

**KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTRAKSI
MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF
LENGKAP**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



Diajukan oleh:

FITRIYATUL MUKAROMAH

14610040

Kepada:

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2018



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas akhir

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Fitriyatul Mukaromah
NIM : 14610040
Judul Skripsi : Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontraksi Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 2 Februari 2018

Pembimbing

Malahayati, M.Sc

NIP. 19840412 201101 2 010



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-852/Un.02/DST/PP.00.9/02/2018

Tugas Akhir dengan judul : Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontraksi Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : FITRIYATUL MUKAROMAH
Nomor Induk Mahasiswa : 14610040
Telah diujikan pada : Senin, 12 Februari 2018
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Malahayati, S.Si., M.Sc
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji I

Dr. Muhammad Wakid Musthofa, S.Si., M.Si.
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji II

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.
NIP. 19861208 201503 2 006

Yogyakarta, 12 Februari 2018
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
DEKAN



Dr. Murtono, M.Si.
NIP. 19691212 200003 1 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitriyatul Mukaromah

NIM : 14610040

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 2 Februari 2018

Yang Menyatakan



Fitriyatul Mukaromah

MOTTO

“Dan janganlah kamu (merasa) lemah, dan jangan (pula) bersedih hati, sebab kamu paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang yang beriman.”

(Q.S Ali Imron: 139)

“Dan bahwa manusia hanya memperoleh apa yang telah diusahakannya. Dan sesungguhnya usahanya itu kelak akan diperlihatkan (kepadanya). Kemudian akan diberi balasan kepadanya dengan balasan yang paling sempurna.”

(Q.S An-Najm: 39-41)

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan.”

(Q.S Al Insyiroh: 5-6)

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PERSEMBAHAN

KARYA SEDERHANA INI KUPERSEMBAHKAN KEPADA

BAPAK RUMADI DAN IBU SITI SUPARIYYAH TERKASIH
MBAK NUR ROIFFAH DAN DEK AHMAD ABDUL LATIF TERSAYANG

PARA GURU, DOSEN, DAN USTADZ-USTADZAH YANG TELAH
MEMBEKALI ILMU

ALMAMATERKU TERCINTA,

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGRI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

PONDOK PESANTREN NURUL UMMAH PUTRI

KOTAGEDE, YOGYAKARTA

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontraksi Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif Lengkap”** sebagai salah satu syarat untuk mencapai derajat sarjana S-1. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman Islamiyah.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan terselesaikan tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu, dengan segala kerendahan hati penulis banyak mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Drs. K.H. Yudian Wahyudi, M.A., Ph.D., selaku rektor UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Murtono, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Dr. M. Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Ibu Malahayati, M.Sc. selaku dosen penasehat akademik mahasiswa program studi matematika angkatan 2014 sekaligus pembimbing yang telah

dengan sabar memberikan ilmu, arahan, dan dukungan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan

5. Segenap dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan studi.
6. Bapak Rumadi dan Ibu Siti Supariyyah yang tak hentinya memberikan kasih sayang, cinta, pengorbanan, serta do'a kepada penulis. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada kakak tercinta, Nur Roiffah dan adik tersayang Ahmad Abdul Latif yang telah memberikan banyak dukungan sekaligus motivasi tiada henti kepada penulis.
7. Almaghfurlah K.H. Asyhari Marzuqi, serta Ibunda Nyai Hj. Barokah Nawawi dan Abah K.H. Munir Syafa'at, selaku Pengasuh Pondok Pesantren Nurul Ummah Putri Kotagede Yogyakarta.
8. Teman-teman matematika 2014 yang selalu memberikan dukungan dan motivasi hingga skripsi ini terselesaikan.
9. Keluargaku PP Nurul Ummah Putri, khususnya angkatan 2014, kamar H1 (2014-2015), kamar SS2 (2015-217) dan kamas SS5 (2017-sekarang). Tidak lupa juga terimakasih penulis sampaikan pada sahabat terkasih Farida, Faradis, Fahmi, Oryza dan Zulfa yang selama ini telah memberi banyak kasih sayang pada penulis.
10. Semua pihak yang telah berkontribusi dalam penulisan skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Namun demikian, semoga karya yang sederhana ini bisa memberikan manfaat dan menjadi berkah bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal Aalamiin.*

Yogyakarta, 1 Februari 2018 M

Penulis,

Fitriyatul Mukaromah
NIM. 14610040



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR LAMBANG	xii
ABSTRAK	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Batasan Masalah	4
1.3 Rumusan Masalah	5
1.4 Tujuan Penelitian	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Tinjauan Pustaka	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
1.8 Metode Penelitian	8

BAB II DASAR TEORI.....	10
2.1. Dasar-dasar Analisis Real.....	10
2.2. Ruang Metrik.....	23
2.3. Titik Tetap	29
 BAB III KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTRAKSI MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF LENGKAP	33
3.1. Dasar-dasar Ruang Metrik Multiplikatif	33
3.2. Teorema Titik Tetap di Ruang Metrik Multiplikatif	40
 BAB IV PENUTUP	66
4.1. Kesimpulan.....	66
4.2. Saran	67
 DAFTAR PUSTAKA	68
 LAMPIRAN.....	69

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR LAMBANG

\mathbb{N}	: Himpunan bilangan asli
\mathbb{R}	: Himpunan bilangan real
\forall	: Untuk setiap
\exists	: Terdapat
\in	: Elemen
\ni	: Sedemikian hingga
$<$: Kurang dari
$>$: Lebih dari
\leq	: Kurang dari sama dengan
\geq	: Lebih dari sama dengan
\neq	: Tidak sama dengan
$A \subseteq B$: Himpunan A subset himpunan B
∞	: Tak terhingga
\rightarrow	: Menuju
\rightarrow_*	: Konvergen multiplikatif
$ a $: Nilai mutlak a
\Leftrightarrow	: Jika dan hanya jika

ABSTRAK

Ruang metrik multiplikatif merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu fungsi yang memetakan setiap pasang elemen ke suatu bilangan real positif dan memenuhi empat aksioma. Ruang metrik multiplikatif merupakan hasil pengembangan dari ruang metrik dengan mengganti operasi penjumlahan menjadi operasi perkalian serta memenuhi beberapa kondisi tertentu.

Skripsi ini menghasilkan pembuktian ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap. Pembuktian ketunggalan titik tetap tersebut memiliki beberapa langkah pembuktian, diantaranya yaitu: *pertama*, terlebih dahulu dibentuk barisan iteratif dan dibuktikan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy multiplikatif. *Kedua*, dibuktikan bahwa barisan tersebut memiliki titik tetap dengan memanfaatkan sifat kelengkapan ruang metrik multiplikatif. *Ketiga*, setelah dibuktikan bahwa barisan tersebut memiliki titik tetap, selanjutnya dibuktikan bahwa titik tetap tersebut adalah tunggal. Pada ketiga langkah pembuktian diatas, fungsi kontraksi multiplikatif sangatlah berperan penting. Selain itu, fungsi kontraksi multiplikatif sangat dibutuhkan dalam pembuktian yang dilakukan oleh Ozavsar dan Cevikel (2012) namun tidak untuk Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome (2014).

Kata kunci: Fungsi kontraksi multiplikatif, Ruang metrik multiplikatif, Titik tetap

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Al-Qur'an merupakan firman Allah SWT yang diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai mukjizat, disampaikan dengan jalan mutawatir melalui malaikan jibril, dan dijadikan pedoman sekaligus sumber pengetahuan umat Islam dalam segala hal. Sejak ribuan tahun silam, berbagai informasi sains dan teknologi telah terkandung di dalamnya.

Secara konvensional, pandangan sains menempatkan matematika sebagai suatu yang prinsipil dari sebuah cabang pengetahuan dimana emosi tidak dilibatkan, alasan dikedepankan, kepastian menjadi hal yang ingin diketahui, dan kebenaran hari ini merupakan kebenaran untuk selamanya. Dalam permasalahan agama, ilmuwan memandang bahwa semua agama adalah sama, karena semua agama sama-sama tidak mampu menjustifikasi atau memverifikasi kebenaran melalui pembuktian yang dapat diterima oleh logika. Jadi suatu hal dikatakan valid jika ada bukti nyata dan dapat diterima oleh semua pihak. Berdasarkan dasar tersebut, maka dapat diambil kesimpulan bahwa Al-Qur'an yang ditulis menurut aturan matematika merupakan bukti nyata bahwa Al-Qur'an adalah benar-benar firman Allah dan bukan buatan Nabi Muhammad SAW.

Ucapan Galileo (1564-1642) mengatakan bahwa *"Mathematics is the language in which God wrote the universe (Matematika adalah bahasa yang digunakan Tuhan dalam menuliskan alam semesta ini)"* ada benarnya. Kebenaran

bahasa matematika dalam Al-Qur'an dapat dilihat salah satunya dengan adanya angka-angka menakjubkan yang memiliki keterkaitan erat dengan penciptaan dan kehidupan.

Seperti dalam firman Allah SWT dalam Surah Yunus ayat 5:

هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاءً وَالْقَمَرَ نُورًا وَقَدَرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا عَدَدَ السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللَّهُ ذَلِكَ إِلَّا بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الْآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ

Artinya: *“Dialah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui.”*

Matematika adalah ilmu yang terus berkembang dari waktu ke waktu, hal ini dikarenakan munculnya berbagai masalah dan fenomena baik dalam dunia fisis maupun abstrak yang semakin kompleks. Salah satu contoh dari perkembangan ilmu matematika adalah dengan adanya teorema titik tetap. Teorema ini telah banyak dikembangkan dalam analisis fungsional untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap dengan kondisi tertentu.

Analisis fungsional merupakan salah satu cabang matematika abstrak yang bermula dari analisis klasik. Perkembangan dari cabang ini sudah dimulai sejak delapan puluh tahun yang lalu. Saat ini, metode analisis fungsional berperan penting dalam bidang matematika dan aplikasinya. Sebagai contoh, salah satu pembahasan yang menarik dalam metode analisis fungsional adalah teorema titik

tetap dalam ruang metrik, ruang banorma, ruang Banach, ruang Hilbert, dan lain sebagainya. Penggunaan titik tetap diantaranya adalah untuk menentukan solusi khusus dari persamaan defferensial, menyelesaikan persamaan integral, dan menentukan solusi dari sistem persamaan linier. Sifat-sifat yang ada dalam titik tetap juga banyak digunakan dalam menentukan model matematika, baik dalam bidang sains, bidang ekonomi maupun bidang yang lainnya.

Pada abad ke -19 pendekatan titik tetap ditemukan oleh Matematikawan asal Prancis yang bernama H. Poincare (1454 – 1912). Seiring dengan perkembangannya, Spencer (1906 – 1980) membuktikan lemma kombinatorial pada penguraian segitiga yang kemudian sangat berguna dalam sifat titik tetap. Pada tahun 1922, Banach berhasil mengenalkan sebuah karya yang sangat terkenal dan bermanfaat dalam bidang teori titik tetap yaitu prinsip kontraksi Banach di ruang metrik lengkap.

Ruang metrik merupakan himpunan tak kosong, yang dilengkapi dengan suatu fungsi yang disebut metrik dan memenuhi beberapa aksioma. Seiring berkembangnya zaman, banyak matematikawan mencoba untuk mengembangkan konsep ruang metrik. Konsep ruang metrik sendiri pertama kali diperkenalkan oleh Mourice Frechet pada tahun 1906.

Pada tahun 2008, Agamira E.Bashirov dkk pertama kali mengenalkan definisi ruang metrik multiplikatif dalam jurnalnya yang berjudul “*Multiplicative Calculus and its application*”. Selanjutnya, pada tahun 2012 Ozavsar dan Cevikel dalam jurnalnya yang berjudul “*Fixed Point Of Multiplicative Contraction Mappings On Multiplicative Metric Space*” memperkenalkan konsep pemetaan

kontraksi multiplikatif dan membuktikan beberapa teorema titik tetap pada ruang metrik multiplikatif lengkap.

Lebih lanjut, pada tahun 2014 Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome melanjutkan penelitian Ozavsar dan Cevikel dalam jurnal yang berjudul “*Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space*”. Mereka membuktikan teorema titik tetap pada ruang metrik multiplikatif yang merupakan hasil pengembangan dari jurnal sebelumnya. Mereka juga menyajikan beberapa korolari dari hasil pembuktian teorema tersebut.

Melihat begitu pesatnya perkembangan penelitian ruang metrik dan teori titik tetap, tentu sangat menarik jika mempelajari lebih lanjut tentang ruang metrik multiplikatif. Penelitian ini merupakan penjabaran sekaligus melengkapi langkah-langkah pembuktian beberapa teorema titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap yang belum disajikan dalam dua jurnal yang diteliti, yakni jurnal yang ditulis oleh Ozavsar dan Cevikel serta jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome. Tidak hanya itu, penelitian ini juga mencoba untuk menemukan hubungan pembuktian teorema titik tetap yang ditulis dalam dua jurnal tersebut.

1.2 Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu penelitian sangatlah penting guna menghindari kesalahpahaman terhadap objek penelitian sekaligus membantu penulis agar lebih fokus dan terarah sesuai dengan tujuan yang dimaksud. Berdasarkan pada latar belakang masalah dan kajian-kajian pendukung lain, maka skripsi ini dibatasi pada pembahasan mengenai teorema titik tetap di ruang metrik

multiplikatif lengkap, yaitu lebih dikhususkan untuk menyelidiki ketunggalan titik tetap tersebut. Perlu diketahui pula, penelitian ini tidak membahas tentang kalkulus multiplikatif melainkan hanya mengambil beberapa definisi yang dibutuhkan.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Bagaimana pembuktian teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap?
2. Bagaimana hubungan teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap yang telah dibuktikan dalam jurnal yang ditulis oleh Ozavsar dan Cevikel dengan jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome?

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah mengkaji dan menjelaskan langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap sekaligus menjelaskan hubungan teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap yang telah dibuktikan dalam jurnal yang ditulis oleh Ozavsar dan Cevikel dengan jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap beserta langkah-langkah pembuktiannya.
2. Memberikan motivasi kepada pembaca untuk mempelajari perkembangan ruang metrik.
3. Peneliti dan pembaca dapat menjadikan hasil penelitian ini sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut dan memberikan pengetahuan kepada pembaca untuk lebih mengenal adanya perkembangan ruang metrik.

1.6 Tinjauan Pustaka

Penelitian ini berawal dari jurnal yang ditulis oleh Agamirza E. Bashirov dkk pada tahun 2008 yang berjudul "*Multiplicative Calculus and its application*" tentang kalkulus multiplikatif dan aplikasinya. Dalam jurnal tersebut, definisi ruang metrik multiplikatif diperkenalkan untuk pertama kali. Selanjutnya, pada tahun 2012, Ozavsar dan Cevikel dalam jurnal yang berjudul "*Fixed Point of Multiplicative Contraction Mappings On Multiplicative Metric Space*" menjelaskan konsep dasar ruang metrik multiplikatif dan mengenalkan teorema titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap. Pada tahun 2014, Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome melanjutkan penelitian Ozavsar dan Cevikel yang kemudian ditulis dalam jurnal yang berjudul "*Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space*". Dalam jurnal tersebut, Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome membuktikan teorema titik tetap di ruang metrik multiplikatif lengkap yang salah satunya merupakan hasil pengembangan dari jurnal yang ditulis oleh Ozavsar dan Cevikel.

Selain jurnal di atas, digunakan beberapa referensi pendukung guna membantu sekaligus memudahkan penelitian ini. Diantaranya adalah buku *“Introduction to Real Analysis”* yang ditulis oleh Bartle dan Sherbert edisi keempat pada tahun 2010. Buku ini membahas tentang dasar-dasar analisis real. Selain itu, buku yang berjudul *“Metric Spaces”* pada tahun 2006 oleh Shirali dan Vasudeva juga banyak membantu dalam penelitian ini. Buku ini membahas mengenai dasar-dasar ruang metrik. Selanjutnya, untuk memahami tentang teori titik tetap, digunakan buku *“Fixed Point Theory and Applications”* yang ditulis pada tahun 2004 oleh Ravi Agarwal, Maria Meehan, dan Donal O’regan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan ini disusun untuk memberikan gambaran secara umum dan menyeluruh guna mempermudah dalam memahami penulisan skripsi ini. Secara garis besar, sistematika penulisan skripsi ini terdiri dari empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini membahas mengenai latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, dan metode penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Pada bagian ini memaparkan secara lebih jelas dan menguraikan teori-teori yang menjadi dasar dalam memahami bab selanjutnya, yaitu dasar-dasar analisis real, definisi ruang metrik, teorema-teorema yang berlaku di dalamnya, dan teori titik tetap pada ruang metrik beserta contohnya.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara rinci mengenai dasar ruang metrik multiplikatif dan teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap beserta langkah-langkah pembuktiannya.

BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan umum beserta saran-saran yang membangun dari hasil penelitian studi literatur yang dilakukan.

1.8 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur, yaitu dengan mempelajari beberapa sumber tertulis tentang ruang metrik multiplikatif sesuai dengan tema penelitian. Adapun sifat penelitian dalam skripsi ini adalah kualitatif.

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai ruang metrik multiplikatif, terlebih dahulu dijelaskan mengenai dasar-dasar analisis real dan konsep ruang metrik sebagai landasan teori. Tidak hanya itu, konsep barisan konvergen, barisan Cauchy pada ruang metrik, dan pemetaan kontraktif juga dijelaskan guna memudahkan dalam memahami teori titik tetap pada ruang metrik yang nantinya akan dibahas secara lebih rinci.

Pembahasan inti dari penelitian ini adalah mengenai teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap. Langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap dijelaskan secara lebih rinci dan mendetail. Penelitian ini mengacu pada jurnal yang ditulis oleh Ozavsar dan Cevikel yang berjudul *“Fixed Point Of Multiplicative Contraction*

Mappings On Multiplicative Metric Space” dan jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar and Badshah-e-Rome yang berjudul “*Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space*”. Pada jurnal ini, terdapat beberapa langkah pembuktian teorema yang tidak dijelaskan sehingga digunakan jurnal lain sebagai pendukung pembuktian teorema tersebut.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Pembuktian ketunggalan titik tetap pada fungsi kontraksi multiplikatif di ruang metrik multiplikatif lengkap memiliki beberapa langkah pembuktian. Langkah pembuktian tersebut diantaranya yaitu: *pertama*, terlebih dahulu dibentuk barisan iteratif dan dibuktikan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy multiplikatif. *Kedua*, dibuktikan bahwa barisan tersebut memiliki titik tetap dengan memanfaatkan sifat kelengkapan ruang metrik multiplikatif. *Ketiga*, setelah dibuktikan bahwa barisan tersebut memiliki titik tetap, selanjutnya dibuktikan bahwa titik tetap tersebut adalah tunggal. Pada ketiga langkah pembuktian diatas, fungsi kontraksi multiplikatif sangatlah berperan penting.
2. Berdasarkan tiga teorema yang ditulis oleh Ozavsar dan Cevikel, fungsi kontraksi multiplikatif sangat berperan penting dalam setiap langkah pembuktian. Berbeda dengan langkah pembuktian yang dilakukan oleh Muhammad Sarwar dan Badshah-e-Rome dalam teoremanya tidak mensyaratkan fungsi kontraksi multiplikatif melainkan memenuhi suatu pertidaksamaan tertentu.

4.2 Saran

Setelah terselesaikannya proses penelitian yang telah dilakukan oleh penulis, maka saran-saran yang dapat disampaikan adalah:

1. Penelitian ini masih sangat terbatas karena hanya membahas mengenai konsep dasar ruang metrik multiplikatif dan beberapa teorema titik tetap yang ada di dalamnya. Oleh karena itu, penelitian ini sangat bisa untuk lebih dikembangkan lagi.
2. Contoh yang diberikan dirasa masih sangat kurang sehingga perlu adanya penelitian lebih lanjut.
3. Masih banyak pembahasan mengenai ruang metrik multiplikatif yang belum dipelajari secara mendalam sehingga dapat dijadikan sebagai bahan penelitian selanjutnya.
4. Penelitian ini bisa diteliti lebih lanjut dengan mengganti ruang metrinnya.

Demikian saran-saran yang dapat disampaikan oleh penulis, semoga penelitian ini dapat menjadi inspirasi bagi para pembaca untuk mengembangkan lebih lanjut mengenai teorema maupun penerapan titik tetap di ruang metrik multiplikatif.

DAFTAR PUSTAKA

- Agarwal, Ravi P., Maria Meehan, and Donal O'Regan. 2004. *Fixed Point Theory and Applications*. UK. Cambridge University Press.
- Bartle, R. G., and Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*. Fourth Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Kreyzig, E.. 1989. *Introductory Functional Analysis with Application*. United States of America.
- Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L. 2006. *Metric Spaces*. London: Springer – Verlag.
- T. Zamfirescu. 1972. *Fix Point Theorems in Metric Spaces*. Archiv der Mathematik: Volume 23, Issue 1, pp 292-293.
- A.E. Bashirov, E.M. Kurpnar and A. Ozyapc. *Multiplicative Calculus and Its Applications*, J. Math.Analy. App., 337(2008) 36-48.
- M. Ozavsar" and A. C. Cevikel. *Fixed Point of Multiplicative Contraction Mappings on Multiplicative Metric Space*. arXiv: 1205.5131v1 [matn.GN] (2012).
- Sarwar, M., Badshah-e-Rome: *Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space (2014)*.arXiv:1410.3384v2 [math.GM].

LAMPIRAN

Berikut diberikan teorema nilai mutlak, teorema ketaksamaan segitiga, akibat dari teorema ketaksamaan segitiga dan pembuktian menggunakan induksi matematika.

1. Teorema pada Nilai Mutlak

- a) $|ab| = |a||b|$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$.
- b) $|a|^2 = a^2$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$.
- c) Jika $c \geq 0$, maka $|a| \leq c$ jika dan hanya jika $-c \leq a \leq c$.
- d) $-|a| \leq a \leq |a|$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$.

Bukti:

- a) Jika $a = b = 0$, maka pernyataan benar.

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $|ab| = ab = |a||b|$.

Jika $a < 0$ dan $b < 0$ maka $|ab| = -ab = a(-b) = |a||b|$.

- b) Diketahui $a^2 \geq 0$, maka $a^2 = |a^2| = |aa| = |a||a| = |a|^2$.
- c) Jika $|a| \leq c$, maka $a \leq c$ dan $-a \leq c$ yang berarti $-c \leq a \leq c$. Sebaliknya, jika $-c \leq a \leq c$, maka diperoleh $a \leq c$ dan $-a \leq c$. Jadi, $|a| \leq c$.
- d) Menggunakan cara yang sama dengan (c) dengan mengambil $c = |a|$.

2. Teorema Ketaksamaan Segitiga

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 1. (d) diketahui

$$|a| \leq a \leq |a| \text{ dan } |b| \leq b \leq |b|.$$

Selanjutnya, dengan menjumlahkan kedua ketaksamaan diperoleh

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Berdasarkan Teorema 1. (c) diperoleh $|a + b| \leq |a| + |b|$.

3. Akibat dari Teorema Ketaksamaan Segitiga

Jika $a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$a) \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|$$

$$b) \quad |a - b| \leq |a| + |b|$$

Bukti:

a) Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{R}$. Misalkan $a = a - b + b$ dan $b = b - a + a$.

Selanjutnya masukkan kedua permisalan tersebut ke dalam Ketaksamaan Segitiga, sehingga

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Kurangkan kedua ruas dengan $|b|$, sehingga diperoleh

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Selanjutnya, gunakan gara yang sama untuk $b = b - a + a$, sehingga diperoleh

$$-|a - b| \leq |a| - |b|.$$

Kombinasikan kedua ketaksamaan tersebut, sehingga diperoleh

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Berdasarkan Teorema 1. (c) diperoleh bahwa $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

b) Gantilah b pada Ketaksamaan Segitiga dengan $-b$, sehingga diperoleh

$|a - b| \leq |a| + |-b|$. Karena $|-b| = |b|$, maka diperoleh bahwa

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

4. Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Diberikan barisan

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_p < \dots$$

adalah bilangan asli yang naik tegas.

Akan dibuktikan $n_p \geq p$ untuk setiap $p \in \mathbb{N}$.

Bukti:

- i. Benar bahwa $p = 1$, berarti

$$n_1 \geq 1.$$

- ii. Diasumsikan benar untuk $n_p \geq p$.

Karena barisan $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_p < \dots$ adalah bilangan asli yang naik tegas, maka $n_{p+1} \geq n_p$. Berdasarkan asumsi bahwa $n_p \geq p$, maka

$$n_{p+1} \geq n_p \geq p,$$

sehingga diperoleh

$$n_{p+1} \geq p + 1.$$

Jadi, terbukti benar bahwa $n_p \geq p$ untuk setiap $p \in \mathbb{N}$. ■

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

CURRICULUM VITAE

A. Biodata Pribadi

Nama Lengkap : Fitriyatul Mukaromah
Tempat, Tanggal Lahir : Temanggung, 01 Februari 1998
Jenis Kelamin : Perempuan
Alamat Asal : Getas Pitrosari Rt 02 Rw 04 Wonobojo, Temanggung
Domisili : Jln. Raden Ronggo KG II/981 Prenggan Kotagede
Yogyakarta
Email : fitriyatul.mukaromah01@gmail.com
No. HP : 085742188837

B. Latar Belakang Pendidikan Formal

Jenjang	Nama Sekolah	Tahun
SD	MI Riyadlotul Uqul Pitrosari	2003 - 2009
SMP	SMP Takhassus Alqur'an Wonosobo	2009 - 2012
SMA	SMA Takhassus Alqur'an Wonosobo	2012 - 2014
S1	UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	2014 - 2018

C. Latar Belakang Pendidikan Non Formal

1. PPTQ Al-Asy'ariyyah Wonosobo
2. PP Nurul Ummah Putri Yogyakarta