

SKRIPSI

**ANALISIS STABILITAS MODEL EPIDEMIK *SEIVR* PADA
PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN
*SATURATED INCIDENCE RATE***



RISHA KURNIA ROBBI

14610021

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2018

**ANALISIS STABILITAS MODEL EPIDEMIK *SEIVR* PADA
PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN
*SATURATED INCIDENCE RATE***

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



UIP
STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

diajukan oleh:

RISHA KURNIA ROBBI

14610021

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2018



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Surat Persetujuan Skripsi/ Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Risha Kurnia Robbi
NIM : 14610021
Judul Skripsi : Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIVR Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Dengan *Saturated Incidence Rate*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 19 Februari 2018

Pembimbing I

Sugiyanto, M.Si

NIP. 19800505 200801 1 028



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1209/Un.02/DST/PP.00.9/03/2018

Tugas Akhir dengan judul : Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIVR pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B dengan Saturated Incidence Rate

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : RISHA KURNIA ROBBI
Nomor Induk Mahasiswa : 14610021
Telah diujikan pada : Rabu, 28 Februari 2018
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Sugiyanto, S.Si., M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.
NIP. 19861208 201503 2 006

Yogyakarta, 28 Februari 2018

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

DEKAN



Dr. Murtono, M.Si.

NIP. 19691212 200003 1 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertanda tangan di bawah ini saya:

Nama : Risha Kurnia Robbi

NIM : 14610021

Prodi/Smt : Matematika / VIII

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya serupa yang diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi lain, dan sepanjang pengetahuan saya juga belum terdapat karya yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 19 Februari 2018

Yang menyatakan




Risha Kurnia Robbi

NIM. 14610021

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk :

Kedua orang tua saya (Bapak Mawardi dan Ibu Yulatinah, S.Pd)

serta seluruh keluarga,

Terimakasih atas do'a yang selalu terucap serta dukungan dan motivasinya.

Teman-teman Matematika Angkatan 2014 UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Sangat bahagia bisa memiliki teman seperti kalian.



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

”Memayu hayuning pribadi, memayu hayuning kulawarga, memayu hayuning
sesama, memayu hayuning bawana”

”Aja Ketungkul Marang Kalungguhan, Kadonyan lan Kemareman”

-Falsafah Jawa-

”Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi kamu (pula) menyukai sesuatu padahal ia amat buruk bagimu, Allah Maha Mengetahui sedangkan kamu tidak mengetahui” (QS.Al-Baqarah 216)

”Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS.Ash-Sharh 5-6)

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, nikmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul ” *Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIVR Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B dengan Saturated Incidence Rate*”.

Sholawat serta salam semoga tetap tercurah kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang menjadi suri tauladan yang mulia bagi semua umatnya dan selalu kita nantikan syafaatnya. Semoga kita termasuk umat yang mendapat syafaat beliau di akhir zaman kelak. Aamiin yaa rabbal'alamiin.

Penulis menyadari bahwa dalam proses penulisan skripsi ini tentunya tidak terlepas dari dukungan, motivasi dan bimbingan dari berbagai pihak sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Murtono, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
2. Dr. M. Wakhid Mustofa, M. Si selaku Ketua Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Malahayati, M. Sc., selaku dosen pembimbing akademik mahasiswa program studi matematika angkatan 2014.

4. Sugiyanto, ST., M. Si., selaku pembimbing yang telah memberikan arahan, saran, serta solusi penyelesaian kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
5. Bapak ibu Dosen Fakultas Sains dan Teknologi yang dengan ikhlas telah memberikan ilmu pengetahuan dan pengalaman kepada penulis, sehingga ilmu yang telah didapat memudahkan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Yulatinah, S.Pd dan Bapak Mawardi yang selalu memberikan dukungan dan arahan, terimakasih atas kasih sayang yang diberikan selama ini.
7. Teman-teman Matematika Angkatan 2014, sukses selalu untuk kalian semua.
8. Semua pihak yang memberikan dukungan dan do'a kepada penulis, serta pihak yang membantu penulis menyelesaikan skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, kritik dan saran sangat diharapkan sehingga skripsi ini dapat lebih baik. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Yogyakarta, 15 Februari 2018

Penulis

RISHA KURNIA ROBBI

DAFTAR ISI

| | |
|--|-------------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR | ii |
| HALAMAN PENGESAHAN | iii |
| HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN | iv |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | v |
| HALAMAN MOTTO | vi |
| KATA PENGANTAR | vii |
| DAFTAR ISI | ix |
| DAFTAR TABEL | xii |
| DAFTAR GAMBAR | xiii |
| DAFTAR LAMBANG | xiv |
| INTISARI | xv |
| ABSTRACT | xvi |
| I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1. Latar Belakang Masalah | 1 |
| 1.2. Rumusan Masalah | 4 |
| 1.3. Batasan Masalah | 5 |
| 1.4. Tujuan Penelitian | 6 |
| 1.5. Manfaat Penelitian | 6 |
| 1.6. Tinjauan Pustaka | 7 |
| 1.7. Sistematika Penulisan | 10 |
| II LANDASAN TEORI | 12 |
| 2.1. Tinjauan Biologis | 12 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 2.1.1. | Hepatitis B | 12 |
| 2.1.2. | Vaksinasi (Imunisasi) Hepatitis B | 14 |
| 2.2. | Tinjauan Matematis | 16 |
| 2.2.1. | Persamaan Diferensial | 16 |
| 2.2.2. | Sistem Persamaan Diferensial Biasa Berdimensi n | 17 |
| 2.2.3. | Sistem Dinamik | 19 |
| 2.2.4. | Nilai Eigen dan Vektor Eigen | 20 |
| 2.2.5. | Titik Ekuilibrium | 23 |
| 2.2.6. | Bilangan Reproduksi Dasar | 23 |
| 2.2.7. | Linearisasi | 25 |
| 2.2.8. | Kestabilan Titik Ekuilibrium | 28 |
| 2.2.9. | Kriteria Routh-Hurwitz | 32 |
| 2.2.10. | Bifurkasi | 34 |
| 2.2.11. | Metode Euler | 36 |
| III METODOLOGI PENELITIAN | | 38 |
| IV HASIL DAN PEMBAHASAN | | 41 |
| 4.1. | Formulasi Model | 41 |
| 4.2. | Titik Ekuilibrium | 49 |
| 4.2.1. | Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit | 49 |
| 4.2.2. | Titik Ekuilibrium Endemik | 51 |
| 4.3. | Bilangan Reproduksi Dasar | 54 |
| 4.4. | Eksistensi Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit | 57 |
| 4.5. | Eksistensi Titik Ekuilibrium Endemik | 58 |
| 4.6. | Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium | 60 |
| 4.6.1. | Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit | 60 |
| 4.6.2. | Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium Endemik | 64 |

| | |
|--|-----------|
| 4.7. Analisis Bifurkasi | 69 |
| V SIMULASI NUMERIK | 73 |
| 5.1. Solusi Model Matematika <i>SEIVR</i> Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> | 73 |
| 5.2. Simulasi Numerik Untuk Trayektori Model Epidemik <i>SEIVR</i> Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> | 76 |
| 5.3. Simulasi Numerik Untuk Potret Fase Pada Titik Ekuilibrium | 82 |
| 5.3.1. Potret Fase Pada Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit | 82 |
| 5.3.2. Potret Fase Pada Titik Ekuilibrium Endemik | 85 |
| 5.4. Simulasi Analisis Bifurkasi | 86 |
| VI PENUTUP | 88 |
| 6.1. Kesimpulan | 88 |
| 6.2. Saran | 90 |
| DAFTAR PUSTAKA | 91 |
| A Penentuan Persamaan Karakteristik Titik Ekuilibrium | 93 |
| 1.1. Persamaan Karakteristik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit | 93 |
| 1.2. Persamaan Karakteristik Titik Ekuilibrium Endemik | 96 |
| B M-File Software Matlab R2013a | 99 |
| 2.1. Simulasi Trayektori Titik Ekuilibrium | 99 |
| 2.2. Kurva Bifurkasi | 100 |

DAFTAR TABEL

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Tinjauan Pustaka | 9 |
| 1.2 | Tinjauan Pustaka | 10 |
| 2.1 | Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> | 33 |
| 4.1 | Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> Untuk Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit | 62 |
| 4.2 | Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i> Untuk Titik Ekuilibrium Endemik | 68 |
| 5.1 | Tabel Nilai Parameter | 77 |



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Ilustrasi Kestabilan | 29 |
| 3.1 | Langkah-Langkah Penelitian | 40 |
| 4.1 | Diagram Transfer Model SEIVR pada penyebaran penyakit hepatitis B dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> | 44 |
| 5.1 | Trayektori Sistem (4.6) dengan $\beta = 0.3521, \rho = 0.5, \omega = 0.9$ | 78 |
| 5.2 | Trayektori Sistem (4.6) dengan $\beta = 0.3521, \rho = 0.5, \omega = 0.5$ | 78 |
| 5.3 | Trayektori Sistem (4.6) dengan $\beta = 0.3521, \rho = 0.5, \omega = 0.1$ | 79 |
| 5.4 | Trayektori Sistem (4.6) dengan $\beta = 0.3521, \rho = 0.75, \omega = 0.1$ | 81 |
| 5.5 | Potret Fase Sistem (4.6) dengan $\beta = 0.3521, \rho = 0.75, \omega = 0.1$ | 83 |
| 5.6 | Potret Fase Sistem Saat $R_0 = 1$ | 84 |
| 5.7 | Potret Fase Sistem Saat $R_0 > 1$ | 84 |
| 5.8 | Potret Fase Sistem (4.6) dengan $\beta = 0.3521, \rho = 0.5, \omega = 0.9$ | 85 |
| 5.9 | Diagram bifurkasi terhadap parameter ρ | 86 |

DAFTAR LAMBANG

| | |
|----------------|--|
| \mathbb{R} | : himpunan semua bilangan real |
| \mathbb{R}^n | : ruang Euclide berdimensi n |
| \rightarrow | : menuju |
| λ | : nilai eigen |
| $\Re(\lambda)$ | : bagian real dari nilai eigen |
| \in | : anggota |
| t | : waktu |
| t_0 | : waktu awal |
| \det | : determinan matriks |
| ■ | : akhir suatu bukti |
| $N(t)$ | : Jumlah total populasi manusia pada saat t |
| $S(t)$ | : Populasi kelas individu <i>Susceptible</i> pada saat t |
| $E(t)$ | : Populasi kelas individu <i>Exposed</i> pada saat t |
| $I(t)$ | : Populasi kelas individu <i>Infected</i> pada saat t |
| $V(t)$ | : Populasi kelas individu <i>Vaccinated</i> pada saat t |
| $R(t)$ | : Populasi kelas individu <i>Recovered</i> pada saat t |

INTISARI

ANALISIS STABILITAS MODEL EPIDEMIK *SEIVR* PADA PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B DENGAN *SATURATED* *INCIDENCE RATE*

Oleh

RISHA KURNIA ROBBI

14610021

Hepatitis B merupakan penyakit peradangan hati yang disebabkan oleh virus hepatitis B. Umumnya penderita hepatitis B akan mengalami gejala seperti kelelahan, nafsu makan berkurang, mual, muntah, dan nyeri pada sendi. Upaya pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B salah satunya adalah dengan melakukan vaksinasi.

Penelitian ini menggunakan model epidemik *SEIVR* dalam membentuk model matematika pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate*. Analisis dilakukan untuk mengetahui kestabilan dari titik ekuilibrium yang ada melalui proses linierisasi. Analisis bifurkasi pada penelitian ini difokuskan pada bifurkasi di titik ekuilibrium bebas penyakit.

Berdasarkan hasil analisa, diperoleh satu titik ekuilibrium bebas penyakit dan satu titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil asimtotik (penyakit semakin lama akan menghilang dari populasi), stabil (penyakit masih ada di populasi tetapi tidak mewabah) dan tidak stabil (penyakit kembali mewabah di populasi). Di lain pihak, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik yang berarti penyakit akan selalu ada di dalam populasi dan mewabah. Vaksinasi dan tingkat penurunan imunitas vaksin memiliki pengaruh dalam upaya pencegahan penyebaran penyakit. Hasil analisis bifurkasi diperoleh besarnya vaksinasi yang efektif agar penyebaran penyakit hepatitis B dapat dikendalikan adalah sebesar 67.17 % dengan tingkat penurunan imunitas sebesar 10 %.

Kata kunci: hepatitis B, model *SEIVR*, kestabilan, bifurkasi, vaksinasi, *saturated incidence rate*.

ABSTRACT

STABILITY ANALYSIS OF A *SEIVR* EPIDEMIC MODEL THE SPREAD OF HEPATITIS B DISEASE WITH SATURATED INCIDENCE RATE

By

RISHA KURNIA ROBBI

14610021

Hepatitis B is an inflammatory liver disease caused by hepatitis B virus. Generally, hepatitis B patients will experience symptoms such as fatigue, decreased appetite, nausea, vomiting, and joint pain. Efforts to prevent the spread of hepatitis B disease one of them is to vaccinate.

This study using a *SEIVR* epidemic model to establish mathematical model the prevention of the spread of hepatitis B disease with vaccinate and saturated incidence rate. The analysis is performed to determine the stability of the existing equilibrium point through the linearization process. In this study, the bifurcation analysis focused on bifurcation at the disease-free equilibrium point.

Based on the result of the analysis, we obtained an disease-free equilibrium point and an endemic equilibrium point. The disease-free equilibrium point is asymptotically stable (the hepatitis B disease at longer time will disappear from population), stable (the hepatitis B disease still exist in population but not epidemic), unstable (the hepatitis B disease will be endemic in population). On the other hand, the endemic equilibrium point is stable asymptotically, it means that the disease of hepatitis B exist and endemic in population. Vaccination and vaccine wanes have influence in preventing the spread of hepatitis B disease. From bifurcation analysis obtained an effective vaccination to control the spread of hepatitis B disease is 67.17% with the rate of vaccine wanes 10%.

Keywords: hepatitis B, *SEIVR* model, stability, bifurcation, vaccination, *saturated incidence rate*.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Hepatitis secara umum merupakan penyakit peradangan hati yang disebabkan oleh virus. Sampai saat ini, terdapat kurang lebih tujuh jenis hepatitis yang sudah ditemukan sesuai dengan nama virus yang menyerangnya, yaitu hepatitis A, hepatitis B, hepatitis C, hepatitis D, hepatitis E, hepatitis G dan hepatitis TTV (*transmission transfusion virus*). Dari ke tujuh jenis hepatitis tersebut, hepatitis B merupakan jenis penyakit hepatitis yang paling banyak ditemukan di seluruh dunia dan paling berbahaya. Hepatitis B menjadi penyakit yang berbahaya dibandingkan dengan jenis hepatitis lainnya karena hepatitis B dapat membunuh penderitanya secara pelan-pelan. Hal ini terjadi karena perilaku virus *HBV* yang menyebabkan hepatitis B dapat bertahan lama dan menetap dalam tubuh penderita. Selain itu, hepatitis B juga dapat berkembang menjadi sirosis hati (pengerasan hati) atau dapat berakhir menjadi kanker hati.

Pada saat ini, diperkirakan lebih dari 350 juta orang di dunia telah menderita penyakit hepatitis B. Dari keseluruhan penderita tersebut, 220 juta (78%) diantaranya penderita berada di benua Asia termasuk di Indonesia. Berdasarkan pemeriksaan HBsAg pada kelompok donor darah di Indonesia prevalensi Hepatitis B berkisar antara 2,50-36,17%. Selain itu di Indonesia infeksi virus Hepatitis B terjadi pada bayi dan anak, diperkirakan 25-45% pengidap adalah karena infeksi perinatal [Siregar,2003]. Hal ini berarti bahwa Indonesia termasuk

dengan endemisitas tinggi penyakit hepatitis B, terbesar kedua di negara *South East Asian Region* (SEAR) setelah Myanmar dan termasuk negara yang dihimbau oleh WHO untuk melaksanakan upaya pencegahan dengan imunisasi. Pengendalian penyakit hepatitis B lebih dimungkinkan melalui upaya pencegahan dibandingkan dengan pengobatan yang masih dalam penelitian.

Upaya pencegahan dengan imunisasi diberikan dengan cara memberikan vaksin (bahan antigenik yang digunakan untuk menghasilkan kekebalan aktif terhadap suatu penyakit sehingga dapat mencegah pengaruh infeksi oleh organisme) ke dalam tubuh seseorang [Nugroho,2009]. Sebenarnya, penderita penyakit hepatitis B ini sudah memiliki kekebalan tubuh alami tetapi masih rentan terhadap penyakit itu kembali lagi atau menjadi parah. Namun dengan pemberian vaksin, pada individu yang rentan akan memperoleh tambahan imunitas untuk kekebalan tubuh sehingga jika nantinya individu tersebut terjangkit penyakit hepatitis B tidak akan menjadi parah. Otoritas kesehatan dunia WHO menyatakan bahwa pemberian vaksin hepatitis B tidak akan menyembuhkan pembawa kuman (*carrier*) yang kronis, tetapi pemberian vaksin diyakini 95% efektif untuk mencegah berkembangnya penyakit menjadi *carrier* [Siregar,2003].

Selain perkembangan ilmu pengetahuan di bidang kedokteran yang memiliki peranan penting dalam pencegahan penyakit ini agar tidak meluas melalui vaksinasi, bidang matematika juga memberikan peran pengaruh penting dalam pencegahan menyebarnya wabah suatu penyakit. Peranan matematika dalam hal ini berupa model matematika yang merupakan representasi dari bidang ilmu tertentu ke dalam bentuk pernyataan matematika yang diperoleh dari salah satu bidang ilmu matematika yakni pemodelan matematika. Menurut Widiowati dan Sutimin (2007), pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang

merepresentasikan dan menjelaskan sistem fisik atau problem pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematika, sehingga diperoleh pemahaman dari dunia nyata ini menjadi lebih tepat.

Dalam pemodelan matematika penyebaran suatu penyakit, untuk mengetahui penyakit tersebut menular atau tidak dilakukan dengan cara mencari titik kesetimbangan (ekuilibrium). Titik kesetimbangan tersebut dibagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi dimana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang seseorang atau tidak ada individu yang terserang penyakit. Titik kesetimbangan endemik adalah suatu kondisi dimana penyakit selalu ada dan mewabah dalam populasi tersebut, artinya selalu ada individu yang terserang penyakit. Selain mencari titik kesetimbangan, perlu dilakukan juga analisis kestabilan pada titik kesetimbangan tersebut. Analisis ini dilakukan untuk mengetahui titik ekuilibrium tersebut berada pada kondisi stabil atau tidak. Stabil atau tidaknya suatu titik ekuilibrium akan menunjukkan bahwa suatu penyakit yang menyebar pada populasi akan menular atau tidak.

Selanjutnya, dari analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat diselidiki kemungkinan terjadinya bifurkasi. Bifurkasi terjadi dalam suatu sistem dinamik yang memuat satu atau lebih parameter dan ditekankan pada perubahan perilaku yang mungkin dialami jika ada perubahan dari parameter-parameter tersebut, sehingga menyebabkan perubahan perilaku pada sistem tersebut. Untuk menyelidiki kemungkinan terjadinya bifurkasi, dilakukan dengan analisis bifurkasi, yaitu analisis perubahan kestabilan pada suatu sistem terhadap titik ekuilibrium yang dipengaruhi oleh perubahan suatu parameter tertentu. Analisis ini bertujuan untuk meminimalkan terjadinya perubahan kestabilan sistem yang dipengaruhi oleh

beberapa faktor agar sistem yang dibentuk dapat bekerja secara maksimal.

Penulisan skripsi ini akan membahas mengenai pemodelan matematika penyebaran penyakit hepatitis B dengan laju infeksi jenuh (*Saturated Incidence Rate*) dengan membagi populasi manusia ke dalam lima kelompok yaitu *Susceptible, Exposed, Infected, Vaccinated, Recovered*. Laju infeksi jenuh (*Saturated Incidence Rate*) $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$, dengan $\alpha \geq 0$ merupakan efek hambatan dari faktor kejenuhan atau *crowded* yaitu kondisi saat jumlah individu yang terinfeksi sangat banyak atau mencapai titik jenuh maka laju infeksi akan semakin menurun. Langkah selanjutnya adalah menentukan titik ekuilibrium (bebas penyakit dan endemik) dari model matematika yang telah didapat kemudian mencari nilai *Basic Reproduction Number (Ro)* dan dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium, sehingga dapat mengetahui kestabilan penyebaran penyakit Hepatitis B di suatu wilayah.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas maka dapat dirumuskan beberapa masalah yang akan dibahas dalam tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Bagaimana model matematika pada penyebaran penyakit hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate* ?
2. Bagaimana menentukan kestabilan titik-titik ekuilibrium model matematika pada penyakit hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate* ?
3. Bagaimana cara melakukan analisis bifurkasi model matematika pada penyakit hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate* ?

4. Bagaimana pengaruh vaksinasi pada perilaku penyebaran penyakit hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate* ?

1.3. Batasan Masalah

Pembahasan model matematika penyakit Hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate* pada penyakit hepatitis B pada populasi manusia tentunya memiliki banyak faktor yang mempengaruhinya, oleh karena itu diberikan pembatasan terhadap pembahasan agar pembahasan tidak melenceng dari rumusan masalah, batasan yang akan diberikan dalam pembahasan ini antara lain :

1. Pendefinisian model SEIVR dengan *Saturated Incidence Rate* pada penyakit hepatitis B, penentuan titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik serta analisis kestabilan titik-titik ekuilibriumnya, analisis bifurkasi, simulasi numerik.
2. Pada populasi manusia, faktor imigrasi diabaikan.
3. Pada populasi manusia, individu terinfeksi yang belum sembuh atau masih dalam masa pengobatan masuk ke dalam kelas *Vaccinated*.
4. Pada populasi manusia, individu yang masuk dalam kelas *Recovered* adalah individu yang mengalami penyembuhan secara alami dari infeksi penyakit Hepatitis B.
5. Simulasi numerik dari model yang diperoleh menggunakan data sekunder yang diteliti oleh Zou *et al.* (2010), Nurhasen (2017) dan Adebimpe (2014) dengan menggunakan software Matlab R2013a.
6. Metode yang digunakan untuk mencari solusi model dalam simulasi adalah metode *Euler*

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Mengetahui model matematika SEIVR pada penyebaran penyakit Hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate*.
2. Menentukan titik-titik ekuilibrium, *Basic Reproduction Number* dan melakukan analisis kestabilan titik-titik ekuilibrium.
3. Melakukan analisis bifurkasi model matematika pada penyebaran penyakit Hepatitis B dengan pengaruh vaksinasi dan *Saturated Incidence Rate*.
4. Mengetahui pengaruh vaksinasi pada perilaku penyebaran penyakit hepatitis B dengan *Saturated Incidence Rate*.

1.5. Manfaat Penelitian

Dari tujuan penelitian di atas, maka manfaat dilakukannya penelitian ini meliputi hal-hal sebagai berikut :

1. Memberikan informasi dan mengembangkan wawasan keilmuan khususnya dalam bidang pemodelan penyakit.
2. Memberikan pengetahuan tentang model penyebaran penyakit Hepatitis B dengan laju infeksi jenuh (*Saturated Incidence Rate*) pada populasi manusia.
3. Dapat dijadikan sebagai acuan atau referensi bagi pembaca, baik dari kalangan matematika maupun bidang lain yang ingin membahas mengenai pemodelan penyakit terutama pada penyakit Hepatitis B.

4. Dapat dijadikan sebagai bahan referensi dalam menangani penyebaran penyakit Hepatitis B pada suatu populasi.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini mengacu pada literatur-literatur yang tersebut dalam daftar pustaka. Acuan penulisan tugas akhir ini menggunakan beberapa sumber pustaka. Untuk beberapa pengertian dasar aljabar linear tentang nilai eigen mengacu pada Anton (2000). Beberapa pengertian dasar persamaan diferensial mengacu pada Ross (1984). Selanjutnya untuk beberapa dasar teori sistem, yakni mengenai sistem nonlinear, titik ekuilibrium, dan linierisasi, serta teorema penting mengenai kestabilan sistem nonlinear mengacu pada Perko (2001), Olsder (2003), dan sebagainya.

Penulisan skripsi ini merujuk pada jurnal yang ditulis oleh O. Adebimpe (2014) yang berjudul "*Stability Analysis of a SEIV Model with Saturated Incidence Rate*". Dalam penelitian ini akan dibahas mengenai model epidemik SEIV dengan *Saturated Incidence Rate* jika diterapkan pada penyakit Hepatitis B dengan menambahkan kelas *recovered* pada model yang merujuk pada jurnal ilmiah "*Modelling and Simulation of the Spread of HBV Disease with Infectious Latent*" yang ditulis oleh I.A. Moneim dan H.A.Khalil (2015), memberikan asumsi yang jelas pada saat pembentukan model, serta menjelaskan penyebaran virus hepatitis B dengan merujuk pada karya ilmiah "Hepatitis B Ditinjau Dari Kesehatan Masyarakat Dan Upaya Pencegahan" yang ditulis oleh dr. Fazidah Aguslina Siregar (2003). Mencari titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik, mencari *Basic Reproduction Number* dengan menggunakan rujukan jurnal Driessche dan Watmough (2002). Analisis kestabilan titik ekuilibrium menggunakan kriteria Rout-Hurwitz menggunakan rujukan buku *Mathematical System Theory* oleh Olsder G.J, Van Der

Woude (2003) diterbitkan di Belanda oleh Delft University Press.

Jurnal "*Stability Analysis of a SEIV Model with Saturated Incidence Rate*" yang ditulis oleh O.Adebimpe (2014), membahas mengenai model epidemik SEIV dengan tingkat kejadian jenuh atau laju infeksi jenuh, pada jurnal ini peneliti tidak menerapkan pembentukan model pada suatu jenis penyakit. Analisis yang dilakukan pada jurnal ini adalah analisis kestabilan dan simulasi trayektori.

Jurnal "*Modelling and Simulation of the Spread of HBV Disease with Infectious Latent*" yang ditulis oleh A.Moneim dan H.A.Khalil (2015). Pada jurnal ini A.Moneim dan H.A.Khalil menyajikan model epidemik SEIR pada penyebaran penyakit Hepatitis B dengan penularan infeksi laten dan tingkat vaksinasi konstan. Analisis kestabilan pada jurnal ini ialah analisis kestabilan lokal pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan analisis kestabilan global titik ekuilibrium endemik serta melakukan simulasi numerik.

Jurnal "*SVEIR Epidemiological Model with Varying Infectivity and Distributed Delays*" yang ditulis oleh J.Wang, G.Huang, Y.Takeuchi, dan S.Liu (2011), membahas mengenai model epidemik SEIR dengan penundaan distribusi untuk memperhitungkan berbagai jenis infeksi. Dalam jurnal ini peneliti menambahkan kelas *vaccinated* sehingga model SEIR berubah menjadi model SVEIR untuk memperhitungkan berbagai jenis infeksi yang dialami dengan pengaruh penundaan efek pemberian vaksin.

Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya yaitu pada model epidemik yang digunakan untuk memodelkan dan jenis penyakit yang diteliti. Penelitian ini menggunakan jenis model epidemik SEIVR pencegahan penyebaran penyakit Hepatitis B dengan laju infeksi jenuh (*Saturated Incidence Rate*). Selain itu, pada penelitian ini juga akan dibahas analisis kestabilan lokal untuk titik

ekuilibrium, analisis bifurkasi pada titik ekuilibrium bebas penyakit, simulasi trayektori dan simulasi untuk potret fase. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya dapat disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 1.1 Tinjauan Pustaka

| No | Nama Peneliti | Judul Penelitian | Hasil Penelitian |
|----|---|---|--|
| 1 | O.Adebimpe (2014) | <i>Stability of a SEIV Model With Saturated Incidence Rate</i> | Penelitian ini fokus membahas bentuk model epidemik SEIV dengan laju infeksi jenuh (<i>Saturated Incidence Rate</i>) secara umum |
| 2 | A. Moneim dan H.A. Khalil (2015) | <i>Modelling and Simulation of the Spread of HBV Disease with Infectious Latent</i> | Penelitian ini fokus membahas model epidemik SEIR pada penyebaran penyakit Hepatitis B dengan infeksi laten |
| 3 | Jinliang Wang, Gang Huang, Yasuhiro Takeuchi, dan Shengqiang Liu (2011) | <i>SVEIR Epidemiological Model With Varying Infectivity and Distributed Delays</i> | Penelitian ini membahas mengenai model epidemik SVEIR dengan penundaan efek vaksinasi untuk memperhitungkan berbagai jenis infeksi |

Tabel 1.2 Tinjauan Pustaka

| No | Nama Peneliti | Judul Penelitian | Hasil Penelitian |
|----|------------------------------|--|--|
| 4 | Risha Kurnia Robbi (2018) | Analisis Stabilitas Model Epidemik SEIVR Pada Penyebaran Penyakit Hepatitis B Dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> | Penelitian ini membahas model epidemik SEIVR pada penyebaran penyakit Hepatitis B dengan <i>Saturated Incidence Rate</i> |

1.7. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini untuk memberikan gambaran menyeluruh untuk memudahkan penelitian ini, secara garis besar sistematikanya sebagai berikut :

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Pada bab ini dijelaskan mengenai teori-teori dan penelitian terdahulu yang digunakan sebagai bahan acuan dan dasar dalam melakukan analisis model matematika pada penelitian.

BAB III : METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan metode yang digunakan dalam melakukan penelitian yang meliputi langkah kerja, pertanyaan penelitian, alat dan bahan, serta alur penelitian.

BAB IV : PEMBAHASAN

Pada bab ini berisi tentang skema pemodelan alur penyebaran virus Hepatitis B, pencarian titik ekuilibrium, *Basic Reproduction Number* serta Bifurkasi, sehingga dapat menganalisis kestabilan sistem.

BAB V : SIMULASI NUMERIK

Pada bab ini membahas mengenai simulasi numerik dari model yang telah diperoleh sehingga dapat menampilkan grafik untuk mengetahui gambaran dari hasil penelitian yang telah dilakukan.

BAB VI : PENUTUP

Pada bab ini ditulis kesimpulan akhir dari penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB VI

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

6.1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis stabilitas model epidemik SEIVR pada penyebaran penyakit Hepatitis B dengan *saturated incidence rate*, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Diperoleh model epidemik SEIVR pada penyakit Hepatitis B dengan *saturated incidence rate* berupa persamaan diferensial non linear yang terdiri dari 5 persamaan,yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= (1 - \rho)\pi + \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - \mu S + \omega V \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha I} - (\mu + \sigma)E \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\gamma + \gamma_1 + \mu)I \\ \frac{dV}{dt} &= \rho\pi + \gamma_1 I - (\mu + \omega)V \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R\end{aligned}$$

2. Model epidemik SEIVR pada penyakit Hepatitis B dengan *saturated incidence rate* memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_{q0} = (S_0, E_0, I_0, V_0, R_0)$ dan titik ekuilibrium endemik $E_{q1}^* = (S^*, E^*, I^*, V^*, R^*)$. Diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 =$

$$\frac{\beta\sigma}{\mu^2+(\gamma+\gamma_1)\sigma+(\gamma+\gamma_1)\mu+\sigma\mu} \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right).$$
 Ketika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal, saat $R_0 = 1$ titik ekuilibrium bebas penyakit bersifat stabil, sedangkan saat $R_0 > 1$, titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil. Kemudian titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$ memenuhi syarat $a_2a_1 > a_3$ atau $a_2a_1 - a_3 > 0$. Kestabilan titik ekuilibrium ditunjukkan oleh simulasi untuk potret fase, dimana saat diambil sebarang nilai awal keseluruhan grafik akan bergerak menuju ke titik ekuilibrium.

3. Berdasarkan hasil simulasi untuk trayektori, diperoleh bahwa persentase penurunan imunitas vaksin memiliki pengaruh yang cukup besar terhadap upaya pencegahan penyebaran penyakit Hepatitis B, dimana semakin kecil tingkat penurunan imunitas vaksin menyebabkan nilai R_0 semakin menurun yang berarti penyakit akan semakin cepat menghilang. Hal ini secara tidak langsung menunjukkan bahwa program vaksinasi dapat digunakan dalam melakukan upaya pengendalian terhadap penyebaran penyakit Hepatitis B di dalam suatu populasi dan tingkat penurunan imunitas dari vaksin yang diberikan haruslah se-minimum mungkin agar program vaksinasi yang dilakukan menjadi lebih efektif. Pergerakan jumlah individu yang sembuh (*Recovered*) sangat dipengaruhi oleh jumlah individu terinfeksi.
4. Besarnya persentase sukses vaksinasi yang dilakukan dapat mempercepat periode penyebaran dan mengurangi individu yang terinfeksi penyakit hepatitis B. Dari hasil analisis bifurkasi, penyebaran penyakit hepatitis B pada populasi akan dapat dikendalikan jika nilai persentase sukses vaksinasi minimum sebesar 67.17% dan persentase penurunan imunitas sebesar 10%.

6.2. Saran

1. Pada skripsi ini model epidemik SEIVR pada penyebaran penyakit Hepatitis B hanya terbatas pada populasi tertutup sehingga faktor imigrasi diabaikan. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya dapat dibahas mengenai penyebaran penyakit Hepatitis B pada populasi terbuka.
2. Dalam skripsi ini untuk analisis kestabilan titik ekuilibrium hanya membahas analisis kestabilan lokal, sehingga pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pembahasan mengenai analisis kestabilan global.
3. Analisis bifurkasi dalam skripsi ini hanya dibahas di titik ekuilibrium bebas penyakit karena tujuan analisis bifurkasi dalam skripsi ini adalah untuk mendapatkan nilai minimum tingkat sukses vaksinasi yang harus dilakukan agar penyebaran penyakit dapat dikendalikan. Untuk itu pada penelitian selanjutnya diharapkan dapat dilakukan analisis bifurkasi pada titik ekuilibrium endemik.
4. Penelitian selanjutnya dapat mengambil data simulasi di wilayah Indonesia.

DAFTAR PUSTAKA

- Adebimpe, O. 2014. *Stability Analysis of a SEIV Epidemic Model with Saturated Incidence Rate*. British Journal of Mathematics & Computer Science 4(23): 3358-3368.
- Anton, H. 2000. *Elementary Linear Algebra: Eight Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Cahyono, J.B Suharjo B., dkk. 2010. *Vaksinasi Cara Ampuh Cegah Penyakit Infeksi*. Yogyakarta: Kanisius.
- Departemen Kesehatan RI. 2014. *Profil Kesehatan Indonesia Tahun 2013*. Jakarta: Depkes.
- Departemen Kesehatan RI. 2012. *Pedoman Pengendalian Hepatitis Virus*. Jakarta: Depkes.
- Driessche, P.Van de., & Watmough, James. 2002. *Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission*. Mathematical Bioscience 180: 29-48.
- Fauzah. 1997. *Daya Kebal Setelah Vaksinasi Hepatitis B*. Jakarta: PT Graha Medika Pers.
- Hasan, Irsan. 2010. *Vaksinasi Hepatitis B*. <http://www.budilukmanto.org/index.php/perawatan-hepatitis/42-vaksin-dan-imunisasi/127-pengobatan?tmpl=componentprint=1page> . Diakses 14 Februari 2018.
- Moneim, I.A & Khali, H.A. 2015. *Modelling and Simulation of the Spread of HBV Disease with Infectious Latent*. Applied Mathematics 6: 745-753.
- Notoatmojo, H. 2004. *Peran Imunitas Tubuh Dalam Pencegahan Penyakit Hepatitis Virus Pada Anak*. Semarang: Universitas Diponegoro.
- Nugroho, S. 2009. *Pengaruh Vaksinasi Terhadap Penyebaran Penyakit dengan Model Epidemi SIR*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret.
- Nurhasen, Hindia. 2017. *The Transmission Dynamics and Optimal Control of Hepatitis B in Ethiopia Using SVEIRS Model*. Thesis. Computational Science: Addis Ababa University.
- Olsder, G.J., & Woude. 2003. *Mathematical Systems Theory: Second Edition*. Netherland: Delft University Press .

- Perko, Lawrence. 2001 *Differential Equation and Dynamical Systems*. Department of Mathematics Northern Arizona University, Flagstaff, AZ, 86011, USA.
- Probandari, A., & Handayani, S. dan Laksono, N. 2013. *Ketrampilan Imunisasi*. Surakarta: FK Universitas Sebelas Maret.
- Ross, Shepley L. 1984. *Introduction to Ordinary Differential Equation*. USA: John Wiley and Sons.
- Rost, G., & Wu, J. 2008. *SEIR Epidemiological Model With Varying Infectivity and Infinite Delay*. *Mathematical Bioscience and Engineering*.5.(2): 389-402.
- Supriyanto. 2006. *Metode Euler*. Depok: Departemen Fisika, Universitas Indonesia.
- Siregar, F.A. 2003. *Hepatitis B Ditinjau Dari Kesehatan Masyarakat Dan Upaya Pencegahan*. Fakultas Kesehatan Masyarakat Universitas Sumatera Utara. Medan.
- Strogatz SH. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Massachusetts: Perseus Books Publishing, LLC.
- Widiowati dan Sutimin. 2007. *Bahan Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang: UNDIP.
- Wiggins, Stephen. 2003. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Department of Applied Mechanics: California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA.
- Zou, L. Zhang, W. 2010. *Modeling The Transmission Dynamics and Control Of Hepatitis B Virus in China*. *Journal of Theoretical Biology* 262: 330-338.

LAMPIRAN A

Penentuan Persamaan Karakteristik Titik Ekuilibrium

1.1. Persamaan Karakteristik Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

$$\begin{aligned}
 & |(J(E_{q_0}) - \lambda I)| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) & \omega & 0 \\ 0 & -\mu-\sigma & \beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\gamma-\gamma_1-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\omega & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left| \begin{bmatrix} -\mu-\lambda & 0 & -\beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) & \omega & 0 \\ 0 & -\mu-\sigma-\lambda & \beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\gamma-\gamma_1-\mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu-\omega-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan ekspansi di sepanjang baris pertama maka diperoleh persamaan karakteristik untuk matriks $J(E_{q_0})$.

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow (-\mu - \lambda) \begin{vmatrix} -\mu - \sigma - \lambda & \beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) & 0 & 0 \\ \sigma & -\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} - \\
& \beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) \begin{vmatrix} 0 & -\mu - \sigma - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
& \Leftrightarrow (-\mu - \lambda) \left[\begin{vmatrix} -\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ -\mu - \sigma - \lambda & \gamma & -\mu - \omega - \lambda \\ & \gamma_1 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} - \right. \\
& \left. \beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) \begin{vmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} \right] + \\
& \beta \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) \left[\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mu - \sigma - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} \right] = 0 \\
& \Leftrightarrow (-\mu - \lambda)^2 (-\mu - \sigma - \lambda) (-\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) - \\
& \beta \sigma (-\mu - \lambda)^2 (-\mu - \omega - \lambda) \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow (-\mu - \lambda)^2 (-\mu - \omega - \lambda) \left[(-\mu - \sigma - \lambda) (-\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda) - \beta \sigma \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu+\omega)} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-\mu - \lambda)^2(-\mu - \omega - \lambda) \left[\lambda^2 + \lambda(\gamma + \gamma_1 + \sigma + 2\mu) + \mu^2 + \mu(\gamma_1 + \gamma_2) + \sigma(\gamma_1 + \gamma_2 + \mu) - \beta\sigma \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu + \omega)} \right) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (-\mu - \lambda)^2(-\mu - \omega - \lambda)(\lambda^2 + A\lambda + B) = 0$$

dengan, $A = \gamma + \gamma_1 + \sigma + 2\mu$

$$B = \mu^2 + \mu(\gamma + \gamma_1) + \sigma(\gamma + \gamma_1 + \mu) - \beta\sigma \left(\frac{(1-\rho)\pi}{\mu} + \frac{\omega\rho\pi}{\mu(\mu + \omega)} \right)$$

1.2. Persamaan Karakteristik Titik Ekuilibrium Endemik

$$\left| (J(E_{q_1}^*) - \lambda I) \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} - \mu & 0 & -\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} & \omega & 0 \\ \frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} & -\mu - \sigma & \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\gamma - \gamma_1 - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \omega & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} - \mu - \lambda & 0 & -\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} & \omega & 0 \\ \frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} & -\mu - \sigma - \lambda & \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} - \mu - \lambda & -\mu - \sigma - \lambda & \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} & 0 & 0 \\ \sigma & -\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \omega - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & -\mu - \lambda & 0 \end{vmatrix} - \frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \begin{vmatrix} \frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} - \mu - \sigma - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(-\frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} - \mu - \lambda \right) \left[\begin{array}{c|ccc} (-\mu - \sigma - \lambda) & -\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ & \gamma_1 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ & \gamma & 0 & -\mu - \lambda \end{array} \right] - \\
&\quad \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \left[\begin{array}{ccc} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{array} \right] - \\
&\quad \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \left[\left(\frac{\beta I^*}{(1+\alpha I^*)} \right) \left[\begin{array}{ccc} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{array} \right] - \right. \\
&\quad \left. (-\mu - \sigma - \lambda) \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \lambda \end{array} \right] \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(-\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \mu - \lambda \right) (-\mu - \sigma - \lambda) (-\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) (-\mu - \lambda) - \\
&\quad \sigma \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \left(-\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \mu - \lambda \right) (-\mu - \omega - \lambda) (-\mu - \lambda) - \\
&\quad \sigma \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} \right) (-\mu - \omega - \lambda) (-\mu - \lambda) + \\
&\quad \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) (-\mu - \sigma - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) (-\mu - \lambda) \cdot 0 = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\mu - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) \left[\left(-\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \mu - \lambda \right) (-\mu - \sigma - \lambda) (-\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda) - \right. \\
&\quad \left. \sigma \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \left(-\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \mu - \lambda \right) - \sigma \left(\frac{\beta^2 S^* I^*}{(1+\alpha I^*)^3} \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\mu - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) \left[\left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \mu - \lambda \right) (-\mu - \sigma - \lambda) (-\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda) + \sigma (\mu + \lambda) \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (-\mu - \lambda) (-\mu - \omega - \lambda) \left[\left(\frac{\beta I^*}{1+\alpha I^*} - \mu - \lambda \right) (-\mu - \sigma - \lambda) (-\gamma - \gamma_1 - \mu - \lambda) + \sigma (\mu + \lambda) \left(\frac{\beta S^*}{(1+\alpha I^*)^2} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-\mu - \lambda)(\mu + \omega + \lambda) [a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3] = 0$$

dengan,

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = (\gamma + \gamma_1 + \sigma + 3\mu) + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}$$

$$a_2 = \mu^2 + \mu(\gamma + \gamma_1) + \sigma(\gamma + \gamma_1 + \mu) + \mu(\sigma + 2\mu + 1) + \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} (\gamma + \gamma_1 + \sigma + 2\mu) + \sigma \left(\frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \right)$$

$$a_3 = \mu^3 + \mu^2(\gamma + \gamma_1) + \mu\sigma(\gamma + \gamma_1 + \mu) + \mu^2 + \mu(\gamma + \gamma_1) + \sigma(\gamma + \gamma_1 + \mu) + \sigma\mu \left(\frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2} \right)$$

LAMPIRAN B

M-File Software Matlab R2013a

2.1. Simulasi Trayektori Titik Ekuilibrium

```
%nilai awal
S(1)=20; E(1)=15; I(1)=10; V(1)=8; R(1)=5; i=1; t(1)=0; dt=0.1;
rho=0.5; 0.75;
phi=4;
betha=0.3521;
miu=0.166;
omega=0.1; 0.5; 0.9; %nilai parameter
gamma=2.879;
gamma1=1.75;
sigma=6;
alpha=0.1;
Ro=(betha*sigma)/(miu^2+((gamma+gamma1)*sigma)+((gamma+gamma1)*miu)+
(sigma*miu))*(((1-rho)*phi)/miu+((omega*rho*phi)/(miu*(miu+omega))))
]while (t<=30)
    S(i+1)=S(i)+((1-rho)*phi*dt)-(((betha*S(i)*I(i))/(1+alpha*I(i)))*dt)-(miu*S(i)*dt)+(omega*V(i)*dt);
    E(i+1)=E(i)+(((betha*S(i)*I(i))/(1+alpha*I(i)))*dt)-((miu+sigma)*E(i)*dt);
    I(i+1)=I(i)+(sigma*E(i)*dt)-((gamma+gamma1+miu)*I(i)*dt);
    V(i+1)=V(i)+(rho*phi*dt)+(gamma1*I(i)*dt)-((miu+omega)*V(i)*dt);
    R(i+1)=R(i)+((gamma*I(i))*dt)-(miu*R(i)*dt);
    t(i+1)=t(i)+dt;
    i=i+1;
end;
plot(t,S,'yellow','lineWidth',2.5);hold on
plot(t,E,'green','lineWidth',2.5); hold all
plot(t,I,'red','lineWidth',2.5);
plot(t,V,'black','lineWidth',2.5);
plot(t,R,'blue','lineWidth',2.5);
xlabel('waktu (tahun)');
ylabel('Jumlah Populasi S,E,I,V,R (Jiwa)');
legend('S = Susceptible Human','E = Exposed Human','I = Infected Human','V = Vaccinated Human','R = Recovered Human');
grid on
```


2.2. Kurva Bifurkasi

```

%nilai parameter
phi=4; betha=0.3521; miu=0.166; omega=0.1;
gamma=2.879; gamma1=1.75;
sigma=6; alpha=0.1;
rho=0.5 ; 0.6717 ; 0.75;
%nilaiRo
Ro=((betha*sigma)/(miu^2+((gamma+gamma1)*sigma)+((gamma+gamma1)*miu)+
(sigma*miu)))*(((1-rho)*phi)/miu)+((omega*rho*phi)/(miu*(miu+omega)))
%titik ekuilibrium bebas penyakit
S=((miu+omega)*(1-rho)*phi)+(omega*rho*phi)/(miu*(miu+omega))
V=(rho*phi)/(miu+omega)
E=0
I=0
R=0
%titik ekuilibrium endemik
M=(gamma+gamma1+miu)*(sigma+miu)*(miu+omega)
I2=((miu*M)-(phi*sigma*betha*(1-rho)*(miu+omega))-
(omega*rho*phi*sigma*betha))/
((omega*gamma1*sigma*betha)-(betha*M)-(alpha*miu*M))
S2=((1+alpha*I2)*(sigma+miu)*(gamma+gamma1+miu))/(sigma*betha)
E2=((gamma+gamma1+miu)*I2)/sigma
V2=((rho*phi)+(gamma1*I2))/(miu+omega)
R2=(gamma*I2)/miu
to = 0;
tf = 30;
time = to:0.01:tf;
plot(S+0*time,0.6717+0*time,'k*','LineWidth',10); hold on
plot(S+0*time,0.75+0*time,'k*','LineWidth',10);hold all
plot(S2+0*time,0.50+0*time,'k*','LineWidth',10);
plot(time,0.6717+0*time,'blue','LineWidth',2.5);
xlabel('Titik Ekuilibrium','fontsize',10)
ylabel('Laju individu sukses vaksinasi','fontsize',10)

```

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

A. DATA PRIBADI

Nama Lengkap : Risha Kurnia Robbi
Tempat Tanggal Lahir : Magelang, 10 Juli 1997
Jenis Kelamin : Laki-Laki
Alamat : Lingk. Mendut 3 Rt 03 Rw 06, Kelurahan Mendut,
Kecamatan Mungkid, Kabupaten Magelang
Agama : Islam
Status : Belum Menikah
No HP : 087839981059
E-mail : rishakurniarobbi@gmail.com



B. RIWAYAT PENDIDIKAN FORMAL

1. (2001 – 2002) TK Pertiwi Mendut
2. (2002 - 2008) SD Negeri Mendut
3. (2008 - 2011) SMP Negeri 3 Muntilan
4. (2011 - 2014) SMA Negeri 1 Kota Mungkid
5. (2014 - 2018) Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta