan Maksimum Likelihood sebagai metode untuk mengestimasi serta *Mean Square Error* dan *Bayesian Information Criterion* sebagai kriteria evaluasi estimator.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Menentukan hasil estimasi titik pada distribusi Binomial dengan menggunakan Metode Maksimum Likelihood.
2. Menentukan hasil estimasi titik pada distribusi Binomial dengan menggunakan Metode Bayes.
3. Membandingkan estimasi titik yang didapat dengan metode Bayes dan metode maksimum likelihood untuk distribusi Binomial untuk parameter proporsi Binomial (θ) yang tidak diketahui.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

1. Bagi penulis mengetahui tentang proses dan hasil estimasi parameter distribusi Binomial dengan metode Maksimum Likelihood dan metode Bayes. Selain itu, dapat menjadi wacana baru dalam pengembangan ilmu pengetahuan khususnya Matematika yang dapat dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari.
2. Bagi lembaga sebagai sumbangan pemikiran dan sebagai upaya peningkatan kualitas keilmuan, khususnya dalam bidang Matematika di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Bagi pembaca memberikan gambaran tentang proses dan hasil estimasi parameter distribusi Binomial dengan metode Maksimum Likelihood dan metode Bayes, sehingga pembaca dapat mengaplikasikan pada obyek yang berbeda, serta menggunakan distribusi yang lain dan mengkaji dengan metode yang lain bila ingin mengembangkan untuk penelitian selanjutnya.

1.6 Tinjauan Pustaka

Tinjauan pustaka pada penelitian ini penulis deskripsikan dan telaah melalui buku, makalah, skripsi, jurnal matematika, maupun sumber lainnya yang terdapat relevansinya dengan obyek pembahasan. Di antara penelitian yang berkaitan dalam penelitian ini adalah penelitian Ida Putri Rarasati mahasiswa Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim

Malang yang berjudul “*Estimasi Parameter Distribusi Gamma Dengan Metode Bayes*” dimana dalam penelitian tersebut membahas tentang estimasi parameter distribusi gamma selanjutnya mensimulasikan dengan data yang dibangkitkan dari *software Minitab 14*. Data yang dibangkitkan ini merupakan data yang berdistribusi Gamma sebanyak 40 data.

Selain itu, penelitian ini juga merujuk pada penelitian Nurul Kustinah, mahasiswi Program Studi Matematika, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Surakarta yang berjudul “*Pemilihan Model Regresi Terbaik Dengan Bayesian Information Criterion (BIC)*” dimana pada penelitian tersebut membahas tentang pemilihan model dengan menggunakan *BIC* didasarkan pada teorema Bayesian dan metode *MLE*. Penelitian tersebut mengkaji ulang metode *BIC* dan menerapkannya dalam pemilihan model regresi terbaik.. Dalam penelitian tersebut tersebut juga dibahas mengenai penurunan rumus dari *Bayesian Information Criterion* dengan sangat detail.

Penelitian yang berjudul “*Perbandingan Estimasi Parameter Pada Distribusi Binomial Dengan Menggunakan Metode Maksimum Likelihood Dan Metode Bayes*” ini terinspirasi dari kedua tinjauan pustaka di atas. Penelitian ini merupakan perluasan dari penelitian pertama yaitu mengestimasi parameter dari distribusi Binomial. Perbedaan dengan tinjauan pustaka yang pertama adalah pada distribusi yang diteliti yaitu distribusi Binomial serta penambahan metode yaitu metode maksimum likelihood.

Adapun detail perbedaan dari ketiga penelitian di atas dapat dilihat pada Tabel 1.1 berikut ini

Tabel 1.1 Tinjauan Pustaka

No	Nama Peneliti	Metode Estimasi	Metode Evaluasi	Penerapan Distribusi atau Aplikasi
1	Ida Putri Rarasati	Metode Bayes	MC <i>error</i>	Distribusi Gamma
2	Nurul Kustinah	Analisis Regresi	<i>Bayesian Information Criterion (BIC)</i>	Model Regresi Linear
3	Hamid Wan Nendra	Metode Maksimum <i>Likelihood</i> dan Metode Bayes	<i>Mean Square Error (MSE)</i> dan <i>Bayesian Information Criterion (BIC)</i>	Distribusi Binomial

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan penelitian ini secara keseluruhan, penulis menggambarkan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, pembatasan masalah, tujuan penelitian, manfaat, tinjauan pustaka, sistematika penulisan.

BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini menyajikan kajian teori mengenai peubah acak, Fungsi Distribusi Peluang, Ekspektasi dan Varian, Fungsi Densitas Peluang Bersama, Fungsi Densitas Peluang Marginal, Distribusi Bersyarat, Fungsi Gamma, Distribusi Beta, Distribusi Binomial, Keluarga Eksponensial, Teorema Bayes, Distribusi Prior, Fungsi Likelihood, Distribusi Posterior, Metode Maksimum Likelihood, dan *Bayesian Information Criterion (BIC)* yang diambil dari beberapa referensi yang terkait dengan topik tersebut.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas tentang perbandingan estimasi titik dengan Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes untuk Distribusi Binomial.

BAB IV STUDI KASUS

Pada bab ini membahas tentang studi kasus perbandingan estimasi titik dengan Metode Maksimum Likelihood dan Metode Bayes untuk Distribusi Binomial yang diterapkan pada 50 data Mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi mengenai proporsi Mahasiswa tersebut berasal dari Madrasah Aliyah (MA) atau Pondok Pesantren pada jenjang studi sebelumnya dan 513 data mengenai proporsi mahasiswa angkatan 2017 Fakultas Sains dan Teknologi berasal dari Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta.

BAB V PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran-saran yang berkaitan dengan hasil pembahasan.

1.8 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan. Penelitian kepustakaan ini merujuk pada pustaka atau buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan untuk melakukan penelitian. Pembahasan awal yang dilakukan dalam penelitian adalah mengkaji mengenai definisi dan sifat dasar dari distribusi Binomial kemudian dilanjutkan dengan menentukan estimasi parameter dengan menggunakan Metode Maksimum *Likelihood* dan Metode Bayes.

Setelah melakukan kajian secara teoritis, langkah selanjutnya adalah mengaplikasikan pada 50 data Mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi mengenai proporsi Mahasiswa tersebut berasal dari Madrasah Aliyah (MA) atau Pondok Pesantren pada jenjang studi sebelumnya dan 513 data mahasiswa angkatan 2017 Fakultas Sains dan Teknologi mengenai proporsi mahasiswa tersebut berasal dari Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta serta menentukan evaluasinya. Metode evaluasi pada penelitian ini akan didasarkan pada *Mean Square Error* (MSE) dan *Bayesian Information Criteerion* (BIC).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab 3 dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi likelihood dari distribusi Binomial dapat dinyatakan sebagai

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad \text{untuk } 0 \leq \theta \leq 1$$

setelah diperoleh fungsi likelihood tersebut, selanjutnya dapat diperoleh estimator maksimum likelihood yang dirumuskan sebagai berikut

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

2. Distribusi Beta digunakan sebagai prior konjugat untuk Binomial karena distribusi Beta dan distribusi Binomial memiliki kesamaan bentuk fungsional likelihood. Selanjutnya dengan prior Beta tersebut dapat diperoleh distribusi posterior yang dinyatakan dalam distribusi $Beta(x+a, n-x+b)$ dengan θ merupakan variabel dan x adalah nilai dari hasil percobaan atau observasi. Berdasarkan distribusi posterior tersebut diperoleh estimator Bayes yang dirumuskan sebagai berikut

$$\theta_B = \frac{x+a}{a+b+n}$$

3. Hasil estimasi pada kasus 50 mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi mengenai proporsi Mahasiswa tersebut berasal dari Madrasah Aliyah (MA) atau Pondok Pesantren pada jenjang studi sebelumnya maupun kasus 513 data mahasiswa angkatan 2017 Fakultas Sains dan Teknologi mengenai proporsi mahasiswa tersebut berasal dari Provinsi Daerah Istimewa Yogyakarta dari kedua metode yaitu metode maksimum likelihood dan metode Bayes adalah sama, sehingga diperoleh nilai *Bayesian Information Criterion* (BIC) dari kedua metode tersebut sama, oleh sebab itu dapat dikatakan hasil dari kedua metode sama baik apabila ukuran kebaikannya adalah *Bayesian Information Criterion* (BIC), namun nilai *Mean Square Error* (MSE) untuk metode Bayes lebih kecil dari metode maksimum likelihood, sehingga metode Bayes lebih baik digunakan untuk mengestimasi parameter jika ukurannya adalah *Mean Square Error* (MSE).

5.2 Saran

Penelitian ini masih perlu pengembangan keilmuan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan estimasi parameter distribusi Binomial dengan menggunakan distribusi *prior* yang lain. Selain itu, dapat juga mengestimasi parameter dengan metode maksimum likelihood dan metode Bayes untuk distribusi sample yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Ando Tomohiro.2010.*Bayesian Mode Selection and Statistical Modeling*;
Kanagawa
- Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*.Second Edition. Duxbury Press; California
- Berger,C, 1990. *Statistical Inference*. Pasific Grove; New York
- Bolstad, W.M. 2007. *Introduction to Bayesian Statistics Second Edition*. A John Wiley & Sons.Inc; America
- Box, G.E.P and Tiao, G.C. 1973. *Bayesian Inference In Statistical Analysis*. Addision-WesleyPublishing Company, Inc; Philippines
- Freund, J.E 1992. *Mathematical Statistics*. Fifth Edition. A Simon & Schuster Company; NewJersey.
- Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.
- Montgomery, D.C and Runger, G.C. 2003. *Applied Statistics and Probability for Engineers:Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc.
- Soejoeti, Z dan Subanar. 1988. *Inferensi Bayesian*. Karunika Universitas Terbuka; Jakarta
- Spiegel, M.R, Schiller, J.J dan Srinivasan, R.A. 2004. *Probabilitas dan Statistik*. Alih bahasa oleh Wiwit, K dan Irzam H. Jakarta; Erlangga.
- Lungan, Richard. 2006.*Aplikasi Statistika dan Hitung Peluang Edisi Pertama*: Yogyakarta. Graha Ilmu

Usman, Husaini, dan Akbar, Purnomo Setiady. 2006. *Pengantar Statistika*.

Jakarta: Bumi Aksara.

Walpole, R .E dan Myers, R. H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwa Edisi ke - 4*. Alih bahasa oleh Sembiring, R.K. Penerbit ITB;

Bandung.



LAMPIRAN I

Metode Bayes Relatif Efisien daripada Metode Maksimum Likelihood

Berdasarkan Definisi 2.16, jika distribusi sampling dari dua statistik memiliki mean yang sama, statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut estimator yang lebih efisien dari mean. Efisiensi relatif (*relative efficiency*) θ terhadap θ_B dirumuskan

$$R(\theta, \theta_B) = \frac{\text{Var}(\theta)}{\text{Var}(\theta_B)}$$

$R = \frac{\theta}{\theta_B}$, jika $R > 1$ maka $\theta > \theta_B$ artinya secara relatif θ_B lebih efisien daripada θ .

Akan ditunjukkan $R > 1$. Berdasarkan Persamaan 3.3, estimasi titik dengan metode maksimum likelihood adalah $\theta = \frac{x}{n}$ sehingga

$$\begin{aligned} \text{Var}(\theta) &= \text{Var}\left(\frac{x}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(x) \\ &= \frac{1}{n^2} n\theta(1-\theta) \\ &= \frac{\theta(1-\theta)}{n}. \end{aligned}$$

(*)

Berdasarkan Persamaan 3.25, estimasi titik dengan metode maksimum

likelihood adalah $\theta_B = \frac{x+a}{a+b+n}$. sehingga

$$\begin{aligned} \text{Var}(\theta_B) &= \text{Var}\left(\frac{x+a}{a+b+n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a+b+n}\right)^2 \text{Var}(x+a) \\ &= \left(\frac{1}{a+b+n}\right)^2 (\text{Var}(x) + \text{Var}(a)) \end{aligned}$$

karena diketahui bahwa $\text{Var}(a) = 0$ $\text{Var}(x) = n\theta(1-\theta)$ maka

$$\text{Var}(\theta_B) = \frac{n\theta(1-\theta)}{(a+b+n)^2}. \quad (**)$$

Berdasarkan Persamaan (*) dan (**) diperoleh

$$\begin{aligned} R(\theta, \theta_B) &= \frac{\text{Var}(\theta)}{\text{Var}(\theta_B)} \\ &= \frac{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}{\frac{n\theta(1-\theta)}{(a+b+n)^2}} \\ &= \frac{\theta(1-\theta)(a+b+n)^2}{n \quad n\theta(1-\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a+b+n)^2}{n} \\
&= \frac{(a+b)^2}{n} + \frac{2n(a+b)}{n} + \frac{n^2}{n} \\
R(\theta, \theta_B) &= \frac{(a+b)^2}{n} + 2(a+b) + n
\end{aligned}$$

diketahui bahwa n adalah banyak usaha Binomial dilakukan, sehingga $n > 1$, jadi dapat disimpulkan bahwa $R > 1$ maka $\theta > \theta_B$ artinya secara relatif θ_B lebih efisien daripada θ .

LAMPIRAN II

Input dan Output Program MATLAB

A. Input Program MATLAB

```
clear;
disp('=====')
disp('Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Menggunakan ')
disp('     Metode Maksimum Likeelihood dan Metode Bayes           ')
disp('                   HAMID WAN NENDRA                          ')
disp('                   14610018                                   ')
disp('=====')
n=input ('Masukkan banyak sampel atau usaha (n) =')
x=input ('Masukkan sampel atau usaha sukses (x) =')
MML=x/n; %nilai estimasi titik dengan Metode
         Maksimum Likelihood
EMML=n*MML; %nilai ekspektasi
VarMML=n*MML*(1-MML); %nilai variansi
MSEMML=(MML*(1-MML))/n; %MSE dari Metode Maksimum Likelihood
BICMML=(-2)*(log((factorial(n)/(factorial(x)*factorial((n-
x)))))+(x*log(MML))+((n-x)*log(1-MML))-((0.5)*log(n)));
disp('=====')
disp('Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Metode
Maksimum Likelihood')
disp('=====')
disp('Estimasi Parameter dengan Metode Maksimum Likelihood
adalah')
fprintf('%8.3f \n',MML)
disp('Nilai ekspektasi dengan Metode Maksimum Likelihood')
fprintf('%8.3f \n',EMML)
disp('Nilai variansi dengan Metode Maksimum Likelihood')
fprintf('%8.3f \n',VarMML)
disp('Nilai Mean Square Error (MSE) dari Metode Maksimum
Likelihood')
fprintf('%8.6f \n',MSEMML)
disp('Nilai Bayesian Information Criterion (BIC) dari Metode
Maksimum Likelihood')
fprintf('%8.6f \n',BICMML)
disp('=====')
disp('Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Metode Bayes
(prior distribusi Beta)')
disp('=====')
a=(x*(n-1))/n;
b=((n-x)*(n-1))/n;
EPrior=a/(a+b);
VarPrior=(a*b)/((a+b+1)*(a+b)*(a+b));
disp('Nilai ekspektasi distribusi prior')
```

```

fprintf('%8.3f \n',EPrior)
disp('Nilai variansi distribusi prior')
fprintf('%8.6f \n',VarPrior)
A=x+a;
B=n-x+b;
EPos=A/(A+B);
VarPos=(A*B)/((A+B+1)*(A+B)*(A+B));
disp('Nilai ekspektasi distribusi posterior')
fprintf('%8.3f \n',EPos)
disp('Nilai variansi distribusi posterior')
fprintf('%8.6f \n',VarPos)
MSEB=((n*EPos*(1-
EPos))/(a+b+n)*(a+b+n))+((((n*EPos)+a)/(a+b+n))-
EPos)*(((n*EPos)+a)/(a+b+n))-EPos); %MSE dari Metode Bayes
BICB=(-2)*(log((factorial(n)/(factorial(x)*factorial(n-
x)))))+(x*log(EPos))+(n-x)*log(1-EPos))-((0.5)*log(n));
disp('Nilai Mean Square Error (MSE) dari Metode Bayes')
fprintf('%8.6f \n',MSEB)
disp('Nilai Bayesian Information Criterion (BIC) dari Metode
Bayes')
fprintf('%8.6f \n',BICB)

```

B. Output Program MATLAB untuk Data I

```
=====
      Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Menggunakan
      Metode Maksimum Likeelihood dan Metode Bayes
      HAMID WAN NENDRA
      14610018
=====
Masukkan banyak sampel atau usaha (n) =50

n =

    50
|
Masukkan sampel atau usaha sukses (x) =19

x =

    19
=====
Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Metode Maksimum Likelihood
=====
Estimasi Parameter dengan Metode Maksimum Likelihood adalah
    0.380
Nilai ekspektasi dengan Metode Maksimum Likelihood
    19.000
Nilai variansi dengan Metode Maksimum Likelihood
    11.780
Nilai Mean Square Error (MSE) dari Metode Maksimum Likelihood
    0.004712
Nilai Bayesian Information Criterion (BIC) dari Metode Maksimum Likelihood
    8.227117
=====
Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Metode Bayes (prior distribusi Beta)
=====
Nilai ekspektasi distribusi prior
    0.380
Nilai variansi distribusi prior
    0.004712
Nilai ekspektasi distribusi posterior
    0.380
Nilai variansi distribusi posterior
    0.002356
Nilai Mean Square Error (MSE) dari Metode Bayes
    0.001202
Nilai Bayesian Information Criterion (BIC) dari Metode Bayes
    8.227117
```

C. Output Program MATLAB untuk Data II

```
=====
      Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Menggunakan
      Metode Maksimum Likeelihood dan Metode Bayes
      HAMID WAN NENDRA
      14610018
=====
Masukkan banyak sampel atau usaha (n) =513

n =

    513

Masukkan sampel atau usaha sukses (x) =131

x =

    131

=====
Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Metode Maksimum Likelihood
=====
Estimasi Parameter dengan Metode Maksimum Likelihood adalah
    0.255
Nilai ekspektasi dengan Metode Maksimum Likelihood
    131.000
Nilai variansi dengan Metode Maksimum Likelihood
    97.548
Nilai Mean Square Error (MSE) dari Metode Maksimum Likelihood
    0.000371
Nilai Bayesian Information Criterion (BIC) dari Metode Maksimum Likelihood
    12.660223

=====
Estimasi Parameter distribusi Binomial dengan Metode Bayes (prior distribusi Beta)
=====
Nilai ekspektasi distribusi prior
    0.255
Nilai variansi distribusi prior
    0.000371
Nilai ekspektasi distribusi posterior
    0.255
Nilai variansi distribusi posterior
    0.000185
Nilai Mean Square Error (MSE) dari Metode Bayes
    0.000093
Nilai Bayesian Information Criterion (BIC) dari Metode Bayes
    12.660223
```

CURRICULUM VITAE

A. Biodata Pribadi

Nama Lengkap : Hamid Wan Nendra

Jenis Kelamin : Laki-laki

Tempat, Tanggal Lahir : Bantul, 11 Juli 1996

Alamat : Wiyoro Kidul rt 06, Baturetno, Banguntapan

Email : hamidwan69@gmail.com



B. Latar Belakang Pendidikan Formal

Jenjang	Nama Sekolah	Tahun
SD	SD Negeri Baturetno	2008
SMP	SMP Negeri 3 Banguntapan	2011
SMA	SMA Negeri 1 Banguntapan	2014
S1	UIN Sunan Kalijaga	2018

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA