ANALISIS ELIMINASI GAUSS, DEKOMPOSISI CROUT, DAN METODE MATRIKS INVERS DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER SERTA APLIKASINYA DALAM BIDANG EKONOMI

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan mencapai derajat Sarjana S-1

Diajukan oleh:

IIN INDRAYANI
04610010

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2009

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/384/2009

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul	:	Analisis Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Metode Matriks Invers dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan linier serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi
Yang dipersiapkan dan disusun oleh	:	
Nama	:	Iin Indrayani
NIM	:	0461 0010
Telah dimunaqasyahkan pada	:	30 Januari 2009
Nilai Munaqasyah	:	A -

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Sunaryati, SE, M.Si
NIP. 150321645

Penguji I

Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si
NIP. 150299966

Penguji II

M.Kukuh, S.Si

Yogyakarta, 19 Februari 2009
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

DEPARTEMEN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UIN SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Dra. Maizer Said Nahdi, M.Si
NIP. 150219153

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI

Hal : Persetujuan

Lamp : -

Kepada:

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Di Yogyakarta

Assalaamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	**: Iin Indrayani**
NIM	**: 04610010**
Judul Skripsi	**: Analisis Metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Metode Matriks Invers dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi**

Sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan/ Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Sains.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Yogyakarta, 05 Januari 2009
Pembimbing I

Fitriyana Yuli Saptaningtyas, M.Si
NIP: 132326893

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI

Hal : Persetujuan

Lamp : -

Kepada:

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Di Yogyakarta

Assalaamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Iin Indrayani

NIM : 04610010

Judul Skripsi : Analisis Metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Metode Matriks Invers dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi

Sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan/ Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Sains.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Yogyakarta, 18 Desember 2008

Pembimbing II

Sunaryati, S.E., M.Si.

NIP : 150321645

PERNYATAAN KEASLIAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 07 Januari 2009

Iin Indrayani

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini ku persembahkan Kepada

Almamater Tercinta
fakultas Sains danTeknologi
Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga
Yogyakarta

MOTTO

"*Dengan ilmu kehidupan menjadi enak, dengan seni kehidupan menjadi halus dan dengan agama hidup menjadi terarah dan bermakna***"**
(Mukti Ali)

"*Milikilah harapan yang besar, jadikanlah sebagai lambang dalam kehidupan. Milikilah angan-angan yang tinggi, jadikanlah sebagai pakaian sehari-hari***"**
(Musthofa al-Ghalayain)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّٰهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas rahmat dan ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini, sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains di Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta..

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini tidak akan dapat diselesaikan tanpa dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dra. Hj. Maizer Said Nahdi, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ibu Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Ketua Prodi Matematika beserta Staf Administrasi yang telah memberikan kelancaran dalam penyusunan tugas akhir ini.
3. Ibu Fitriyana Yuli, M.Si, dan Ibu Sunaryati, SE. M.Si., selaku dosen pembimbing yang telah dengan sabar memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyusunan tugas akhir ini.
4. Bapak Much. Abrori, S.Si. M.Kom., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah banyak membimbing dan memberikan nasehat kepada penulis dalam menempuh pendidikan di Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.

5. Ayahanda dan Ibunda tercinta serta kakak dan adikku atas segala do'a, cinta, dorongan, dan kasih sayangnya yang tak terbalaskan kepada penulis hingga akhirnya penulis dapat menyelesaiakan penyusunan tugas akhir ini.
6. Seseorang yang teristimewa, buat mas Didik yang menjadi air dan api dalam kehidupanku, yang akan menemani sisa waktu hidupku serta menjadi imam dalam keluargaku.
7. Sahabat sejatiku Eka Ferri Indayani, Wiwin, Rahma, Gowok's Clubs, dan anak-anak Astri Kartini yang telah memberikan motivasi dan mengajarkan apa arti sebuah persahabatan.
8. Mas Aziz yang telah memberikan semangat dan bantuannya sampai penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
9. Rekan-rekan seperjuanganku di Prodi Matematika-04 Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
10. Kepada semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah memberikan masukkan dan saran bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Akhirnya, semoga penyusunan tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi segenap pembaca.

Yogyakarta,   Desember 2008
Penulis

Iin Indrayani

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

ANALISIS METODE ELIMINASI GAUSS, DEKOMPOSISI CROUT, DAN METODE MATRIKS INVERS DALAM MENYELESAIKAN SISTEM PERSAMAAN LINIER SERTA APLIKASINYA DALAM BIDANG EKONOMI

Oleh:
Iin Indrayani
NIM. 04610010

Ruang kehidupan yang dirasa semakin mengecil sebagai akibat dari pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dewasa ini, persaingan global berlangsung dengan sangat ketat, baik di lapangan ekonomi, politik maupun kebudayaan. Tentunya, untuk menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi tidak cukup hanya dengan penguasaan satu ilmu, tetapi harus menguasai ilmu-ilmu dasar (*basic sciences*) yang dapat menunjang, salah satunya adalah matematika. Berdasarkan hal ini, tentu matematika penting sekali untuk dipelajari dan dikuasai, karena banyak sekali sesuatu di alam yang membutuhkan pemahaman yang berbentuk matematis. Pemahaman ini dapat dilanjutkan melalui pemodelan matematika. Salah satu pemodelan matematika yang sering digunakan adalah sistem persamaan linier.

Sistem persamaan linier merupakan bagian dari materi aljabar linier. Sistem persamaan linier yang mempunyai m persamaan dan n variabel disebut sistem persamaan linier orde $m \times n$, sedangkan bila jumlah persamaan sama dengan jumlah variabel disebut dengan sistem persamaan linier orde $n \times n$. Ada berbagai macam metode untuk menyelesaikan sistem persamaan linier orde $m \times n$ dan orde $n \times n$, oleh karena itu perlu dicari metode yang paling efektif dan efisien.

Penelitian ini dikhususkan pada penyelesaian sistem persamaan linier untuk orde $n \times n$ dengan metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers. Selain itu, penulis berusaha untuk meneliti lebih lanjut mengenai aplikasi ketiga metode tersebut dalam bidang ekonomi.

Pembahasan penelitian ini memberikan kesimpulan bahwa metode eliminasi Gauss lebih efektif dan efisien dibandingkan dengan Dekomposisi Crout dan metode matriks invers. Perbandingan ini dapat dilihat dari jumlah operasi aritmatika, banyaknya langkah, kecepatan, dan ketepatan dalam penyelesaian. Selain itu ternyata ketiga metode tersebut dapat diaplikasikan dalam bidang ekonomi, terutama dalam analisis *input-output.*

Kata kunci: eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, Matriks invers, Sistem Persamaan Linier, analisis *input-output*

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Ruang kehidupan yang dirasa semakin mengecil sebagai akibat dari pesatnya perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dewasa ini, persaingan global berlangsung dengan sangat ketat, baik di lapangan ekonomi, politik maupun kebudayaan. Di era persaingan global, hanya bangsa- bangsa yang mampu menguasai IPTEK yang dapat memelihara kemandirian bangsanya serta mengambil peran yang berarti dalam proses-proses ekonomi, politik dan kebudayaan global. Peran yang berarti diperlukan manusia dari berbagai dunia untuk melakukan langkah-langkah yang sistematis dan bersungguh-sungguh dalam upaya penguasaan, pemanfaatan, dan pengembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Penguasaan ilmu pengetahuan dan teknologi, tidak cukup hanya dengan penguasaan satu ilmu, tetapi harus menguasai ilmu-ilmu dasar (*basic sciences*) yang dapat menunjang. Salah satunya adalah matematika.

Matematika merupakan salah satu batu sendi dalam kesempatan untuk maju dan berhasil dalam dunia modern ini. Pada saat ini, matematika semakin banyak diterapkan dalam berbagai bidang kehidupan. Dengan didukung ilmu yang lain, matematika memberikan sumbangan langsung dan mendasar untuk menyelesaikan persoalan pada ilmu eksakta (Fisika, Biologi, Kimia, atau yang lain). Seiring dengan bergantinya zaman, matematika dapat juga diterapkan pada ilmu pengetahuan sosial, termasuk ilmu ekonomi.[1] Semakin banyaknya matematika dalam berbagai bidang menunjukkan bahwa peran matematika di dalam kehidupan umat manusia pada "*abad teknologi*" ini sangat mutlak.[2]

Matematika juga berperan untuk mencari hubungan antar variabel–variabel, baik dalam ilmu ekonomi ataupun ilmu yang lain. Matematika sering digunakan untuk memecahkan persoalan yang terdiri dari lebih dua persamaan. Pada Negara maju, terutama di dalam penggunaan alat berhitung otomatis yang modern (*electronic computer*), tidak jarang di dalam menemukan model ekonominya harus memecahkan sistem persamaan yang terdiri dari puluhan persamaan dengan ratusan variabel, sehingga harus dicari nilai variabel dan dihitung pula nilai parameter (*koefisien-koefisien*) yang ratusan jumlahnya.[3]

Matriks sebagai bagian dari matematika (khususnya ilmu aljabar) memungkinkan untuk menyatakan suatu sistem persamaan yang sangat rumit dalam suatu cara yang ringkas dan sederhana.[4] Matriks didefinisikan sebagai deretan bilangan, parameter atau variabel yang disusun segi empat, yang masing-masing mempunyai tempat yang ditata secara cermat dalam matriks.[5] Bentuk matriks seperti yang didefinisikan tersebut, tidak dapat diaplikasikan secara langsung untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang ada, karena persoalan-persoalan tersebut berasal dari dunia nyata.

---

[1] H. Johannes & Budiono S. Handoko, *Pengantar Matematika untuk Ekonomi*, Cet. Sebelas, (Jakarta: LP3ES, 1998), hlm. Viii

[2] Theresia M. H. Tirta Saputra, *Pengantar Dasar Matematika Logika dan Teori Himpunan*, (Jakarta: Erlangga, 1992), hlm. 1

[3] J. Supranto, *Pengantar Matriks*, Cet. Pertama, (Jakarta: RINEKA CIPTA, 1998), hlm. 10

[4] Edward T. Dowling, *Matematika untuk Ekonom*, terj. Bambang Sugiarto, (Jakarta: Erlangga, 1980), hlm. 180

[5] *Ibid*

Perlu ada penggambaran secara matematis atau pemodelan matematika yang menghubungkan satu atau lebih variabel untuk mendapatkan penyelesaiannya. Suatu model linier hampir semua mengarah pada himpunan persamaan linier atau pertidaksamaan linier. Persamaan linier dapat terdiri dari *m* persamaan dan *n* variabel atau dapat terdiri dari *n* persamaan dan *n* variabel. Penyelesaian bentuk ini dapat diselesaikan melalui matriks.

Penyelesaian sistem persamaan linier dengan *m* persamaan dan *n* variabel dapat menggunakan eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan, sedangkan untuk *n* persamaan dan *n* variabel dapat menggunakan beberapa metode, antara lain eliminasi Gauss, metode Gauss-Jordan, metode matriks invers, aturan cramer, *Dekomposisi LU* (faktorisasi segitiga atas-bawah) dan *Dekomposisi Crout*. Perlu dikaji metode yang paling efektif dan efisien dari beberapa metode penyelesaian sistem persamaan linier tersebut sehingga akan memudahkan dalam penggunaannya.

Berdasarkan hal inilah penulis termotivasi untuk meneliti efektivitas dari beberapa metode penyelesaian Sistem Persamaan Linier yang ada, terutama metode eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout,* dan metode matriks invers untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *n* persamaan dan *n* variabel. Penelitian ini juga akan mengaplikasikan penyelesaian Sistem Persamaan Linier pada bidang Ekonomi yaitu mengenai analisis *input-output.*

B. Batasan Masalah

Permasalahan pada penelitian ini adalah penyelesaian sistem persamaan linier. Untuk menghindari pembahasan yang terlalu melebar dan mengingat keterbatasan peneliti pada pengetahuan mengenai penyelesaian sistem persamaan linier, maka masalah dalam penelitian ini akan dibatasi pada sistem persamaan linier dengan n persamaan dan n variabel yang akan diselesaikan dengan metode eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout* dan metode matriks invers. Pada metode matriks invers pembahasan akan dikhususkan dengan menggunakan metode partisi matriks. Metode penyelesaian ini juga akan diaplikasikan pada bidang ekonomi khususnya dalam analisis *input -output*.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana perbandingan efektifitas metode Eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan matriks invers dalam menyelesaikan sistem persamaan linier?

2. Bagaimanakah aplikasi penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan matriks invers pada bidang ekonomi khususnya dalam analisis *input-output*?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penelitian ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan efektifitas metode eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout,* dan metode matriks invers dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan *n* persamaan dan *n* variabel (orde *n* x *n*).
2. Mengaplikasikan metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan matriks invers dalam analisis *input-output* pada bidang ekonomi.

E. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan mempunyai beberapa manfaat, antara lain:

1. Memberikan sumbangan pemikiran bagi dunia ilmu pengetahuan khususnya matematika dalam menyelesaikan sistem persamaan linier yang tepat, efektif, dan efisien.
2. Memberikan kontribusi ilmiah di dunia pendidikan khususnya pendidikan matematika dalam mempelajari teori aljabar matriks.
3. Mengetahui aplikasi matematika dalam bidang ekonomi terutama dalam analisis *input-output.*

F. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini, terdiri dari:

Bab I Pendahuluan. Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, pembatasan masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka dan Landasan Teori. Bab ini terdiri Dari tinjauan pustaka dan landasan teori. Tinjauan pustaka berisi tentang hasil-hasil penelitian yang relevan dengan penulisan skripsi ini, sedangkan landasan teori berisi tentang pengantar teori matriks (definisi matriks, jenis-jenis matriks, operasi pada matriks), pengantar sistem persamaan linier, dan pengantar analisis *input-output.*

Bab III Metode Penelitian. Berisi tentang jenis penelitian, teknik analisis data, skema langkah-langkah penyelesaian metode Eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan metode matriks invers,

Bab IV Hasil dan Pembahasan. Bab ini berisi algoritma metode Eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan matriks invers serta penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan metode Eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan matriks invers. Kemudian diaplikasikan dalam analisis *input-output*.

Bab V Penutup. Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian yang dilakukan dan saran-saran yang membangun yaitu komentar peneliti mengenai beberapa hal yang belum dapat dikerjakan oleh peneliti sendiri karena keterbatasan pengetahuan dan kemampuan peneliti.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA DAN LANDASAN TEORI

A. Tinjauan Pustaka

Skripsi Abdul Aziz Saefudin dengan judul “*Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dan Aplikasinya dalam Sains dan Islam*” telah membahas tentang efektivitas metode eliminasi Gauss dan faktorisasi *LU* dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Pada skripsi ini diperoleh suatu kesimpulan bahwa metode eliminasi Gauss lebih efektif (langkah penyelesaian dan jumlah operasi aritmatikanya lebih sedikit, serta kecepatan dan ketepatannya lebih baik) dibandingkan faktorisasi *LU*. Skripsi ini juga meneliti tentang aplikasi matriks dalam sains terutama pada rangkaian listrik. Selain itu, metode eliminasi Gauss dan faktorisasi *LU* dapat diaplikasikan dalam Islam terutama dalam penentuan bagi hasil keuntungan syirkah.[6]

Penelitian lain yang menunjang yaitu dilakukan oleh skripsi Muhammad Kholil yang berjudul “*Metode-Metode Pencarian Invers Matriks (Suatu Studi Banding)*” yang membahas perbandingan berbagai metode pencarian invers matriks untuk mencari yang paling efektif dan efisien. Pada skripsi ini diperoleh suatu kesimpulan bahwa untuk menyelesaikan invers matriks orde 2 x 2 lebih efektif dengan menggunakan metode Adjoint, sedangkan untuk orde 3 x 3 lebih efektif dengan

[6] Abdul Azis Saefudin, *Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dan Aplikasinya dalam Sains dan Islam* (Skripsi), (Yogyakarta: IAIN Sunan Kalijaga, 2004), hlm. 102

operasi baris elementer (OBE). Skripsi ini juga meneliti tentang aplikasi invers matriks dalam menghitung pembagian warisan menurut Islam.[7]

Skripsi Fitri Damayanti dengan judul "*Perbandingan antara Metode Gauss-Jordan dan Kaidah Cramer dalam penyelesaian Sistem Persamaan Linier serta Peninjauan terhadap Peranan Al Karaji di Bidang Aljabar"* yang membahas tentang perbandingan dua metode penyelesaian tersebut secara analitis dengan kesimpulan bahwa metode Gauss-Jordan lebih efisien (jumlah operasi aritmatikanya lebih sedikit) dibandingkan dengan kaidah Cramer dalam menyelesaikan sistem persamaan linier orde *n x n*. Penelitian ini juga membahas tentang kelebihan metode Gauss-Jordan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *m x n.*[8]

Hasil penelitian inilah yang memberikan motivasi kepada penulis untuk meneliti lebih lanjut tentang aljabar linier dan matriks dengan penelitian yang berjudul " Analisis Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Metode Matriks Invers dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi".

B. Landasan Teori

Landasan teori yang digunakan meliputi teori matriks, sistem persamaan linier, analisis *input-output* (bidang ekonomi). Penjelasannya dapat diperhatikan di bawah ini;

---

[7] M. Kholil, *Metode-Metode Pencarian Invers Matriks (Suatu Studi Banding)*(Skripsi), (Yogyakarta: IAIN Sunan Kalijaga, 2002), hlm. 128

[8] Fitri Damayanti, *Perbandingan antara Metode Gauss-Jordan dan Kaidah Cramer dalam Penyelesaian Sistem persamaan Linier serta Peninjauan Terhadap Peranan Al Karaji di Bidang Aljabar* (Skripsi), (Yogyakarta: IAIN Sunan Kalijaga, 2003), hlm.89

1. Pengantar Matriks

a. Definisi matriks

Agus Harjito, mendefinisikan matriks sebagai susunan dari angka koefisien variabel dari suatu persamaan yang disajikan secara teratur dalam baris dan kolom yang membentuk persegi panjang, serta termuat antara sepasang tanda kurung.[9] Menurut Edward T. Dowling, yang dimaksud dengan matriks adalah deretan bilangan, parameter atau variabel yang disusun segi empat.[10] G. Hadley juga mendefinisikan matriks sebagai susunan persegi panjang dari bilangan-bilangan yang diatur dalam baris dan kolom.[11]

Notasi suatu matriks biasanya digunakan sepasang tanda kurung biasa ( ), kurung siku-siku [ ], atau garis tegak ganda ‖ ‖. Tetapi yang sering digunakan biasanya adalah tanda kurung biasa. Setiap bilangan dalam matriks disebut unsur atau elemen dari matriks itu. Notasi untuk menyatakan suatu matriks biasanya digunakan huruf besar, sedangkan untuk unsurnya digunakan huruf kecil. Sebutan matriks biasanya dikaitkan dengan jumlah baris dan kolom yang membentuk matriks tersebut. Matriks yang terdiri atas *m* baris dan *n* kolom dinamakan matriks berukuran *m x n* atau sering disebut matriks berorde *m x n*, bilangan baris selalu mendahului kolom, misalnya:

---

[9] Agus harjito, *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*, (Yogyakarta: EKONISIA, 2000), hlm.231

[10] Edward T. Dowling, *Matematika untuk Ekonomi*, terj. Bambang Sugiarto, (Jakarta: Erlangga, 1980), hlm. 180

[11] G. Hadley, *Aljabar Linier*, ed. Revisi, terj. Naipospos & Noenik Sumartoyo, (Jakarta: Erlangga, 1992), hlm. 51

$$A = (a_{ij}) = [a_{ij}] \tag{2.1}$$

atau

$$A_{mxn} = (a_{ij})_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn} \tag{2.2}$$

Notasi unsur matriks seperti a_{ij} menunjukkan unsur matriks yang berada pada baris *i* dan kolom *j* pada matriks yang bersangkutan.

Bentuk umum suatu matriks *A* adalah;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3j} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Bilangan a_{ij} disebut elemen-elemen dari matriks, dimana *i* = 1,2,3,…..,*m* dan *j*=1,2,3,….,*n*.

b. Jenis – jenis Matriks

1) Matriks Bujur Sangkar

Setiap matriks yang memiliki jumlah baris dan jumlah kolom yang sama disebut sebagai matriks bujur sangkar. Jadi matriks A_{mxn} disebut matriks bujur sangkar jika *m* = *n*. Sebuah matriks bujur sangkar dengan *n* baris dan *n* kolom sering disebut matriks berordo-*n*. Jadi setiap matriks berordo-*n* sesuai dengan definisi adalah matriks bujur sangkar. Misalnya:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, a_{33} \Lambda\ , a_{nn}$ disebut elemen-elemen diagonal utama (diagonal dari kiri atas menuju kanan bawah).

Contoh 2.1 Matriks Bujur Sangkar

a. Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar berorde 2 dan elemen-elemen diagonal utamanya adalah 2 dan 5.

b. Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar berorde 3 dengan elemen-elemen diagonal utamanya adalah 2, 5, dan 4.

c. Matriks $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}$ adalah matriks berorde 4 dengan elemen-elemen diagonal utamanya adalah 2, 4, 3, dan 8.

2) Matriks Baris

Matriks baris adalah apabila dalam suatu matriks hanya terdiri atas 1 baris saja (m = 1).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Contoh 2.2 Matriks Baris

a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$ adalah matriks baris berorde 1 x 2.

b. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah matriks baris berorde 1 x 3.

c. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks baris berorde 1 x 4.

3) Matriks Kolom

Matriks kolom adalah apabila dalam suatu matriks hanya terdiri atas 1 kolom saja.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad (2.6)$$

Contoh 2.3 Matriks Kolom

a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah matriks kolom berorde 2 x 1.

b. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah matriks kolom berorde 3 x 1.

4) Matriks Simetris

Matriks simetris adalah matriks persegi yang elemen-elemenya pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* sama nilainya dengan elemen-elemen pada baris ke-*j* dan kolom ke-*i*, jika matriks $A = (a_{ij})_{mxn}$ adalah matriks simetris, maka $a_{ij} = a_{ji}$

Contoh 2.4 Matriks Simetris

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetris berordo 3 x 3.

5) Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah suatu matriks dimana semua elemen yang berada di bawah diagonal utamanya adalah nol, atau jika pada matriks $A = (a_{ij})_{nxn}$, elemen-elemen $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (2.7)$$

Contoh 2.5 Matriks Segitiga Atas

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6) Matriks Segitiga Bawah

Jika matriks $B = (b_{ij})_{nxn}$ elemen-elemen $b_{ij} = 0$ untuk $i < j$ atau elemen-elemen yang terletak di atas diagonal utamanya semuanya nol, maka matriks ini disebut matriks segitiga bawah. Jika B adalah matriks segitiga bawah, maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Contoh 2.6 Matriks Segitiga Bawah

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

7) Matriks Diagonal

Matriks diagonal didefinisikan sebagai suatu matriks bujur sangkar dimana semua elemennya sama dengan nol kecuali elemen-elemen diagonal utamanya. Jadi jika matriks persegi $C = (c_{ij})$ yang berorde *n*, elemen-elemen $c_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$, maka C disebut matriks diagonal.

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Contoh 2.7 Matriks Diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

8) Matriks Skalar

Jika dalam matriks diagonal *C*, elemen-elemen diagonal utama semuanya sama, yaitu $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{44} = ... = c_{nn} = k$, maka matriks ini disebut matriks skalar. Jadi matriks skalar adalah:

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Contoh 2.8 Matriks Skalar

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks skalar orde 3

b. $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks skalar orde 4

9) Matriks Identitas

Matriks identitas (I) adalah suatu matriks bujur sangkar yang nilainya 1 untuk setiap elemen pada diagonal utama dari kiri atau ke kanan dan nol disetiap tempat yang lain.[12] Matriks identitas serupa dengan bilangan 1 dalam aljabar karena perkalian suatu matriks dengan matriks identitas tidak membawa perubahan terhadap matriks asal (*AI* = *IA*= *A*). Perkalian matriks identitas dengan dirinya sendiri menjadikan matriks identitas tidak berubah; $IxI = (I)^2 = I$.

Contoh 2.9 Matriks Identitas

a. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas berorde 2.

b. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah matriks identitas berorde 3.

10) Matriks Nol

Matriks nol adalah sebuah matriks yang semua elemen di dalamnya adalah nol. Matriks ini tidak harus berbentuk persegi tetapi dapat berdimensi sembarang.

Bentuk matriks nol adalah;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.11)$$

[12] Edward T. Dowling, *Matematika untuk Ekonomi*, terj. Bambang Sugiarto (Jakarta: Erlangga, 1980), hlm. 185

Penjumlahan atau pengurangan matriks nol tidak membawa perubahan terhadap matriks asalnya, sedangkan perkalian dengan matriks nol menghasilkan suatu matriks nol.

11) Matriks Eselon

Matriks *A* disebut matriks eselon, atau dikatakan berbentuk eselon jika memenuhi dua syarat berikut:[13]

1. Semua baris nol, jika ada, terletak di bagian bawah matriks.
2. Setiap entri bukan-nol utama pada suatu baris berada di sebelah kanan entri bukan-nol utama pada baris sebelumnya.

Yaitu, $A = (a_{ij})$ adalah matriks eselon jika terdapat entri-entri bukan-nol

$$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r} \qquad \text{dimana } j_i < j_2 < \ldots < j_r$$

dengan sifat

$$a_{ij} = 0 \text{ untuk } \begin{cases} (i) & i \le r, \quad j \le j_i \\ (ii) & i > r, \end{cases}$$

Entri-entri $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r}$, yang merupakan elemen-elemen bukan-nol utama pada masing-masing barisnya, disebut pivot-pivot dari matriks eselon.

Contoh 2.10 Matriks Eselon

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ elemen pivotnya adalah 2, 1, 3

---

[13] Seymour lipschutz dan Marc Lars Lipson, *Teori dan Soal Aljabar Linear*, ed.ketiga, (Jakarta: Erlangga, 2002), hlm.62

12) Matriks Eselon Tereduksi

Suatu matriks disebut sebagai matriks eselon tereduksi apabila setiap elemen pivotnya bernilai satu dan setiap elemen pivot merupakan satu-satunya elemen tidak nol pada kolom tersebut.[14]

Contoh 2.11 Matriks Eselon Tereduksi

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Operasi pada Matriks

1) Penjumlahan pada Matriks

Jika $A = (a_{ij})_{mxn}$ *dan* $B = (b_{ij})_{mxn}$, matriks berukuran sama, maka $A+B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})_{mxn}$ dimana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j atau $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn}$.

Contoh 2.12 Penjumlahan Matriks

[14] Wiwik Anggraeni, *Aljabar Linear dilengkapi dengan Program Matlab*, (Yogyakarta: Graha Ilmu, 2006), hlm.30

jika $A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix}_{3x3}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$ maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8+1 & 9+3 & 7+6 \\ 3+5 & 6+4 & 2+3 \\ 4+7 & 5+9 & 10+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 8 & 10 & 5 \\ 11 & 14 & 12 \end{bmatrix}$$

2) Pengurangan pada Matriks

Jika $A = (a_{ij})_{mxn}$ $dan\ B = (b_{ij})_{mxn}$, matriks berukuran sama, maka *A*-*B* adalah suatu matriks $C = (c_{ij})_{mxn}$ dimana $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, untuk setiap *i* dan *j* atau $A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{mxn}$.

Contoh 2.13 Pengurangan Matriks

$$A - B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 7 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-1 & 9-3 & 7-6 \\ 3-5 & 6-4 & 2-3 \\ 4-7 & 5-9 & 10-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

3) Perkalian Matriks

Suatu matriks *A* dapat dikalikan dengan matriks *B*, bila jumlah kolom matriks *A* sama dengan jumlah baris dari matriks *B*. Jadi bila *A* adalah matriks $m \times n$ dan *B* matriks $p \times q$, maka A dapat dikalikan dengan *B* jika dan hanya jika *n* = *p*. Hasil perkalian matriks *AB* yaitu matriks *C* baru adalah matriks $m \times q$, dimana elemen *C* dari baris ke-*i* dan kolom ke-*j* diperoleh dengan rumus;[15]

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots\ldots + a_{in}b_{nj}$$

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n=p} a_{it}b_{tj}$$

dimana

$i = 1, 2, \ldots. m$
$j = 1, 2, \ldots, q$

$$AB = C$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1t} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2t} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{it} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mt} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{iq} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \ldots & b_{tj} & \ldots & b_{tq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nj} & \ldots & b_{nq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2j} & \ldots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \ldots & c_{ij} & \ldots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{mj} & \ldots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian *AB* ≠ *BA*. Pada matriks *AB*, matriks *A* kita sebut matriks pertama dan *B* disebut

---

[15] Jean E. Webber, *Analisis*…, hlm.173

matriks kedua. Perkalian antara matriks pertama dengan matriks kedua memberikan hasil yang berbeda.

Contoh 2.14 Perkalian Matriks

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ karena banyaknya kolom matriks *A* sama dengan banyaknya baris matriks *B* yaitu 3 maka

$$A \times B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1 \times 3 + 3 \times 1 + 4 \times 0 = 6$$

atau

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times 3 + 3 \times 1 + 4 \times 0 = 6$$

d. Operasi Elementer

Ada operasi-operasi sederhana yang dapat dibangun pada baris dan kolom suatu matriks tanpa mengubah ranknya. Operasi-operasi sederhana tersebut biasa disebut dengan operasi baris elementer dan operasi kolom elementer.[16] Operasi elementer atau transformasi elementer, dapat dilakukan menurut salah satu cara berikut:[17]

1) Menukar letak baris/kolom ke-*i* dengan baris/kolom ke-*j*. Transformasi baris dinotasikan dengan H_{ij}, yang berarti baris ke-*i* ditukar dengan baris ke-*j*,

---

[16] G. Hadley, *Aljabar Linear*, (Jakarta: Erlangga, 1983), hlm.123.
[17] Daru Unoningsih, *Aljabar Vektor dan Matriks*, (Yogyakarta: FMIPA UGM, 1990), hlm. 41.

sedangkan untuk transformasi kolom dinotasikan dengan K_{ij} , yang berarti kolom ke-*i* ditukar dengan kolom ke-*j*.

2) Mengalikan setiap elemen baris/kolom ke-*i* dengan suatu bilangan k ≠ 0, dinotasikan dengan $H_i(k)$, artinya setiap elemen baris ke-*i* dikalikan dengan bilangan k ≠ 0, sedangkan untuk kolom dinotasikan dengan $K_i(k)$.

3) Menambah setiap elemen baris/kolom ke-*i* dengan *k* kali elemen baris/kolom ke-*j* (*k* bilangan sembarang). Yang ditransformasikan dengan $H_{ij}(k)$ dan $K_{ij}(k)$.

Contoh 2.15 Operasi Elementer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

maka $H_{13}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $K_{13}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

$H_{1(2)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ dan $K_{1(2)}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 8 & 5 & 6 \\ 14 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$H_{31(1)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$, $H_{31(1)}(A)$ artinya baris pertama dari matriks *A* dikalikan 1 kemudian ditambahkan pada baris ke-3

$$K_{31(1)}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 16 \end{bmatrix}, K_{31(1)}(A)$$ artinya kolom pertama dari matriks *A* dikalikan dengan 1 kemudian ditambahkan pada kolom ke-3.

Perlakuan operasi elementer baris dan kolom akan menghasilkan matriks baru. Matriks baru tersebut disebut dengan matriks *ekuivalent*[18], yang *ekuivalen* disimbolkan dengan ≈.

Contoh 2.16 Matriks ekuivalen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \overset{H_{21(1)}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = B$$

Dari contoh 2.16, matriks *A* *ekuivalent* dengan matriks *B* yang dapat ditulis dengan

$$A \approx B$$

Dapat dilihat pada gambar 2.1, di bawah ini:[19]

sistem semula $\xrightarrow{\text{(OBE)}}$ sistem ekivalen (matriks segitiga atas) $\xrightarrow{\text{(mudah)}}$ solusi

Gambar 2.1 Skema Sistem Ekivalen

[18] A. E. Labarre, *Elementary Mathematical Analysis*, (London: Addison-Wesley Publishing Company, 1960), hlm. 557

[19] Charles G. Cullen, *Aljabar Linier dengan Penerapannya*, terj. Bambang Sumantri, (Jakarta: Gramedia Pustaka Utama, 1993), hlm.20

e. Transpose Matriks

Jika terdapat suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran *m* x *n* maka transpose dari *A* adalah A^T berukuran *n* x *m* dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom sehingga baris *i* dari *A* menjadi kolom *i* dari matriks A^T. Dengan kata lain $A^T = (a_{ji})_{mxn}$.[20]

Contoh 2.17 Transpose Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Beberapa Sifat Transpose

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

Bukti:

Misalnya $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ maka

$$(A+B)^T = (a_{ij} + b_{ij})^T = (c_{ij})^T = (c_{ji}) = (a_{ji} + b_{ji}) = A^T + B^T$$

2) $(AB)^T = B^T A^T$

Bukti:

Misalkan $A = (a_{ik})$ dan $B = (b_{kj})$ maka entri *ij* dari *AB* adalah

[20] G. Hadley, *Aljabar Linier*, ed. Revisi, terj. Naipospos & Noenik Sumartoyo, (Jakarta: Erlangga, 1992), hlm. 65

$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$. Ini adalah entri *ji* (urutan terbalik) dari $(AB)^T$. Kini kolom *j* dari *B* menjadi baris *j* dari B^T, dan baris *i* dari *A* menjadi kolom *i* dari A^T. Maka entri *ij* dari $B^T A^T$ adalah

$$\lfloor b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj} \rfloor [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}] = b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{mj}a_{im}$$

Jadi $(AB)^T = B^T A^T$, karena entri-entri yang bersesuaian sama.

3) $(A^T)^T = A$

Bukti:

Misalnya $A = (a_{ij})$ maka $(a_{ji})^T = a_{ij} = A$

4) $k(A^T) = (kA)^T$**,** bila *k* suatu skalar

Bukti:

$A = (a_{ij})$ maka $k(A^T) = k(a_{ji}) = (ka_{ji}) = (ka_{ij})^T = (kA)^T$

f. Determinan

Determinan adalah sebuah skalar (angka) yang didefinisikan secara unik dari suatu matriks bujur sangkar, yang diperoleh dari elemen-elemen matriks tersebut dengan operasi tertentu.[21] Lambangnya ditulis dengan $|A|$ atau det (*A*).

Misalnya:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

[21] Jean. E. Weber, *Analisis*….., hlm. 192

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Secara umum determinan matriks *A* orde *n* dapat ditulis sebagai berikut:

$$|A| = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

dengan $|A|$ = determinan matriks *A*

a_{ij} = elemen baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari determinan matriks *A*

M_{ij} = minor dari unsur a_{ij} yang diperoleh dengan jalan menghilangkan baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari determinan (*A*)

A_{ij} = kofaktor dari unsur a_{ij}

Contoh determinan:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 2 \times 5 = -13$$

Sifat-sifat determinan meliputi:

1) Jika *A* memuat satu baris atau satu kolom yang semuanya nol, maka det (A) adalah nol

   Bukti:

Setiap hasil kali dari rumus $\left|A\right| = \sum_{i,j=1}^{n} \left(-1\right)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ akan mengandung elemen 0, jadi masing-masing hasil kali mempunyai nilai 0, sehingga jumlahnya = 0.

Jadi terbukti det(A) = 0

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left(2 \cdot 0 \cdot 0\right) + \left(-1 \cdot 0 \cdot 4\right) + \left(0 \cdot 3 \cdot -2\right) - \left(4 \cdot 0 \cdot 0\right) - \left(-2 \cdot 0 \cdot 0\right) - \left(0 \cdot 3 \cdot -1\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2) $\det\left(A\right) = \det\left(A^T\right)$

Bukti:

a) Setiap hasil kali dari rumus determinant, yaitu: $\left|A\right| = \sum_{i,j=1}^{n} \left(-1\right)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ mempunyai satu elemen dari setiap baris dan kolom matriks *A*, ini berarti bahwa hasil kali itu juga mempunyai satu elemen dari setiap baris dan kolom matriks A^T, sebab pada dasarnya elemen-elemen dari A^T juga merupakan elemen-elemen dari *A*, sehingga jumlah kalinya akan sama.

b) Setiap hasil kali dari rumus $\det(A)$, juga merupakan hasil kali dari rumus $\det(A^T)$, hanya tandanya yang mungkin berbeda.

c) Jumlah pasangan negatif dan juga jumlah invers dari setiap hasil kali untuk $\det(A)$ sama dengan $\det(A^T)$. Jadi terbukti bahwa $\det(A) = \det(A^T)$

Contoh:

misal $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ maka $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1\cdot 1\cdot 2) + (2\cdot 2\cdot 4) + (-2\cdot 3\cdot 5) - (4\cdot 1\cdot -2) - (5\cdot 2\cdot -1) - (2\cdot 3\cdot 2) \\ &= -2 + 16 - 30 + 8 + 10 - 12 = -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det\left(A^T\right) &= (-1\cdot 1\cdot 2) + (3\cdot 5\cdot -2) + (4\cdot 2\cdot 2) - (-2\cdot 1\cdot 4) - (2\cdot 5\cdot -1) - (2\cdot 2\cdot 3) \\ &= -2 - 30 + 16 + 8 + 10 - 12 = -10 \end{aligned}$$

3) Harga determinan tidak berubah apabila baris atau kolom ditambahkan dengan *k* baris ke-*i* atau kolom ke-*j*.

Bukti:

Untuk membuktikan ini, dipergunakan matriks *A* yang berorde 3×3.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Misalnya baris pertama ditambahkan *k* kali baris kedua, jadi baris pertama menjadi $(a_{11} + ka_{21} \quad a_{12} + ka_{22} \quad a_{13} + ka_{23})$;

Misalkan selanjutnya *B* merupakan matriks *A* dimana baris pertama + *k* kali baris kedua, jadi

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \text{ menjadi}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} \\ &= (a_{11} + ka_{21})a_{22}a_{33} + (a_{12} + ka_{22})a_{23}a_{31} + (a_{13} + ka_{23})a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{13} + ka_{23})a_{22}a_{31} - (a_{11} + ka_{21})a_{23}a_{32} - (a_{12} + ka_{22})a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + ka_{21}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + ka_{22}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + ka_{23}a_{21}a_{23} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - ka_{23}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - ka_{21}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - ka_{22}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + k\left[a_{21}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{23} - a_{23}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{23}a_{32} - a_{22}a_{21}a_{33}\right] \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

Jadi det(A) = det(B)

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \overset{H_{12(2)}}{\approx} \begin{bmatrix} 2+2(3) & 4+2(2) & 6+2(3) \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 12 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} = B$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= 2.2.9 + 4.3.1 + 6.3.4 - 6.2.1 - 2.3.4 - 4.3.9 \\ &= 36 + 12 + 72 - 12 - 24 - 108 = -24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} \\ &= 8.2.9 + 8.3.1 + 12.3.4 - 12.2.1 - 8.3.4 - 8.3.9 \\ &= -24 \end{aligned}$$

Jadi det(A) = det(B)

g. Minor dan Kofaktor

Pandang matriks berukuran (nxn), $A = (A_{ij})$ dan minor $|M_{ij}|$ didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang dibentuk dengan menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks tersebut.[22] Misalkan A suatu matriks berordo m x n. Apabila matriks ini dipilih baris sebanyak s (dimana $s < m$), dan kolom sebanyak t (dimana $t < n$), maka elemen-elemen dari s baris dan t kolom ini disebut minor matriks dari matriks A.

Contoh 2.18 Minor

1. $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ jika baris ke-3 dan kolom ke-2 dihilangkan maka akan menjadi $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

2. $B = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ jika baris ke-2 dan kolom ke-4 dihilangkan maka menjadi

$$M_{24} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

[22] Edward T. Dowling, *Matematika untuk Ekonomi*, terj. Bambang Sugiarto, (Jakarta: Erlangga, 1980), hlm. 208

Kofaktor A_{ij} dari elemen a_{ij} dari sembarang matriks bujur sangkar *A* didefinisikan sebagai $(-1)^{i+j}$ kali determinan matriks bagian yang diperoleh dari *A* dengan mencoret baris *i* dan kolom *j*.[23]

Contoh 2.19 Kofaktor

Dari soal 2.18 poin 1, dapat kita tentukan kofaktornya, yaitu

3. $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ jika baris ke-3 dan kolom ke-2 dihilangkan maka akan menjadi $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, dan $K_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-18) = 18$

h. Rank Matriks

Apabila matriks *A* paling sedikit mengandung satu matriks minor yang determinannya tidak sama dengan nol dan ternyata terdiri dari *r* baris, dan bila matriks minornya saja terdiri dari (*r* + 1) baris yang determinannya menjadi nol, maka matriks *A* dikatakan mempunyai rank (pangkat) sebesar *r*, dan diberi simbol rank (*A*) = *r*(*A*) = *r*.[24]

Bila matriks A berorde *n*, dengan $|A| \neq 0$, maka matriks *A* mempunyai rank (pangkat) penuh atau *r* = *n*. Jika $|A| = 0$, matriks *A* berpangkat tak penuh. Jadi yang dimaksud dengan rank adalah orde atau dimensi submatriks terbesar

[23] G. Hadley, *Aljabar Linier………..*,hlm. 78
[24] J. Supranto, *Pengantar……..*, hlm.109

yang determinannya tidak nol, dan bukan nilai dari determinan matriks itu sendiri.

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ mempunyai rank 2 karena $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ mempunyai rank 1 karena $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

   tetapi ada determinan berordo 1, misalnya $|2|$, yang tidak nol.

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

   det (C) = 0, salah satu determinan matriksnya/minor matriksnya yang berordo 2, misalnya $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, sehingga r (C) = 2

2. Sistem Persamaan Linier

a. Pengertian Sistem Persamaan Linier

Persamaan linier didefinisikan sebagai suatu persamaan dengan n peubah $x_1, x_2, \Lambda\ \Lambda\ , x_n$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \Lambda\ \Lambda\ + a_nx_n = b \qquad (2.12)$$

dimana $a_1, a_2, \Lambda\ \Lambda\ , a_n$ dan b adalah konstanta riil.

Adapun sistem persaman linier dinyatakan sebagai himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$.[25] Pemecahan masing-masing persamaan dari sistem tersebut dapat dinyatakan dalam sebuah urutan bilangan-bilangan $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ jika $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$.

Suatu sistem persamaan dikatakan tidak konsisten (*inconsistent*), jika persamaan itu tidak mempunyai pemecahan. Namun, apabila sistem persamaan tersebut mempunyai setidak-tidaknya satu pemecahan, maka sistem persamaan tersebut dinamakan konsisten (*consistent*).[26] Jadi, apabila terdapat persamaan linier $Ax = B$, dikatakan tidak mempunyai pemecahan jika $A = 0$, tetapi $B \neq 0$, sedangkan dikatakan mempunyai pemecahan jika dan hanya jika determinan dari koefisien-koefisiennya bukan-nol.

Sistem persamaan linier simultan[27] terdiri dari *n* persamaan dan *n* variabel, yang ditulis dengan:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Pers. (2.13) dapat dinyatakan dengan perkalian matriks sebagai berikut:

---

[25] Howard Anton, *Aljabar Linear Elementer*, ed. Kelima, terj. Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, (Jakarta: Erlangga, 1987), hlm. 1

[26] *Ibid*, hlm. 66

[27] Sistem persamaan linier disebut juga dengan persamaan linier simultan. Simultan maksudnya adalah serempak. Lihat G. Hadley, *Aljabar*…….., hlm. 137.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (2.14)$$

sehingga dapat diringkas dengan suatu persamaan:

$$Ax = B \qquad (2.15)$$

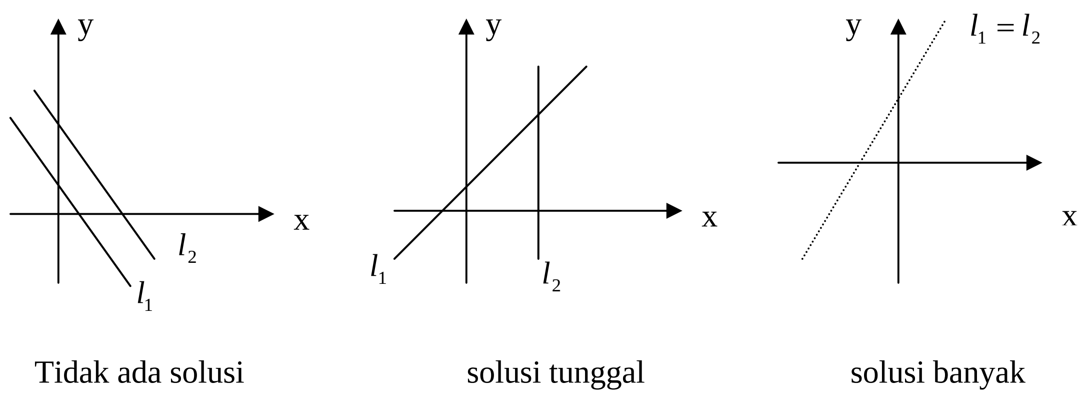
dimana *A* yang berukuran *n* x *n* dan disebut matriks koefisien dari susunan persamaan linier simultan di atas, sedangkan *x* dan *B* adalah unsur-unsur kolom variabel dan konstanta.

Apabila dalam sistem persamaan linier simultan tersebut $B = 0$, maka disebut dengan sistem persamaan linier homogen, sedangkan bila $B \neq 0$ maka disebut non homogen.[28]

Penyelesaian sistem dengan 2 persamaan dan 2 variabel dapat digambarkan sebagai pencarian titik potong dari kedua garis tersebut. Karena penyelesaiannya setara (ekuivalen) dengan pencarian titik potong garis lurus, maka sistem yang demikian itu mempunyai tiga kemungkinan:[29]

1) Tidak ada pemecahan, jika kedua garis sejajar.
2) Tepat satu pemecahan, jika kedua garis berpotongan.
3) Tak terhingga banyaknya pemecahan, jika kedua garis berimpit.

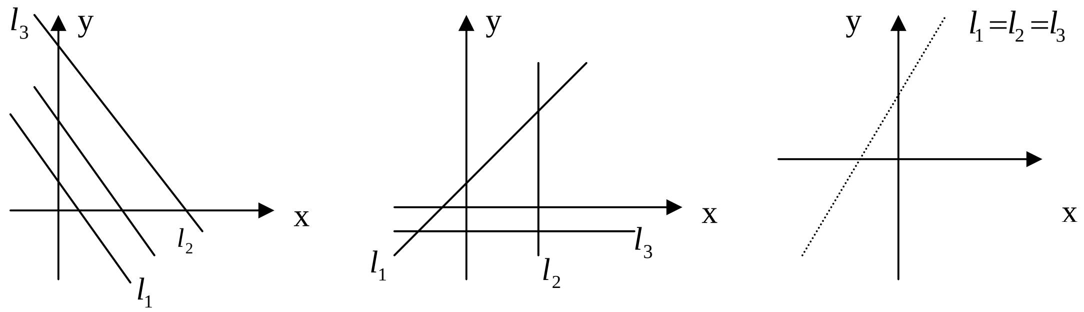
[28] Daru Unoningsih, *Aljabar*……., hlm.61
[29] Howard Anton, *Aljabar Linier Elementer*,…………, hlm.3



Gambar 2.2. Kemungkinan-kemungkinan solusi sistem persamaan linier 2 persamaan dan 2 variabel

Untuk *n* persamaan dalam 2 variabel (n > 2), ketiga kemungkinan di atas dapat dijumpai sebagaimana diilustrasikan untuk kasus *n* = 3 dalam gambar tersebut. Dalam kasus pertama garis-garis itu tidak harus sejajar. Untuk *n* > 2, kemungkinan pertama (tidak ada solusi) adalah yang paling mungkin dijumpai, setidaknya jika garis-garis itu diambil secara acak. Jika persamaan-persamaan itu menerangkan suatu sistem fisik, maka kemungkinan besar solusinya akan ada.[30]

[30] Bernard Kolman, *Elementary Linear Algebra*, six Edition, (New Jersey: Prentice Hall, 1966), pg. 4, lihat juga Bernard Kolman, *Introductory Linear Algebra with Aplication* , Third printing, (California: Dickonson Piblising Company, 1968), pg. 8



Tidak ada solusi — Ada solusi — Solusi banyak

Gambar 2.3. Kemungkinan-kemungkinan solusi system persamaan linier 3 persamaan dalam 2 variabel

Secara umum jika lebih banyak persamaan daripada peubahnya, maka kemungkinan besar solusinya tidak ada.

Tafsiran geometrik bagi masalah pemecahan *n* persamaan dalam 3 persamaan dalam 3 variabel; yaitu pencarian titik sekutu bagi beberapa bidang datar. Jika *n* = 2 maka kedua bidang itu sejajar atau berpotongan pada sebuah garis lurus. Dengan demikian solusinya tidak ada atau ada takhingga banyaknya solusi. Solusi tunggal tidak mungkin diperoleh bila persamaannya lebih sedikit variabelnya.[31]

Jika *n* = 3, maka ada 3 kemungkinan:

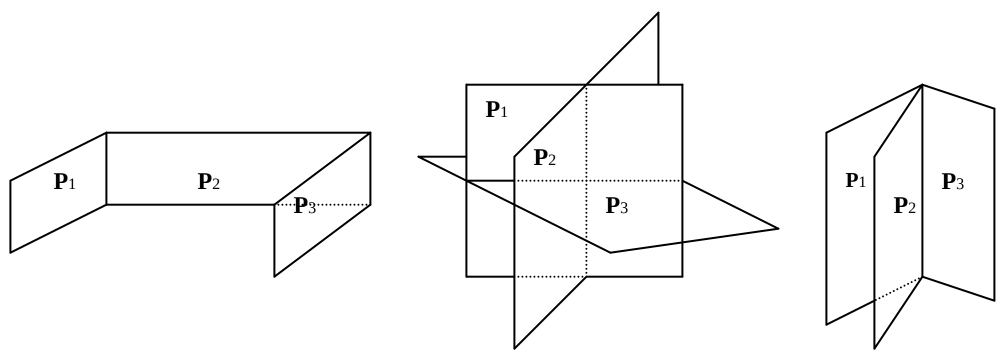
1) Tidak ada titik potong, artinya bidang yang ketiga sejajar dengan garis potong dua bidang pertama.

[31] *Ibid*, hlm. 5 lihat Bretscher, *Linear Algebra With Aplications*, (New Jersey: Prentice Hall, 1997), pg. 234

2) Ketiga bidang bertemu disebuah titik tunggal (garis potong dua bidang pertama menembus bidang yang ketiga).

3) Terdapat tak terhingga banyaknya solusi, disini ketiga bidang itu setidaknya mempunyai satu garis sekutu.

Gambar 2.4 di bawah ini, mengilustrasikan 3 kemungkinan tersebut. Jika n > 3, maka tiga kemungkinan yang sama juga dijumpai, namun yang paling penting mungkin (kalau bidang-bidang itu diambil secara acak) adalah solusinya tidak ada.



Tidak ada solusi | solusi tunggal | solusi banyak

Gambar 2.4 Kemungkinan-kemungkinan solusi sistem persamaan linier 3 persamaan dalam 3 variabel

b. Metode Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan beberapa metode yang secara garis besar dapat dibagi atas dua kategori utama, yaitu metode eksak atau metode langsung dan metode pendekatan atau metode iterasi.[32] Metode

[32] Soepranto dan Boen, *Analisa struktur dengan Metode Matrix*, cet. Ketiga (Jakarta: UII Press, 1984), hlm.36.

iterasi biasanya dilakukan dengan menggunakan bantuan komputer, misalnya bantuan gradien sekawan (*conjugate gradient method*), metode iterasi Gauss atau Jacobi, metode iterasi Gauss-Seidel, dan metode relaxasi, sedangkan metode langsung (eksak) dapat dilakukan secara analitis, misalnya inversi matriks, metode cramer, dan faktorisasi *LU*.

Berdasarkan batasan masalah di atas, metode yang akan digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier ini adalah metode langsung, yaitu metode eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan metode matriks invers. Pada penelitian ini akan dijelaskan bagaimana ketiga metode itu bekerja dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan n persamaan dan n variabel.

1) Metode Eliminasi Gauss

Metode ini merupakan metode operasi baris juga untuk mencapai suatu *upper triangular matrix*, untuk selanjutnya diselesaikan dengan cara eliminasi. Prinsip dari metode ini adalah dengan memanipulasi persamaan-persamaan yang ada dengan menghilangkan salah satu variabel dari persamaan–persamaan tersebut sampai akhirnya hanya tertinggal satu persamaan dengan satu variabel.[33]

Metode eliminasi Gauss adalah proses eliminasi dengan menggunakan operasi elementer (eselon) baris atau mengubah sistem linier menjadi

[33] Agus Setiawan, *Pengantar Metode Numerik*, (Yogyakarta: Andi, 2000), hlm.81

matriks berbentuk segitiga, kemudian dipecahkan dengan subtitusi langkah mundur.[34]

Suatu matriks dikatakan memiliki bentuk eselon baris jika:

(a) Entri bukan nol pertama dalam setiap baris adalah 1.

(b) Jika baris k tidak seluruhnya mengandung nol, maka banyaknya entri nol dibagian muka dari baris k+1 lebih besar dari banyaknya entri nol di bagian muka dari baris k.

(c) Jika terdapat baris-baris yang semuanya nol, maka baris-baris ini berada di bawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol.[35]

Proses penyelesaian metode ini (*algoritmanya*) terdiri dari n-1 langkah. Pada langkah pertama, elemen poros dipilih dari entri-entri bukan nol dikolom pertama dari matriks. Baris yang mengandung elemen poros tersebut baris poros (*pivot row*). Kita pertukarkan baris-baris (jika diperlukan) sehingga baris poros menjadi baris pertama yang baru. Kemudian kelipatan dari baris poros dikurangkan dari setiap n-1 baris selebihnya sehingga diperoleh 0 pada posisi (2,1),……,(n,1). Pada langkah kedua, elemen poros dipilih dari entri-entri bukan nol di kolom 2, baris 2, sampai baris n dari matriks. Kemudian baris yang mengandung poros dipertukarkan dengan baris kedua dari matriks dan digunakan sebagai baris

---

[34] Erwin Kreyzig, *Matematika Teknik Lanjutan*, Ed. Keenam, Buku kedua, terj, Bambang Soemantri, (Jakarta: Gramedia Pustaka Utama, 1993), hlm.328.

[35] Steven J. Leon, *Aljabar linier dan Aplikasinya*, ed. Kelima. Terj. Alit Bondan, (Jakarta: Erlangga, 2001), hlm.14.

poros yang baru. Kemudian kelipatan dari baris poros dikurangkan dari *n*-2 baris sisanya sehingga mengeliminasi semua entri di bawah poros kolom kedua. Prosedur yang sama diulangi untuk kolom–kolom 3 sampai *n*-1. Perlu diperhatikan bahwa pada langkah kedua baris yang pertama dan kedua kolom yang pertama tetap tidak berubah dan seterusnya. Pada setiap langkah, dimensi keseluruhan dari sistem secara efektif dikurangi satu.

Bentuk akhir dari persamaan / matriks sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ x_2 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n &= b_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + \dots + a_{(n-1)n}x_n &= b_{(n-1)} \\ a_n x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.16}$$

2) Dekomposisi Crout

Suatu matriks $A_{(n\times n)}$ tak singular dapat difaktorkan menjadi hasil kali suatu matriks segitiga atas *U* dan matriks segitiga bawah *L*. Agar matriks-matriks *L* dan *U* tunggal maka elemen-elemen diagonalnya tidak boleh sebarang.

Dekomposisi Crout merupakan suatu algoritma yang efisien untuk memecah [*A*] atas [*L*] dan [*U*], sehingga dapat ditulis [*L*][*U*] = [*A*].

Untuk matriks (*n* x *n*) dari persamaan [*L*][*U*] = [*A*] dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{14} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{24} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(2.17)

Metode ini dapat diturunkan dengan menggunakan perkalian matriks untuk menghitung ruas kiri persamaan (2.17) kemudian menyamakan hasilnya dengan ruas kanan.

Dengan mengingat kembali aturan matriks, langkah pertama adalah mengalikan baris pertama [L] dengan kolom pertama [U]. Langkah ini memberikan hasil:

$l_{11} = a_{11}$, $l_{21} = a_{21}$, $l_{31} = a_{31}$ …….. $l_{n1} = a_{n1}$

Dalam bentuk umum dapat dinyatakan bahwa:

$$l_{i1} = a_{i1} \quad untuk\ i = 1,2,\ldots,n$$

Secara lengkap perhitungan dari persamaan (2.17) yaitu:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{14} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{24} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{13} & \cdots & l_{11}u_{1n} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23} & \cdots & l_{21}u_{1n}+l_{22}u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n1}u_{12}+l_{n2} & l_{n1}u_{13}+l_{n2}u_{23}+l_{n3} & \cdots & l_{n1}u_{1n}+\cdots+l_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan tersebut diperoleh:

$l_{11} = a_{11}$, dengan $a_{11} \neq 0$; $l_{21} = a_{21}$;...........; $l_{n1} = a_{n1}$

keterangan: jika $a_{11} = 0$ maka harus dilakukan operasi baris elementer (OBE) sehingga didapatkan $a_{11} \neq 0$.

Sehingga diperoleh rumus umum:

$l_{i1} = a_{i1}$; untuk $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$l_{11}u_{12} = a_{12} \quad \Leftrightarrow \quad u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$l_{11}u_{13} = a_{13} \quad \Leftrightarrow \quad u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$l_{11}u_{1n} = a_{1n} \quad \Leftrightarrow \quad u_{1n} = \frac{a_{1n}}{l_{11}}$$

Diperoleh rumus umum:

$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{11}}$, untuk i = 1, 2, 3,…….,n

$$\begin{aligned} l_{21}u_{12} + l_{22} &= a_{22} \quad \Leftrightarrow \quad l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{31}u_{12} + l_{32} &= a_{32} \quad \Leftrightarrow \quad l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ l_{n1}u_{12} + l_{n2} &= a_{n2} \quad \Leftrightarrow \quad l_{n2} = a_{n2} - l_{n1}u_{12} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Selanjutnya diperoleh rumus umum:

$$l_{i2} = a_{i2} - l_{i2}u_{i2}, \qquad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \ldots, n \tag{2.19}$$

$$l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} = a_{23} \quad \Leftrightarrow \quad u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}$$

$$l_{21}u_{14} + l_{22}u_{24} = a_{24} \quad \Leftrightarrow \quad u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21}u_{14}}{l_{22}}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$l_{21}u_{1n} + l_{22}u_{2n} = a_{2n} \quad \Leftrightarrow \quad u_{2n} = \frac{a_{2n} - l_{22}u_{1n}}{l_{22}}$$

Sehingga diperoleh rumus umum:

$$u_{2j} = \frac{a_{2j} - l_{21}u_{1j}}{l_{22}}, \quad \text{untuk } j = 1, 2, 3, \ldots, n$$

Proses dapat diulang untuk menghitung elemen-elemen yang lain. Rumus-rumus yang diperoleh adalah:

$$l_{i3} = a_{i3} - l_{i1}u_{13} - l_{i2}u_{23}, \text{ untuk } i = 3, 4, 5, \ldots, n \tag{2.20}$$

$$u_{3j} = a_{3j} - l_{31}u_{1j} - l_{32}u_{2j}, \text{ untuk } j = 4, 5, 6, \ldots, n \tag{2.21}$$

$$l_{i4} = a_{i4} - l_{i1}u_{14} - l_{i2}u_{24} - l_{i3}u_{34}, \text{ untuk } i = 4, 5, \ldots, n \tag{2.22}$$

Dari hasil-hasil di atas maka dapat diberikan rumusan umum metode dekomposisi crout, yaitu sebagai berikut:

$$l_{i1} = a_{i1} \qquad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_{11}} \qquad \text{untuk } j = 2, 3, 4, \ldots, n$$

Untuk $j = 2, 3, 4, \ldots, n-1$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \qquad \text{untuk } i = j, j+1, \ldots, n$$

$$u_{jk} = \frac{a_{jk} - \sum_{i-1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{ik}}{l_{jj}} \quad \text{untuk } k = j+1,\ j+2$$

Dan

$$l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} \cdot u_{kn}$$

3) Metode Matriks Invers

Matriks invers adalah suatu matriks yang apabila invers matriks tersebut dikalikan dengan matriks aslinya akan menghasilkan matriks satuan. Metode matriks invers ini hanya bisa dilakukan pada matriks bujur sangkar yang *non-singular* (matriks yang determinannya tidak sama dengan nol). Jika A merupakan matriks bujur sangkar, maka invers dari matriks *A* adalah A^{-1}, dan $AA^{-1} = I$. Jika diberikan matriks-matriks A_{nxn} dan dapat ditemukan B_{nxn} sehingga *AB* = *BA* = *I*, maka *B* dikatakan invers matriks dari *A* atau $B = A^{-1}$ dan *A* dikatakan invers dari *B* atau $A = B^{-1}$.

Berdasarkan batasan masalah di atas, penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan metode matriks invers ini akan diselesaikan dengan cara partisi.

Matriks yang berukuran besar, kadang-kadang lebih mudah bila dikerjakan secara bertahap dengan membagi matriks tersebut menjadi sub matriks (membuat sekatan / partisi).

Sebuah submatriks (matriks bagian) dan matriks A adalah suatu matriks yang diperoleh dari A dengan menghapus beberapa baris atau kolom A (ataupun sama sekali tidak menghapuskannya, artinya A merupakan sub matriks A sendiri) misalnya: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, misalnya bentuk sub matriks (a,b) dengan menghapus baris 2, baris 3, dan kolom 3.

Apabila suatu matriks A dipecah menjadi sub matriks dengan memberi sekatan-sekatan garis horisotal diantara dua baris dan garis vertikal diantara dua kolom, maka matriks A tadi dikatakan telah dipartisi.

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ partisi dari matriks A= $\left[\begin{array}{cc:c} a & b & c \\ d & e & f \\ \hdashline g & h & i \end{array}\right]$

Cara mencari invers dengan partisi tersebut digunakan rumus sebagai berikut:

Pandang matriks bujur sangkar A berordo n yang mempunyai invers $A^{-1} = B$ kita lakukan partisi sebagai berikut:

$$A = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right]$$

Dimana $p + q = n$

Karena $AB = BA = I_n$ maka diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

setelah dilakukan perkalian akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

(i) $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p$

(ii) $A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0$

(iii) $B_{21}A_{11} + B_{22}A_{22} = 0$

(iv) $B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q$

Misalkan $B_{22} = L^{-1}$ dari

(ii) $B_{12} = -\left(A_{11}^{-1}A_{12}\right)L^{-1}$

(iii) $B_{21} = -L^{-1}\left(A_{21}A_{11}^{-1}\right)$

(i) $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}$

$$= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\,L^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$$

Dan bila disubstitusikan ke (iv) maka:

$$\begin{aligned} -L^{-1}\left(A_{21}A_{11}^{-1}\right)A_{12} + L^{-1}A_{22} = I_q \rightarrow L &= A_{22} - \left(A_{21}A_{11}^{-1}\right)A_{12} \\ &= A_{22} - A_{21}\left(A_{11}^{-1}A_{12}\right) \end{aligned}$$

Jadi harus diperhatikan bahwa A_{11} harus *non singular* (senilai det (*A*) tidak sama dengan nol)………[36]

[36] Frank Ayres, JR. *Theory and Problem of Matriks*. (Bandung: Erlangga, 1994), hal 56-57. Lihat juga Murtiyoso Budi*:Aljabar Matriks* (Solo:FKDIP, 1990), hal.179-180.

3. Analisis *input-output*

Analisis *input-output* (masukan-keluaran) pertama kali diperkenalkan oleh Wassily W. Leontief pada tahun 1936.[37] Analisis ini merupakan suatu model matematis untuk menelaah struktur perekonomian yang saling kait mengait antar sektor atau kegiatan ekonomi. Analisis ini juga merupakan suatu peralatan analisis keseimbangan umum.[38] Keseimbangan dalam analisis *input-output* didasarkan arus transaksi antar pelaku perekonomian.

Penekanan utama dalam analisis *input-output* ini adalah pada sisi produksi. Teknologi produksi yang digunakan oleh perekonomian tersebut memegang peranan penting dalam analisis ini. Hal ini bertolak dari anggapan bahwa suatu sistem perekonomian terdiri atas sektor-sektor yang saling berkaitan. Masing-masing sektor menggunakan keluaran dari sektor lain sebagai masukan untuk keluaran yang akan dihasilkan, kemudian keluaran yang dihasilkan merupakan masukan untuk sektor lain pula dan selebihnya sebagai barang konsumsi bagi pemakai akhir. Dapat dikatakan bahwa suatu ekonomi memproduksi barang-barang dari keperluan akhir masyarakat dan keperluan antar-industrinya.

Adapun langkah-langkah untuk melakukan analisis *input-output* adalah sebagai berikut:[39]

a. Membuat tabel matriks transaksi dari permasalahan yang ada.

---

[37] Dumairy, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*, ed.2003/2004 (Yogyakarta: BPFE, 2003), hlm.333

[38] Suahasil Nazara, *Analisis Input-Output*, ed. Kedua (Jakarta: Lembaga Penerbit FEUI, 2005), hlm. 2

[39] D. Agus harjito, *Matematika Untuk Ekonomi & Bisnis*, (Yogyakarta: Ekonisia, 2000), hlm. 249.

Matriks transaksi menunjukkan distribusi *input-output* dari suatu perekonomian. Dari tabel transaksi ini akan diketahui distribusi suatu *output* dari suatu sektor perekonomian akan digunakan untuk sektor apa saja. Di lain pihak, *input* yang akan digunakan oleh suatu sektor perekonomian berasal dari sektor apa saja.

INPUT	**OUTPUT**		
	KONSUMSI	**PERMINTAAN AKHIR**	**TOTAL OUTPUT**
PRODUKSI	X_{11} X_{12} K X_{m} X_{21} X_{22} K X_{m} Λ Λ Λ X_{m1} X_{m2} K X_{mm}	d_1 d_2 M d_m	X_1 X_2 M X_m
NILAI TAMBAH	Y_1 Y_2 Λ Y_m	d_{m+1}	X_{m+1}
TOTAL OUTPUT	X_1 X_2 Λ X_m	X_{m+1}	X

Tabel 2.1 Tabel Matriks Transaksi $m \times m$

Keterangan:

Dari tabel 2.1 di atas dapat dijelaskan bahwa X_{ij} menunjukkan *output* dari sektor *i* yang digunakan sebagai input oleh sektor *j*. Adapun d_i menunjukkan permintaan akhir terhadap keluaran sektor *i*, Y_j menunjukkan nilai tambah sektor *j*, dan X_j merupakan *output total* dari sektor *j*. *Output* dan *input* suatu sektor perekonomian pada akhirnya jumlahnya akan sama, karena *output* suatu sektor akan digunakan oleh sektor lain dan sebaliknya *input* suatu sektor berasal dari sektor yang lain. Dengan demikian maka:

Konsumsi total sektor i adalah: $X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + d_i$, dimana i = 1, 2, 3,…..m + 1

Output total dari sektor j adalah: $X_j = \sum_{i=1}^{m} X_{ij} + Y_j$, dimana j = 1, 2, 3,…. m + 1

b. Membuat tabel matriks koefisien input (matriks teknologi)

Koefisien input atau koefisien teknologi adalah rasio yang menjelaskan jumlah atau nilai output sektor i yang digunakan sebagai input untuk menghasilkan satu unit output di sektor j. Apabila seluruh koefisien teknologi ini dihitung untuk semua sektor dan disusun dalam suatu matriks, maka matriks yang dibentuk dinamakan matriks koefisien input atau matriks teknologi. Koefisien teknologi (koefisien input) diperoleh dengan rumus:

$$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j} \tag{2.23}$$

dimana a_{ij} adalah koefisien teknologi dari output sektor i yang digunakan sebagai input untuk menghasilkan satu unit output di sektor j.

Koefisien teknologi hanya dibentuk oleh sektor-sektor utama dalam perekonomian. Jadi pemakai akhir dan nilai tambah tidak termasuk dalam perhitungan koefisien teknologi ini.

INPUT	OUTPUT
	KONSUMSI
PRODUKSI	$\frac{X_{11}}{X_1}$ $\frac{X_{12}}{X_2}$ $\Lambda\ \Lambda\ \Lambda$ $\frac{X_{1j}}{X_j}$ $\frac{X_{21}}{X_1}$ $\frac{X_{22}}{X_2}$ $\Lambda\ \Lambda\ \Lambda$ $\frac{X_{2j}}{X_j}$ $\frac{X_{i1}}{X_1}$ $\frac{X_{i2}}{X_2}$ $\Lambda\ \Lambda\ \Lambda$ $\frac{X_{ij}}{X_j}$
TOTAL OUTPUT	X_1 X_2 $\Lambda\ \Lambda\ \Lambda$ X_j

Tabel 2.2 Tabel Matriks Teknologi $m \times m$

Dari tabel diatas apabila dituliskan dalam notasi matriks biasa akan diperoleh:

$$
\begin{array}{c c}
 & \underline{\text{Sektor Konsumsi}} \\
\underline{\text{Sektor Produksi}} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \Lambda\ \Lambda & m \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \text{M} \\ \underline{m} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \Lambda & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \Lambda & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \Lambda & a_{3m} \\ & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & & a_{mm} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

c. Menghitung nilai output masing-masing sektor perekonomian yang dianalisa.

Hal ini dapat dijelaskan dalam perumusan matriks sbb:

Karena koefisien masukan $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$, berarti $X_{ij} = a_{ij} X_j$

Berdasarkan matriks transaksi

$$X_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij} + d_i$$

Padahal $X_{ij} = a_{ij} X_j$

Maka $$X_i = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_j + d_i \qquad (2.24)$$

Dari persamaan 2.24 bila diuraikan maka akan diperoleh:

$$X_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{im}X_m + d_i$$

Atau

$$d_i = X_i - a_{i1}X_1 - a_{i2}X_2 - \ldots - a_{im}X_m$$

Untuk masing-masing *i*;

$$(1 - a_{i1})x_1 - a_{i2}x_2 + \ldots - a_{im}x_m = d_i \tag{2.25}$$

Output seluruh ekonomi diberikan oleh persamaan linear berikut:

$$\begin{array}{l} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1m}x_m = d_1 \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 \ldots - a_{2m}x_m = d_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots + (1 - a_{mm})x_m = d_m \end{array} \tag{2.26}$$

Jika ditulis dalam bentuk matriks maka:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & (1 - a_{22}) & \cdots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & (1 - a_{mm}) \end{bmatrix}}_{I - A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix}}_{d}$$

Atau dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(I - A)x = d \tag{2.27}$$

Matriks pertama adalah $I - A$ yaitu selisih matriks identitas dengan matriks dari koefisien input $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$.

Matriks kedua adalah vektor lajur output $x = [x_i]$ dan matriks ketiga adalah vector lajur permintaan akhir $d = [d_i]$.

Kalau matriks (*I*-*A*) adalah nonsingular, maka inversnya $(I - A)^{-1}$ dapat dicari dan jawaban persamaan-persamaan (2.27) adalah:

$$x = (I - A)^{-1} c \qquad (2.28)$$

d. Menghitung nilai tambah masing-masing sektor perekonomian.

Besarnya unsur-unsur pada nilai tambah adalah sebesar koefisien nilai tambah dikalikan dengan total output yang baru.

e. Membuat tabel matriks transaksi yang baru (setelah analisis *input-output*)

Besarnya unsur-unsur yang ada pada tabel transaksi yang baru adalah sebesar koefisien teknologi dikalikan dengan total output yang baru.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

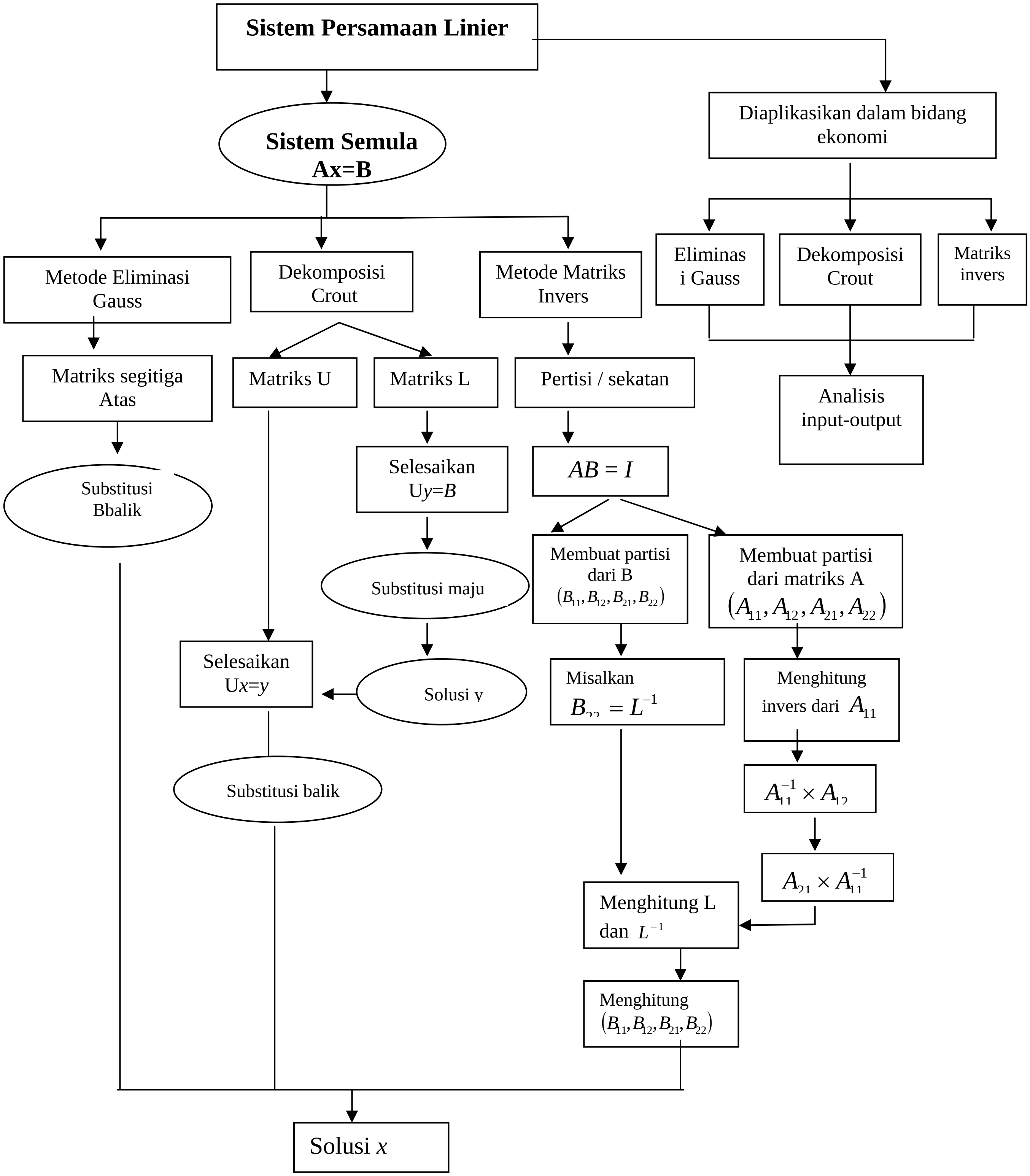
Jenis penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*) dengan mengkaji, meneliti, dan menyelidiki dokumen atau literatur serta tulisan yang berkaitan dengan penelitian ini.

B. Teknik Analisis Data

Metode yang digunakan dalam menganalisis data dalam penelitian ini adalah:

1. Metode analisis deskriptif kualitatif yaitu mendeskripsikan penyelesaian sistem pesamaan linier *n x n* dengan metode Eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan matriks invers digunakan untuk menyelesaikan persoalan, kemudian dianalisis dengan uraian berupa kalimat.
2. Metode komparatif yaitu membandingkan metode eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan metode matriks invers dalam penyelesaian sistem persamaan linier untuk dicari yang lebih efektif dan efisien.
3. Aplikasi metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan matriks invers dalam bidang ekonomi khususnya analisis *input-output.*

Adapun skema langkah-langkah penyelesaian dengan menggunakan tiga metode ini adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Skema Langkah-Langkah Penyelesaian Tiga Metode

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Algoritma Metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Metode Matriks Invers

Di bawah ini akan diuraikan secara sistematis tentang algoritma metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers, yaitu;

1. Algoritma metode eliminasi Gauss

Langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan metode eliminasi Gauss adalah sebagai berikut:

a. Jika matriks entrinya nol semua, maka tidak ada penyelesaian

b. Mencari kolom dari kiri yang berisi entri tidak nol, entri tidak nol dalam baris pertama adalah satu

c. Bila entri baris kolom pertama tidak sama dengan satu, maka dilakukan operasi baris elementer pada baris tersebut

d. Kemudian untuk baris dibawahnya, mengikuti langkah b dan c, entri di bawah baris kolom pertama dibuat nol, dan seterusnya

e. Jika terdapat baris-baris yang memiliki entri semuanya nol, maka baris-baris tersebut berada di bawah baris-baris yang memiliki entri-entri bukan nol

f. Setelah terbentuk matriks segitiga atas, maka lakukan subtitusi balik untuk memperoleh penyelesaian sistem.[40]

Langkah-langkah di atas dapat diringkas menjadi dua tahap,[41] yaitu *tahap pertama*, transformasi matriks yang diperbesar (*AB*) menjadi matriks (*CD*) dalam bentuk eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer. *Tahap kedua*, solusi dari sistem persamaan linier berkorespondensi matriks yang diperbesar (*CD*) menggunakan subtitus balik.

Bila matriks A dan sistem persamaan linier $Ax = B$ mempunyai solusi tunggal, matriks (*CD*) berbentuk;

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \ldots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1n} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & d_n \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

bila dibentuk dalam sistem persamaan linier adalah

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ x_{n-1} + c_{n-1}x_n &= d_{n-1} \\ x_n &= d_n \end{aligned} \tag{3.2}$$

Kemudian untuk proses substitusinya dari persamaan ke-*n* ke atas, penyelesaian dari setiap variabelnya adalah

---

[40] W. Keith Nicholson, *Linear Algebra With Aplication*, Third Edition, (Boston: PSW. Publising Company), pg. 17

[41] Bernard Kolman, *Introductory*…….., pg. 46-47

$$
\begin{aligned}
x_n &= d_n \\
x_{n-1} &= d_{n-1} - c_{n-1n} x_n \\
&\vdots \\
x_2 &= d_2 - c_{23} x_3 - c_{24} x_4 - \cdots - c_{2n} x_n \\
x_1 &= d_1 - c_{12} x_2 - c_{13} x_3 - \cdots - c_{1n} x_n
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Penjelasan dari langkah-langkah di atas dapat diperhatikan di bawah ini, misal untuk n = 4;

Langkah 1
$$
\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix}
$$

Langkah 2
$$
\begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}
$$

Langkah 3
$$
\begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}
$$

Langkah 4
$$
\begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Pada langkah 4 (yang terakhir) dapat dilakukan substitusi balik, sehingga diperoleh solusi sistem persamaan linier.

2. Algoritma Dekomposisi Crout

Langkah-langkah menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan Dekomposisi Crout adalah sebagai berikut:

a. Bentuk matriks *A* menjadi matriks *L* dan matriks *U*.

b. Tentukan dekomposisi matriks koefisiennya untuk matriks *L* dan *U* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- Langkah 1: $l_{i1} = a_{i1} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n$ (3.5)

- Langkah 2: $u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}$ untuk j = 2, 3, …, *n* (3.6)

- Langkah 3: $l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$ untuk i = j, j +1,…*n* (3.7)

- Langkah 4: $u_{jk} = \dfrac{a_{jk} - \sum_{i=1}^{j-1} l_{ji} u_{ik}}{l_{jj}}$ untuk $k = j+1, j+2, \ldots, j+n$ (3.8)

- Langkah 5: $l_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} u_{kn}$ (3.9)

c. Selesaikan matriks *L* sesuai persamaan *Ly* = *B*, untuk mencari *y* melalui proses substitusi maju.

d. Selesaikan matriks *U* sesuai persamaan *Ux* = *y*, untuk mencari solusi dari *x* dengan substitusi balik.

Penjelasan dari langkah-langkah di atas dapat dilihat di bawah ini;

Langkah 1

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2 gunakan rumus (3.5) samapai (3.6) untuk menghitung entri dari matrik *L* dan *U*

sehingga diperoleh

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \text{ dan } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diselesaikan $Ly = B$,

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

Dengan substitusi balik diperoleh *y*, kemudian diselesaikan untuk *x*, dengan persamaan $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

Maka dengan substitusi balik akan diperoleh *x*, sehingga akan diperoleh penyelesaian.

3. Algoritma Menghitung Invers Matriks dengan Menggunakan Partisi atau Sekatan

Langkah-langkah menyelesaiakan sistem persamaan linear dengan menggunakan metode partisi matriks adalah sebagai berikut:

a. Memisahkan matriks tersebut menjadi $A_{11}, A_{12}, A_{21}, dan\ A_{22}$

b. Menghitung invers dari A_{11}

c. Mengalikan invers A_{11} dengan A_{12} atau $A^{-1} \times A_{12}$

d. Menghitung $A_{21} \times A_{11}^{-1}$

e. Menghitung L dan L^{-1}

f. Menghitung $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$

B. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

Berdasarkan langkah-langkah (algoritma) dari metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers di atas, maka berikut ini akan diberikan penggunaan ketiga metode tersebut dalam menyelesaikan sistem persamaan linier.

1. Metode Eliminasi Gauss

Metode ini akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *n* persamaan dan *n* variabel, dengan *n* sama dengan satu sampai lima. Hal ini akan dapat diperhatikan pada soal-soal di bawah ini:

Soal 4.1 matriks ukuran 2 x 2

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

dengan menggunakan eliminasi Gauss.

Jawab:

Matriks lengkapnya $(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \overset{H_{21(-2)}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & -7 & -11 \end{bmatrix} \overset{H_{2(-\frac{1}{7})}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

$n = 2$

$r = 2$

$n = r$, sistem punya solusi tunggal

sistem persamaan liniernya

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 10 \\ x_2 &= \tfrac{11}{7} \end{aligned}$$

Dengan substitusi balik, solusi sistem persamaan linier adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{26}{7} \\ x_2 &= \tfrac{11}{7} \end{aligned}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\left\{ \left(\tfrac{26}{7}, \tfrac{11}{7} \right)^T \right\}$

Soal 4.2 matriks 3 x 3

Selesaikan sistem persamaan linier berikut;

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 14x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss.

Jawab:

Matriks lengkapnya (*AB*) adalah $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -14 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 4 \\ 3 & 8 & -14 & 8 \end{bmatrix} \overset{H_{21(-2)}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & -14 & 8 \end{bmatrix} \overset{H_{31(-3)}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \end{bmatrix} \overset{H_{32(-2)}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$r = 3$

$n = r$, sistem mempunyai solusi tunggal

sehingga diperoleh sistem persamaan linier;

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Melalui substitusi balik, solusi dari persamaan linier adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = {(-2, 0, -1)^T }

Soal 4.3 matriks ukuran 4 x 4

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + \qquad 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Dengan eliminasi Gauss.

Jawab:

Matriks lengkapnya (*AB*) adalah $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Operasi baris elementernya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{31(-3)} \\ H_{41(-2)}}}{\overset{H_{21(-1)}}{\approx}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \overset{H_{2(\frac{1}{2})}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\text{`} & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 4 & 3 & 5 & -14 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -7 \end{bmatrix} \underset{H_{42(-2)}}{\overset{H_{32(-4)}}{\approx}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-7}{3} & \frac{7}{3} & \frac{-14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix} \overset{H_{3(-\frac{3}{7})}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix} \overset{H_{43(\frac{-4}{3})}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \overset{H_{4(\frac{1}{5})}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$n = 4$

$r = 4$

$n = r$, sistem mempunyai solusi tunggal

sehingga persamaan liniernya adalah

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 + \tfrac{2}{3}x_4 &= \tfrac{-7}{3} \\ x_3 - x_4 &= 2 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Melalui substitusi balik, diperoleh solusi sistem persamaan linier;

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -3$$
$$x_3 = 1$$
$$x_4 = -1$$

atau himpunan penyelesaiannya = $\{(2, -3, 1, -1)^T\}$

Soal 4.4 matriks ukuran 5 x 5

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 4x_4 + 2x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \qquad\quad &= 6 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= -12 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss.

Jawab:

Matriks lengkapnya (AB) adalah $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -2 & -12 \end{bmatrix}$

Operasi baris elementernya adalah sebagai berikut;

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -2 & -12 \end{bmatrix} \underset{}{\overset{H_{1(\frac{1}{2})}}{\approx}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -2 & -12 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{31(-2)} \\ H_{51(-4)}}}{\overset{H_{21(2)}}{\approx}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & -6 & -16 \end{bmatrix} \underset{H_{3(\frac{1}{2})}}{\overset{H_{2(\frac{1}{2})}}{\approx}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 2 & -4 & -6 & -16 \end{bmatrix} \underset{H_{52(-6)}}{\overset{H_{42(-4)}}{\approx}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -16 & -18 & -34 \end{bmatrix} \underset{H_{53(4)}}{\overset{H_{43(2)}}{\approx}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & -22 & -26 \end{bmatrix} \overset{H_{4(\frac{-1}{10})}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -28 & -22 & -26 \end{bmatrix} \overset{H_{54(28)}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & ` & ` \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-26}{5} & -26 \end{bmatrix} \overset{H_{5(\frac{-5}{26})}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

n = 5

r = 5

n = r, sistem mempunyai solusi tunggal

sehingga sistem persamaan liniernya adalah

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + \quad + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_3 - 3x_4 - x_5 &= 2 \\ x_4 + \tfrac{3}{5}x_5 &= 0 \\ x_5 &= 5 \end{aligned}$$

dengan substitusi balik, solusi sistem persamaan linier di atas adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -2 \\ x_4 &= -3 \\ x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\{(3, 1, -2, -3, 5)^T\}$

2. Metode Dekomposisi Crout

Seperti halnya metode eliminasi Gauss, metode ini juga akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan orde *nxn*, dengan *n* sama dengan 1 sampai 5. Lebih jelasnya dapat dilihat pada soal-soal sebagai berikut:

Soal 4.5 matriks ukuran 2 x 2

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini,

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

dengan menggunakan Dekomposisi Crout.

Jawab:

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$l_{11} = 1 \qquad l_{21} = 2$$

$$u_{12} = \tfrac{a_{12}}{l_{11}} = \tfrac{4}{1} = 4$$

$$\begin{aligned} l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ &= 1 - (2)(4) \\ &= -7 \end{aligned}$$

Jadi $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ $\qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai y dapat digunakan rumus

LY = B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju diperoleh;

$$\begin{aligned} y_1 &= 10 \\ y_2 &= \tfrac{11}{7} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $Y' = \begin{bmatrix} 10 \\ \tfrac{11}{7} \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai x digunakan rumus

UX = *Y’*

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ \tfrac{11}{7} \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik, diperoleh;

$$x_1 = \tfrac{26}{7}$$
$$x_2 = \tfrac{11}{7}$$

atau himpunan penyelesaiannya $=\left\{\left(\tfrac{26}{7}, \tfrac{11}{7}\right)^T\right\}$

Soal 4.6 matriks ukuran 3 x 3

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 14x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Dekomposisi Crout.

Jawab:

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 8 & -14 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$l_{11} = 1 \qquad l_{21} = 2 \qquad l_{31} = 3$$

$$u_{12} = \tfrac{a_{12}}{l_{11}} = \tfrac{2}{1} = 2$$
$$u_{13} = \tfrac{a_{13}}{l_{11}} = \tfrac{-3}{1} = -3$$

$$\begin{aligned} l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} \\ &= 5 - (2)(2) \\ &= 1 \\ l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{12} \\ &= 8 - (3)(2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}}$$
$$= \frac{-8-(2)(-3)}{1}$$
$$= \frac{-8+6}{1} = -2$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$
$$= -14 - (3)(-3) - (2)(-2)$$
$$= -1$$

Jadi $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai *y* dapat digunakan rumus

LY = *B*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju diperoleh;

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = 2$$
$$y_3 = -1$$

Sehingga didapatkan $Y' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai *x* digunakan rumus

UX = *Y'*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik diperoleh

$$x_1 = -2$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = -1$$

Atau himpunan penyelesaiannya = {(-2, 0, -1)^T }

Soal 4.7 matriks ukuran 4 x 4

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + \qquad 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Dekomposisi Crout.

Jawab:

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$l_{11} = 1$ $\qquad l_{21} = 1$ $\qquad l_{31} = 3$ $\qquad l_{41} = 2$

$$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - (1)(-1) = 3$$

$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = 1 - (3)(-1) = 4$$

$$l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} = 0 - (2)(-1) = 2$$

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{3 - (1)(-1)}{3} = \frac{4}{3}$$

$$u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21}u_{14}}{l_{22}} = \frac{1 - (1)(-1)}{3} = \frac{2}{3}$$

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 0 - (3)(-1) - (4)\left(\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{-7}{3}$$

$$l_{43} = a_{33} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23} = 2 - (2)(-1) - (2)\left(\tfrac{4}{3}\right) = \tfrac{4}{3}$$

$$u_{34} = \frac{a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}}{l_{33}} = \frac{2 - (3)(-1) - (4)\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{-7}{3}} = -1$$

$$l_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = 3 - (2)(-1) - (2)\left(\tfrac{2}{3}\right) - \left(\tfrac{4}{3}\right)(-1) = 5$$

Jadi

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \frac{-7}{3} & 0 \\ 2 & 2 & \frac{4}{3} & 5 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk mencari nilai *y* dapat digunakan rumus

$LY = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & \frac{-7}{3} & 0 \\ 2 & 2 & \frac{4}{3} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju diperoleh;

$$\begin{aligned} y_1 &= 5 \\ y_2 &= \tfrac{-7}{3} \\ y_3 &= 2 \\ y_4 &= -1 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $Y' = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{-7}{3} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai *x* digunakan rumus

UX = Y'

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{-7}{3} \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik diperoleh;

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3 \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\{(2, -3, 1, -1)^T\}$

Soal 4. 8 matriks ukuran 5 x 5

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 4x_4 + 2x_5 &= 2 \\
-2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\quad + 2x_5 &= 4 \\
2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \qquad\quad &= 6 \\
4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 8 \\
4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= -12
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Dekomposisi Crout.

Jawab:

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix}$

$l_{11} = 2$ $\quad l_{21} = -2$ $\quad l_{31} = 2$ $\quad l_{41} = 0$ $\quad l_{51} = 4$

Baris pertama *U;*

$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1$ $\qquad u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{4}{2} = 2$

$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{0}{2} = 0$ $\qquad u_{15} = \frac{a_{15}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1$

Kolom kedua *L;*

$$\begin{aligned}
l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} = 4 - (-2)(-1) = 2 \\
l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{13} = -2 - (2)(-1) = 0 \\
l_{42} &= a_{42} - l_{41}u_{14} = 4 - (0)(-1) = 4 \\
l_{52} &= a_{52} - l_{51}u_{15} = 2 - (4)(-1) = 6
\end{aligned}$$

Baris kedua *U*;

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{2-(-2)(0)}{2} = 1$$
$$u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21}u_{14}}{l_{22}} = \frac{0-(-2)(2)}{2} = 2$$
$$u_{25} = \frac{a_{25} - l_{21}u_{15}}{l_{22}} = \frac{2-(-2)(1)}{2} = 2$$

Kolom ketiga *L*;

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 2 - (2)(0) - (0)(1) = 2$$
$$l_{43} = a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23} = 2 - (0)(0) - (4)(1) = -2$$
$$l_{53} = a_{53} - l_{51}u_{13} - l_{52}u_{23} = 2 - (4)(0) - (6)(1) = -4$$

Baris ketiga *U*;

$$u_{34} = \frac{a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}}{l_{33}} = \frac{-2-(2)(2)-(0)(2)}{2} = \frac{-6}{3} = -2$$
$$u_{35} = \frac{a_{35} - l_{31}u_{15} - l_{32}u_{25}}{l_{33}} = \frac{0-(2)(1)-(0)(2)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Kolom keempat *L*;

$$l_{44} = a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} = 4 - (0)(2) - (4)(2) - (-2)(-3) = -10$$
$$l_{54} = a_{54} - l_{51}u_{14} - l_{52}u_{24} - l_{53}u_{34} = 4 - (4)(2) - (6)(2) - (-4)(-3) = -28$$

Baris keempat U;

$$u_{45} = \frac{a_{45} - l_{41}u_{15} - l_{42}u_{25} - l_{43}u_{35}}{l_{44}} = \frac{4-(0)(1)-(4)(2)-(-2)(-1)}{-10} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

Kolom kelima *L*;

$$\begin{aligned} l_{55} &= a_{55} - l_{51}u_{15} - l_{52}u_{25} - l_{53}u_{35} - l_{54}u_{45} \\ &= -2 - (4)(1) - (6)(2) - (-4)(-1) - (-28)\left(\tfrac{3}{5}\right) \\ &= \frac{-26}{5} \end{aligned}$$

Jadi

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -4 & -28 & \frac{-26}{5} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & -` & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk mencari nilai y dapat digunakan rumus

$LY = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -10 & 0 \\ 4 & 6 & -4 & -28 & \frac{-26}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju diperoleh;

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_2 &= 3 \\ y_3 &= 2 \\ y_4 &= 0 \\ y_5 &= 5 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan $Y' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai x digunakan rumus

$UX = Y'$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik diperoleh;

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -2 \\ x_4 &= -3 \\ x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\{(3, 1, -2, -3, 5)^T\}$

3. Metode Matriks Invers

Seperti halnya metode eliminasi Gauss dan Dekomposisi Crout, metode ini juga akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan orde *n* x *n*, dengan *n* sama dengan 1 sampai 5. Dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan menggunakan matriks invers, terdapat banyak cara. Dalam permasalahan ini lebih dikhususkan dengan menggunakan cara partisi matriks, lebih jelasnya dapat dilihat pada soal-soal sebagai berikut;

Soal 4.9 matriks ukuran 2 x 2

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini;

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 &= 9 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode partisi matriks.

Jawab:

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$

Partisi dari A = $\left[\begin{array}{c:c} 1 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

Dicari S^{-1} untuk menentukan *E, F, G,* dan *H*

$$S = [1] \rightarrow S^{-1} = [1]$$

$$E = \left(P - QS^{-1}R\right)^{-1} \rightarrow QS^{-1} = [4][1] = [4]$$
$$QS^{-1}R = [4][2] = [8]$$
$$\left(P - QS^{-1}R\right) = [1] - [8] = [-7]$$
$$\left(P - QS^{-1}R\right)^{-1} = \left[-\tfrac{1}{7}\right]$$

$$F = -EQS^{-1}$$
$$= \left[\tfrac{1}{7}\right][4] = \left[\tfrac{4}{7}\right]$$

$$G = -S^{-1}RE \quad \rightarrow -S^{-1}R = [-1][2] = [-2]$$
$$-S^{-1}RE = [-2]\left[-\tfrac{1}{7}\right] = \left[\tfrac{2}{7}\right]$$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF \quad \rightarrow -S^{-1}RF = [-2]\left[\tfrac{4}{7}\right] = \left[-\tfrac{8}{7}\right]$$
$$S^{-1} - S^{-1}RF = [1] + \left[-\tfrac{8}{7}\right] = \left[-\tfrac{1}{7}\right]$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$

Untuk mencari nilai *x* digunakan rumus $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{7} \\ \frac{11}{7} \end{bmatrix}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\left\{ (\frac{26}{7}, \frac{11}{7})^T \right\}$

Soal 4.10 matriks ukuran 3 x 3

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 14x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode partisi matriks.

Jawab:

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 4 & -14 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

Partisi matriks $A = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 3 \\ \hdashline 2 & 5 & -8 \\ 3 & 8 & -24 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

Dicari S^{-1} untuk menentukan *E*, *F*, *G*, dan *H*

$$S=\begin{bmatrix}5 & -8\\ 8 & -14\end{bmatrix}\quad ;\det(S)=(5\times -14)-(8\times -8)=-70+64=-6$$

$$S^{-1}=\tfrac{1}{\det(S)}.Adj(S)$$

$$=\tfrac{1}{-6}\begin{bmatrix}-14 & 8\\ -8 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tfrac{7}{3} & -\tfrac{4}{3}\\ \tfrac{4}{3} & -\tfrac{5}{6}\end{bmatrix}$$

$$E=\left(P-QS^{-1}R\right)^{-1}\quad\rightarrow QS^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tfrac{7}{3} & -\tfrac{4}{3}\\ \tfrac{4}{3} & \tfrac{-5}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$QS^{-1}R=\begin{bmatrix}\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tfrac{5}{6}\end{bmatrix}$$

$$\left(P-QS^{-1}R\right)=[1]-\left[\tfrac{5}{6}\right]=\left[\tfrac{1}{6}\right]$$

$$E=\left(P-QS^{-1}R\right)^{-1}=\left[\tfrac{1}{6}\right]^{-1}=[6]$$

$$F=-EQS^{-1}$$

$$=[-6]\begin{bmatrix}\tfrac{2}{3} & -\tfrac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\end{bmatrix}$$

$$G=-S^{-1}RE\qquad\rightarrow S^{-1}R=\begin{bmatrix}\tfrac{7}{3} & -\tfrac{4}{3}\\ \tfrac{4}{3} & -\tfrac{5}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tfrac{2}{3}\\ \tfrac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$-S^{-1}RE=\begin{bmatrix}-\tfrac{2}{3}\\ -\tfrac{1}{6}\end{bmatrix}[6]=\begin{bmatrix}-4\\ -1\end{bmatrix}$$

$$H=S^{-1}-S^{-1}RF\qquad\rightarrow S^{-1}RF=\begin{bmatrix}\tfrac{2}{3}\\ \tfrac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\tfrac{8}{3} & \tfrac{2}{3}\\ -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\tfrac{7}{3} & -\tfrac{4}{3}\\ \tfrac{4}{3} & -\tfrac{5}{6}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\tfrac{8}{3} & \tfrac{2}{3}\\ -\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1}=\begin{bmatrix}E & F\\ G & H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -4 & 1\\ -4 & 5 & -2\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$

Untuk mencari nilai *x* digunakan rumus $X=A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\{(-2, 0, -1)^T\}$

Soal 4.11 matriks ukuran 4 x 4

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + \qquad 2x_3 + 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode partisi matriks.

Jawab:

Bentuk matriks dan $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Partisi matriks $A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

Dicari S^{-1} untuk menentukan *E, F, G,* dan *H*

$$S=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad ;\ \det(S)=(0\times 3)-(2\times 2)=-4$$

$$S^{-1}=\tfrac{1}{\det(S)}Adj(S)=-\tfrac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$E=\left(P-QS^{-1}R\right)^{-1}\quad\rightarrow QS^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$QS^{-1}R=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$\left(P-QS^{-1}R\right)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{9}{4} & -\frac{7}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{5}{4}\\ \frac{13}{4} & \frac{15}{4}\end{bmatrix}$$

misal $\left(P-QS^{-1}R\right)=B=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{5}{4}\\ \frac{13}{4} & \frac{15}{4}\end{bmatrix}$

$$\det(B)=\left(\tfrac{5}{4}\times\tfrac{15}{4}\right)-\left(-\tfrac{5}{4}\times\tfrac{13}{4}\right)=\tfrac{75}{16}+\tfrac{65}{16}=\tfrac{140}{16}=\tfrac{35}{4}$$

$$E=B^{-1}=\tfrac{1}{\det(B)}Adj(B)$$

$$=\tfrac{4}{35}\begin{bmatrix}\frac{15}{4} & \frac{5}{4}\\ -\frac{13}{4} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{13}{35} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

$$F=-EQS^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{3}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{13}{5} & -\frac{1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{7}{4} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & 0\\ \frac{24}{70} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$G=-S^{-1}RE\quad\rightarrow -S^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$-S^{-1}R=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$-S^{-1}RE=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{1}{7}\\ -\frac{13}{35} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{18}{70} & \frac{2}{7}\\ -\frac{9}{14} & -\frac{3}{14}\end{bmatrix}$$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF \qquad \rightarrow \; -S^{-1}RF = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{24}{70} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{61}{140} & -\frac{6}{20} \\ -\frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{61}{140} & -\frac{6}{20} \\ -\frac{3}{14} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{35} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{14} & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{13}{35} & \frac{1}{7} & \frac{24}{70} & -\frac{2}{5} \\ \frac{18}{70} & \frac{2}{7} & -\frac{11}{35} & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{4}{14} & 0 \end{bmatrix}$

Untuk mencari nilai x digunakan rumus $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ -\frac{13}{35} & \frac{1}{7} & \frac{24}{70} & -\frac{2}{5} \\ \frac{18}{70} & \frac{2}{7} & -\frac{11}{35} & \frac{1}{5} \\ -\frac{9}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{4}{14} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Atau himpunan penyelesaiannya adalah $\{(2, -3, 1, -1)^T\}$

Soal 4. 12 matriks ukuran 5 x 5

Selesaikan sistem persamaan linier di bawah ini

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 \quad\quad + 4x_4 + 2x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \quad\quad + 2x_5 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \quad\quad &= 6 \\ 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 &= 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 2x_5 &= -12 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode partisi matriks.

Jawab:

Bentuk matriks $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix}$

Partisi matriks $A=\left[\begin{array}{cc:ccc} 2 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ \hdashline 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$

Misalkan $A^{-1}=\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

Dicari S^{-1} untuk menentukan *A, B, C,* dan *D*

$$S=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{misalkan } S^{-1}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Patisi matriks $S=\left[\begin{array}{c:cc} 2 & -2 & 0 \\ \hdashline 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$

$$N=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \det(N)=(4\times -2)-(4\times 4)=-8-16=-24$$

$$N^{-1}=\tfrac{1}{\det(N)}Adj(N)$$

$$=-\tfrac{1}{24}\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A=\left(K-LN^{-1}M\right)^{-1} \qquad \rightarrow \quad LN^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$LN^{-1}M=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$$

$$\left(K-LN^{-1}M\right)=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

$$A=\left(K-LN^{-1}M\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$B=-ALN^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

$$C=-N^{-1}MA \qquad \rightarrow \quad -N^{-1}M=\begin{bmatrix}-\frac{1}{12} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$D=N^{-1}-N^{-1}MB \qquad \rightarrow \quad -N^{-1}MB=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{36} & -\frac{1}{18}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{12} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{1}{36} & -\frac{1}{18}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

Jadi $S^{-1}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}$

Dicari A^{-1} untuk menentukan *E*, *F*, *G*, dan *H*

$$E=\left(P-QS^{-1}R\right) \quad \rightarrow QS^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 2\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

$$QS^{-1}R=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{8}{9} & \frac{34}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$$

$$\left(P-QS^{-1}R\right)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{8}{9} & \frac{34}{9}\\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{26}{9} & -\frac{52}{9}\\ -\frac{26}{9} & \frac{34}{9}\end{bmatrix}$$

misal $\left(P-QS^{-1}R\right)=U$

$$\det(U)=\left(\tfrac{26}{9}\times\tfrac{34}{9}\right)-\left(-\tfrac{52}{9}\times-\tfrac{26}{9}\right)=\tfrac{884}{81}-\tfrac{1352}{81}=\tfrac{-468}{81}=-\tfrac{52}{9}$$

$$E=U^{-1}=\tfrac{1}{\det(U)}Adj(U)$$

$$=-\tfrac{9}{52}\begin{bmatrix}\frac{34}{9} & \frac{52}{9}\\ \frac{26}{9} & \frac{26}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{17}{26} & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$F=-EQS^{-1}\qquad\rightarrow -E=\begin{bmatrix}\frac{17}{26} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{17}{26} & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{5}{9} & \frac{1}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{13} & \frac{21}{26} & -\frac{1}{26}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$G=-S^{-1}RE\quad\rightarrow -S^{-1}R=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9}\\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\ 0 & 4\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{10}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & -\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{10}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & -\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{17}{26} & -1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{8}{13} & 1\\ \frac{6}{13} & \frac{1}{2}\\ -\frac{7}{26} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$H=S^{-1}-S^{-1}RF\qquad\rightarrow -S^{-1}RF=\begin{bmatrix}-\frac{10}{9} & \frac{2}{9}\\ -\frac{1}{9} & -\frac{7}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{13} & \frac{21}{26} & -\frac{1}{26}\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{10}{39} & -\frac{92}{117} & \frac{5}{7}\\ -\frac{1}{39} & -\frac{56}{117} & \frac{1}{234}\\ \frac{2}{13} & \frac{29}{78} & -\frac{1}{39}\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9}\\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{10}{9} & -\frac{92}{117} & \frac{5}{117}\\ -\frac{1}{39} & -\frac{56}{117} & \frac{3}{26}\\ \frac{2}{13} & \frac{29}{78} & -\frac{1}{39}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{13} & -\frac{19}{26} & \frac{2}{13}\\ -\frac{5}{26} & -\frac{11}{26} & \frac{3}{26}\\ \frac{2}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{5}{26}\end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{26} & -1 & \frac{3}{13} & \frac{21}{26} & -\frac{1}{26} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{13} & 1 & \frac{1}{13} & -\frac{19}{26} & \frac{2}{3} \\ \frac{6}{13} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{26} & -\frac{11}{26} & \frac{3}{26} \\ -\frac{7}{26} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{5}{26} \end{bmatrix}$

Untuk mencari nilai x digunakan rumus $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{17}{26} & -1 & \frac{3}{13} & \frac{21}{26} & -\frac{1}{26} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{8}{13} & 1 & \frac{1}{13} & -\frac{19}{26} & \frac{2}{3} \\ \frac{6}{13} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{26} & -\frac{11}{26} & \frac{3}{26} \\ -\frac{7}{26} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{13} & \frac{7}{13} & -\frac{5}{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Atau himpunan penyelesaiannya = $\{(3, 1, -2, -3, 5)^T\}$

C. Aplikasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dalam Bidang Ekonomi

Aplikasi yang dibahas pada bab ini adalah aplikasi metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers pada bidang ekonomi. Pada bidang ekonomi, pembahasannya dikhususkan pada penentuan hasil *output total* (keluaran total) dan *input primer* (nilai tambah) dari suatu sektor perekonomian.

1. Aplikasi Penyelesaian Sistem Persamaan Linier pada Bidang Ekonomi (Analisis *Input-Output*)

Aplikasi sistem persamaan linier banyak digunakan dalam bidang ekonomi. Pada penelitian kali ini, dikhususkan pembahasannya pada analisis *input-output*, yaitu cara menghitung *output total* (total keluaran) dan *input* *primer* (nilai tambah) dari suatu sektor perekonomian dengan bantuan metode penyelesaian sistem persamaan linier orde *n* x *n*. Metode penyelesaian yang digunakan adalah metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers. Untuk lebih jelasnya akan disajikan dalam contoh di bawah ini.

Soal 4.13

Hubungan *input-output* antar sektor dalam perekonomian sebuah negara diketahui seperti ditunjukkan dalam tabel transaksi di bawah ini:

output / input	Pertanian	industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	11	19	1	10	41
Industri	5	89	40	106	240
Jasa	5	37	37	106	185
Nilai tambah	20	95	107	21	243
Keluaran total	41	241	185	243	695

Tabel 4.1 Tabel Matriks Transaksi berorde 3×3

a) Hitunglah masing-masing koefisien masukannya.

b) Jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian, sektor industri, dan sektor jasa diharapkan masing-masing bertambah menjadi 25, 210, dan 45, berapa keluaran total dan nilai tambah yang baru bagi masing-masing sektor tersebut?

Penyelesaian:

a) Masing-masing koefisien inputnya adalah:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{11}{41} = 0{,}27 \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{19}{241} = 0{,}08 \qquad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{1}{185} = 0{,}005$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{5}{41} = 0{,}12 \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{89}{241} = 0{,}37 \qquad a_{23} = \frac{x_{24}}{x_3} = \frac{40}{185} = 0{,}22$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x} = \frac{5}{41} = 0{,}12 \qquad a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{37}{241} = 0{,}15 \qquad a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{37}{185} = 0{,}2$$

$$a_{41} = \frac{Y_1}{x} = \frac{20}{41} = 0{,}49 \qquad a_{42} = \frac{Y_2}{x_2} = \frac{95}{241} = 0{,}4 \qquad a_{43} = \frac{Y_3}{x_3} = \frac{107}{185} = 0{,}58$$

Matriks Teknologinya adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{Pertanian} & \text{Industri} & \text{Jasa} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Pertanian} \\ \text{Industri} \\ \text{Jasa} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}27 & 0{,}08 & 0{,}01 \\ 0{,}12 & 0{,}37 & 0{,}22 \\ 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}2 \end{bmatrix} \\ \text{nilai tambah} & \begin{array}{ccc} 0{,}49 & 0{,}4 & 0{,}57 \end{array} \end{array} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0{,}27 & 0{,}08 & 0{,}01 \\ 0{,}12 & 0{,}37 & 0{,}22 \\ 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

b) Mencari total output yang baru

b.1 Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss

Penyelesaian:

Menurut rumus umum $(I - A)X = C$

$$\begin{bmatrix} 1-0{,}27 & -0{,}08 & -0{,}01 \\ -0{,}12 & 1-0{,}37 & -0{,}22 \\ -0{,}12 & -0{,}15 & 1-0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.73 & -0{,}08 & -0{,}01 \\ -0{,}12 & 0{,}63 & -0{,}22 \\ -0{,}12 & -0{,}15 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Matriks lengkapnya (*I-A)C* adalah $\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.73 & -0,08 & -0,01 & 25 \\ -0,12 & 0,63 & -0,22 & 201 \\ -0,12 & -0,15 & 0,8 & 45 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0,73 & -0,08 & -0,01 & 25 \\ -0,12 & 0,63 & -0,22 & 201 \\ -0,12 & -0,15 & 0,8 & 45 \end{bmatrix} \overset{H_{1(\frac{1}{0,73})}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,01 & 34,2 \\ -0,12 & 0,63 & -0,22 & 201 \\ -0,12 & -0,15 & 0,8 & 45 \end{bmatrix} \underset{H_{31(0,12)}}{\overset{H_{21(0,12)}}{\approx}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,01 & 34,2 \\ 0 & 0,62 & -0,22 & 205,1 \\ 0 & -0,162 & 0,8 & 49,1 \end{bmatrix} \overset{H_{2(\frac{1}{0,62})}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,01 & 34,2 \\ 0 & 1 & -0,35 & 330,8 \\ 0 & -0,162 & 0,8 & 49,1 \end{bmatrix} \overset{H_{32(0,1652)}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,01 & 34,2 \\ 0 & 1 & -0,35 & 330,8 \\ 0 & 0 & 0,74 & 102,68 \end{bmatrix} \overset{H_{3(\frac{1}{0,74})}}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & -0,01 & 34,2 \\ 0 & 1 & -0,35 & 330,8 \\ 0 & 0 & 1 & 138,7 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik diperoleh:

$$x_1 = 73,5$$
$$x_2 = 379,34$$
$$x_3 = 138,7$$

b.2 Dengan menggunakan metode Dekomposisi Crout

Penyelesaian:

Menurut rumus umum $(I - A)X = C$

$$\begin{bmatrix} 1-0,27 & -0,08 & -0,01 \\ -0,12 & 1-0,37 & -0,22 \\ -0,12 & -0,15 & 1-0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.73 & -0,08 & -0,01 \\ -0,12 & 0,63 & -0,22 \\ -0,12 & -0,15 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks $A = \begin{bmatrix} 0{,}73 & -0{,}08 & -0{,}01 \\ -0{,}12 & 0{,}63 & -0{,}22 \\ -0{,}12 & -0{,}15 & 0{,}8 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix}$

$l_{11} = 0{,}73 \quad ; \quad l_{21} = -0{,}2 \quad ; \quad l_{31} = -0{,}12$

$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{-0{,}08}{0{,}73} = -0{,}1$

$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-0{,}01}{0{,}73} = -0{,}01$

$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 0{,}63 - (-0{,}2)(-0{,}1) = 0{,}63 - 0{,}02 = 0{,}61$

$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = -0{,}15 - (-0{,}12)(-0{,}1) = -0{,}15 - 0{,}012 = -0{,}16$

$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{-0{,}22 - (-0{,}2)(-0{,}01)}{0{,}61} = \frac{-0{,}222}{0{,}61} = -0{,}36$

$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 0{,}8 - (-0{,}12)(-0{,}01) - (-0{,}162)(-0{,}36) = 0{,}74$

Jadi $L = \begin{bmatrix} 0{,}73 & 0 & 0 \\ -0{,}12 & 0{,}61 & 0 \\ -0{,}12 & -0{,}16 & 0{,}74 \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}01 \\ 0 & 1 & -0{,}36 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Kemudian untuk mencari nilai *Y* digunakan rumus *LY* = *C*

$$L = \begin{bmatrix} 0{,}73 & 0 & 0 \\ -0{,}12 & 0{,}61 & 0 \\ -0{,}12 & -0{,}16 & 0{,}74 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju didapatkan;

$$y_1 = 34{,}2$$
$$y_2 = 336{,}2$$
$$y_3 = 138{,}7$$

Sehingga diperoleh $Y' = \begin{bmatrix} 34{,}2 \\ 336{,}2 \\ 138{,}7 \end{bmatrix}$

Selanjutnya untuk mencari nilai *X* digunakan rumus *UX* = *Y’*

$$\begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 & -0{,}01 \\ 0 & 1 & -0{,}36 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34{,}2 \\ 336{,}2 \\ 138{,}7 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi balik diperoleh:

$$x_1 = 73{,}5$$
$$x_2 = 379{,}34$$
$$x_3 = 138{,}7$$

b.3 Dengan menggunakan metode matriks invers khususnya dengan cara partisi

Penyelesaian:

$$(I-A) = \begin{bmatrix} 0{,}73 & -0{,}08 & -0{,}01 \\ -0{,}12 & 0{,}63 & -0{,}22 \\ -0{,}12 & -0{,}15 & 0{,}8 \end{bmatrix} \quad ; \text{misalkan } (I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

Partisi dari $$(I-A) = \left[\begin{array}{c:cc} 0{,}73 & -0{,}08 & -0{,}01 \\ \hdashline -0{,}12 & 0{,}63 & -0{,}22 \\ -0{,}12 & -0{,}15 & 0{,}8 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0{,}63 & -0{,}22 \\ -0{,}15 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \tfrac{1}{0{,}504-0{,}33}\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}22 \\ 0{,}15 & 0{,}63 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{0{,}47}\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}22 \\ 0{,}15 & 0{,}63 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}47 \\ 0{,}32 & 1{,}34 \end{bmatrix}$$

$$E = \left(P - QS^{-1}R\right)^{-1}$$

$$QS^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}08 & -0{,}01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}46 \\ 0{,}31 & 1{,}34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}13 & -0{,}05 \end{bmatrix}$$

$$QS^{-1}R = \begin{bmatrix} -0{,}13 & -0{,}05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}12 \\ -0{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}02 \end{bmatrix}$$

$$P - QS^{-1}R = 0{,}73 - 0{,}02 = 0{,}71$$

$$E = \left(P - QS^{-1}R\right)^{-1} = \left(0{,}71\right)^{-1} = 1{,}4$$

$$F = -EQS^{-1} = -1{,}4\begin{bmatrix} -0{,}13 & -0{,}05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}18 & 0{,}07 \end{bmatrix}$$

$$G = -S^{-1}RE$$

$$S^{-1}R = \begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}46 \\ 0{,}31 & 1{,}34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}12 \\ -0{,}12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ -0{,}19 \end{bmatrix}$$

$$-S^{-1}RE = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}27 \end{bmatrix}$$

$$H = S^{-1} - S^{-1}RF$$

$$S^{-1}RF = \begin{bmatrix} -0{,}25 \\ -0{,}19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}18 & 0{,}07 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}045 & -0{,}018 \\ -0{,}0342 & -0{,}013 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} - S^{-1}RF = \begin{bmatrix} 1{,}7 & 0{,}46 \\ 0{,}31 & 1{,}34 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0{,}045 & -0{,}018 \\ -0{,}034 & -0{,}013 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}74 & 0{,}48 \\ 0{,}34 & -1{,}35 \end{bmatrix}$$

Jadi $A^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}18 & 0{,}07 \\ 0{,}35 & 1{,}47 & 0{,}47 \\ 0{,}26 & 0{,}34 & 1{,}35 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}18 & 0{,}07 \\ 0{,}35 & 1{,}47 & 0{,}47 \\ 0{,}26 & 0{,}34 & 1{,}35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 \\ 201 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73{,}5 \\ 379{,}34 \\ 138{,}7 \end{bmatrix}$$

Dari ketiga metode tersebut dapat diketahui bahwa;

keluaran total (*output total*) masing-masing sektor adalah:

Pertanian = 73,5

Industri = 379,34

Jasa = 138,7

sedangkan nilai tambah (*input primer*) sektor adalah:

Pertanian = 0,49 x 73,5 = 36

Industri = 0,4 x 379,34 = 151,7

Jasa = 0,57 x 138,7 = 79,1

Tabel matriks transaksi yang baru adalah sebagai berikut:

Koefisien teknologi yang baru adalah:

$$a_{11} = 0{,}27 \times 73{,}5 = 19{,}845 \quad a_{12} = 0{,}08 \times 379{,}34 = 30{,}347 \quad a_{13} = 0{,}01 \times 138{,}7 = 1{,}387$$
$$a_{21} = 0{,}12 \times 73{,}5 = 8{,}82 \quad a_{22} = 0{,}37 \times 379{,}34 = 140{,}36 \quad a_{23} = 0{,}22 \times 138{,}7 = 30{,}51$$
$$a_{31} = 0{,}12 \times 73{,}5 = 8{,}82 \quad a_{32} = 0{,}15 \times 379{,}34 = 56{,}901 \quad a_{33} = 0{,}2 \times 138{,}7 = 27{,}74$$

Tabel matriks transaksi yang baru adalah sebagai berikut:

output / input	Pertanian	industri	Jasa	Permintaan akhir	Keluaran total
Pertanian	19,845	30,347	1,387	25	73,5
Industri	8,82	140,36	30,51	201	379,34
Jasa	8,82	56,901	27,74	45	138,7
Nilai tambah	36	151,7	79,1		
Keluaran total	73,5	379,34	138,7		

Tabel 4.2 Tabel Matriks Transaksi Baru berorde 3×3

Dari tabel transaksi yang baru di atas dapat diketahui bahwa pembacaan tabel kesamping menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran total sektor pertanian senilai Rp73,5 milyar, senilai Rp19,845 milyar digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai masukan (*input*), senilai Rp30,347 milyar digunakan oleh sektor industri sebagai masukan sektor tersebut, senilai Rp1,387 milyar digunakan oleh sektor jasa sebagai masukan sektor jasa tersebut dan sisanya Rp25 milyar dibeli oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi. Pembacaan tabel ke bawah berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran sektor pertanian senilai Rp73,5 milyar, senilai Rp19,845 milyar berupa masukan dari sektor itu sendiri, senilai Rp8,82 milyar berupa masukan yang berasal dari sektor industri, senilai Rp8,82 milyar berupa masukan dari sektor jasa, dan selebihnya merupakan nilai tambah (*added value*) sektor pertanian tersebut yaitu senilai Rp36 milyar.

Soal 4.13

Hubungan *input-output* 7 sektor perekonomian negara Amerika pada tahun 1963 ditunjukkan dalam tabel transaksi di bawah ini:

output / input	1	2	3	4	5	6	7	Perminta-an Akhir	Keluaran Total
1	17034	0	326	26753	260	2771	639	8908	56690
2	128	1111	737	14637	46	2727	189	967	20542
3	567	415	25	1400	1556	9556	1349	70445	85313
4	7649	1675	31588	179025	10172	22015	1687	205561	459372
5	2795	876	9789	24220	7244	10052	1553	103265	159794
6	4762	3501	5725	28828	23669	44491	1581	154788	267345
7	15	33	102	2555	2726	7371	14	1802	14618
Nilai tambah	23740	12931	37021	181955	11412	168362	7606		
Keluaran total	56690	20542	85313	459372	159794	267345	14618		

Tabel 4.3 Tabel Matriks Transaksi berorde 7×7

<u>Keterangan:</u>

1. Pertanian
2. Pertambangan
3. Konstruksi
4. Industri
5. Transportasi
6. Jasa
7. Kegiatan yang tidak jelas batasnya

Dari tabel transaksi diatas maka:

a) Hitunglah masing-masing koefisien masukannya.

b) Hitunglah output total yang baru untuk masing-masing sektor dan nilai tambahnya jika permintaan akhir terhadap sektor pertanian dan pertambangan ditargetkan naik 20%, sedangkan sektor industri dan transportasi naik 30% !

Penyelesaian:

a) Masing-masing koefisien inputnya adalah sebagai berikut:

$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{1703}{56690} = 0{,}3005 \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{0}{20542} = 0{,}0000 \quad a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{326}{85313} = 0{,}0038$
$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{128}{56690} = 0{,}0023 \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{1111}{20542} = 0{,}0541 \quad a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{737}{85313} = 0{,}0086$
$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{567}{56690} = 0{,}0100 \quad a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{415}{20542} = 0{,}0202 \quad a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{25}{85313} = 0{,}0003$
$a_{41} = \frac{x_{41}}{x_1} = \frac{7469}{56690} = 0{,}1349 \quad a_{42} = \frac{x_{42}}{x_2} = \frac{1675}{20542} = 0{,}0815 \quad a_{43} = \frac{x_{43}}{x_3} = \frac{31588}{85313} = 0{,}3703$
$a_{51} = \frac{x_{51}}{x_1} = \frac{2795}{56690} = 0{,}0493 \quad a_{52} = \frac{x_{52}}{x_2} = \frac{876}{20542} = 0{,}0426 \quad a_{53} = \frac{x_{53}}{x_3} = \frac{9789}{85313} = 0{,}1147$
$a_{61} = \frac{x_{61}}{x_1} = \frac{4762}{56690} = 0{,}0840 \quad a_{62} = \frac{x_{62}}{x_2} = \frac{3501}{20542} = 0{,}1704 \quad a_{63} = \frac{x_{63}}{x_3} = \frac{5725}{85313} = 0{,}0671$
$a_{71} = \frac{x_{71}}{x_1} = \frac{15}{56690} = 0{,}0003 \quad a_{72} = \frac{x_{72}}{x_2} = \frac{33}{20542} = 0{,}0016 \quad a_{73} = \frac{x_{73}}{x_3} = \frac{102}{85313} = 0{,}0012$

$a_{14} = \frac{x_{14}}{x_4} = \frac{26752}{459372} = 0{,}0582 \quad a_{15} = \frac{x_{15}}{x_5} = \frac{260}{159794} = 0{,}0016 \quad a_{16} = \frac{x_{16}}{x_6} = \frac{2771}{267345} = 0{,}0104$
$a_{24} = \frac{x_{24}}{x_4} = \frac{14637}{459372} = 0{,}0319 \quad a_{25} = \frac{x_{25}}{x_5} = \frac{46}{159794} = 0{,}0003 \quad a_{26} = \frac{x_{26}}{x_6} = \frac{2727}{267345} = 0{,}0102$
$a_{34} = \frac{x_{34}}{x_4} = \frac{1400}{459372} = 0{,}0030 \quad a_{35} = \frac{x_{35}}{x_5} = \frac{1556}{159794} = 0{,}0097 \quad a_{36} = \frac{x_{36}}{x_6} = \frac{9556}{267345} = 0{,}0357$
$a_{44} = \frac{x_{44}}{x_4} = \frac{179025}{459372} = 0{,}3897 \quad a_{45} = \frac{x_{45}}{x_5} = \frac{10172}{159794} = 0{,}0637 \quad a_{46} = \frac{x_{46}}{x_6} = \frac{22015}{267345} = 0{,}0823$
$a_{54} = \frac{x_{54}}{x_4} = \frac{24220}{459372} = 0{,}0527 \quad a_{55} = \frac{x_{55}}{x_5} = \frac{7244}{159794} = 0{,}0453 \quad a_{56} = \frac{x_{56}}{x_6} = \frac{10052}{267345} = 0{,}0376$
$a_{64} = \frac{x_{64}}{x_4} = \frac{28828}{459372} = 0{,}0628 \quad a_{65} = \frac{x_{65}}{x_5} = \frac{23669}{159794} = 0{,}1481 \quad a_{66} = \frac{x_{66}}{x_6} = \frac{44491}{267345} = 0{,}1664$
$a_{74} = \frac{x_{74}}{x_4} = \frac{2555}{459372} = 0{,}0056 \quad a_{75} = \frac{x_{75}}{x_5} = \frac{2726}{159794} = 0{,}0171 \quad a_{76} = \frac{x_{76}}{x_6} = \frac{7371}{267345} = 0{,}276$

$a_{17} = \frac{x_{17}}{x_7} = \frac{639}{14618} = 0{,}0437$
$a_{27} = \frac{x_{27}}{x_7} = \frac{189}{14618} = 0{,}0129$
$a_{37} = \frac{x_{37}}{x_7} = \frac{1349}{14618} = 0{,}0923$
$a_{47} = \frac{x_{47}}{x_7} = \frac{1687}{14618} = 0{,}1154$
$a_{57} = \frac{x_{57}}{x_7} = \frac{1553}{14618} = 0{,}1062$
$a_{67} = \frac{x_{67}}{x_7} = \frac{1581}{14618} = 0{,}1082$
$a_{77} = \frac{x_{77}}{x_7} = \frac{14}{14618} = 0{,}0010$

Matriks teknologinya adalah:

$$A=\begin{bmatrix} 0{,}3005 & 0{,}0000 & 0{,}0038 & 0{,}0582 & 0{,}0016 & 0{,}0104 & 0{,}0437 \\ 0{,}0023 & 0{,}0541 & 0{,}0086 & 0{,}0319 & 0{,}0003 & 0{,}0102 & 0{,}0129 \\ 0{,}0100 & 0{,}0202 & 0{,}0003 & 0{,}0030 & 0{,}0097 & 0{,}0357 & 0{,}0923 \\ 0{,}1349 & 0{,}0815 & 0{,}3703 & 0{,}3897 & 0{,}0637 & 0{,}0823 & 0{,}1154 \\ 0{,}0493 & 0{,}0426 & 0{,}1147 & 0{,}0527 & 0{,}0453 & 0{,}0376 & 0{,}1062 \\ 0{,}0840 & 0{,}1704 & 0{,}0671 & 0{,}0628 & 0{,}1481 & 0{,}1664 & 0{,}1082 \\ 0{,}0003 & 0{,}0016 & 0{,}0012 & 0{,}0056 & 0{,}0171 & 0{,}0276 & 0{,}0010 \end{bmatrix}$$

b) Mencari total output yang baru

b.1 Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss

Penyelesaian:

Dikarenakan permintaan akhir terhadap sektor pertanian dan pertambangan ditargetkan naik 20%, sedangkan sektor industri dan transportasi naik 30%, maka;

sektor pertanian $= (20\% \times 8908) + 8908 = 10689{,}6$

sektor pertambangan $= (20\% \times 967) + 967 = 1160{,}4$

sektor industri $= (30\% \times 205561) + 205561 = 267229{,}3$

sektor transportasi $= (30\% \times 103265) + 103265 = 134244{,}5$

$$\text{jadi } C = \begin{bmatrix} 10689{,}6 \\ 1160{,}4 \\ 70445 \\ 267229{,}3 \\ 134244{,}5 \\ 154788 \\ 1802 \end{bmatrix}$$

Menurut rumus umum $(I - A)X = C$

$$(I-A)=\begin{bmatrix}
1-0,3005 & -0,0000 & -0,0038 & -0,0582 & -0,0016 & -0,0104 & -0,0437 \\
-0,0023 & 1-0,0541 & -0,0086 & -0,0319 & -0,0003 & -0,0102 & -0,0129 \\
-0,0100 & -0,0202 & 1-0,0003 & -0,0030 & -0,0097 & -0,0357 & -0,0923 \\
-0,1349 & -0,0815 & -0,3703 & 1-0,3897 & -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 \\
-0,0493 & -0,0426 & -0,1147 & -0,0527 & 1-0,0453 & -0,0376 & -0,1062 \\
-0,0840 & -0,1704 & -0,0671 & -0,0628 & -0,1481 & 1-0,1664 & -0,1082 \\
-0,0003 & -0,0016 & -0,0012 & -0,0056 & -0,0171 & -0,0276 & 1-0,0010
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0,6995 & -0,0000 & -0,0038 & -0,0582 & -0,0016 & -0,0104 & -0,0437 \\
-0,0023 & 0,9459 & -0,0086 & -0,0319 & -0,0003 & -0,0102 & -0,0129 \\
-0,0100 & -0,0202 & 0,9997 & -0,0030 & -0,0097 & -0,0357 & -0,0923 \\
-0,1349 & -0,0815 & -0,3703 & 0,6103 & -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 \\
-0,0493 & -0,0426 & -0,1147 & -0,0527 & 0,9547 & -0,0376 & -0,1062 \\
-0,0840 & -0,1704 & -0,0671 & -0,0628 & -0,1481 & 0,8336 & -0,1082 \\
-0,0003 & -0,0016 & -0,0012 & -0,0056 & -0,0171 & -0,0276 & 0,999
\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10689,6 \\ 1160,4 \\ 70445 \\ 267229,3 \\ 134244,5 \\ 154788 \\ 1802 \end{bmatrix}$$

Matriks lengkapnya $(I-A)C$ adalah

$$\begin{bmatrix}
0,6995 & -0,0000 & -0,0038 & -0,0582 & -0,0016 & -0,0104 & -0,0437 & 10689,6 \\
-0,0023 & 0,9459 & -0,0086 & -0,0319 & -0,0003 & -0,0102 & -0,0129 & 1160,4 \\
-0,0100 & -0,0202 & 0,9997 & -0,0030 & -0,0097 & -0,0357 & -0,0923 & 70445 \\
-0,1349 & -0,0815 & -0,3703 & 0,6103 & -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 & 267229,3 \\
-0,0493 & -0,0426 & -0,1147 & -0,0527 & 0,9547 & -0,0376 & -0,1062 & 134244,5 \\
-0,0840 & -0,1704 & -0,0671 & -0,0628 & -0,1481 & 0,8336 & -0,1082 & 154788 \\
-0,0003 & -0,0016 & -0,0012 & -0,0056 & -0,0171 & -0,0276 & 0,999 & 1802
\end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
0{,}6995 & -0{,}0000 & -0{,}0038 & -0{,}0582 & -0{,}0016 & -0{,}0104 & -0{,}0437 & 10689{,}6 \\
-0{,}0023 & 0{,}9459 & -0{,}0086 & -0{,}0319 & -0{,}0003 & -0{,}0102 & -0{,}0129 & 1160{,}4 \\
-0{,}0100 & -0{,}0202 & 0{,}9997 & -0{,}0030 & -0{,}0097 & -0{,}0357 & -0{,}0923 & 70445 \\
-0{,}1349 & -0{,}0815 & -0{,}3703 & 0{,}6103 & -0{,}0637 & -0{,}0823 & -0{,}1154 & 267229{,}3 \\
-0{,}0493 & -0{,}0426 & -0{,}1147 & -0{,}0527 & 0{,}9547 & -0{,}0376 & -0{,}1062 & 134244{,}5 \\
-0{,}0840 & -0{,}1704 & -0{,}0671 & -0{,}0628 & -0{,}1481 & 0{,}8336 & -0{,}1082 & 154788 \\
-0{,}0003 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}999 & 1802
\end{bmatrix}
\overset{H_{1}\left(\frac{1}{0,6995}\right)}{\approx}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -0{,}0057 & -0{,}0832 & -0{,}0023 & -0{,}0148 & -0{,}0625 & 15281{,}77 \\
-0{,}0023 & 0{,}9459 & -0{,}0086 & -0{,}0319 & -0{,}0003 & -0{,}0102 & -0{,}0129 & 1160{,}4 \\
-0{,}0100 & -0{,}0202 & 0{,}9997 & -0{,}0030 & -0{,}0097 & -0{,}0357 & -0{,}0923 & 70445 \\
-0{,}1349 & -0{,}0815 & -0{,}3703 & 0{,}6103 & -0{,}0637 & -0{,}0823 & -0{,}1154 & 267229{,}3 \\
-0{,}0493 & -0{,}0426 & -0{,}1147 & -0{,}0527 & 0{,}9547 & -0{,}0376 & -0{,}1062 & 134244{,}5 \\
-0{,}0840 & -0{,}1704 & -0{,}0671 & -0{,}0628 & -0{,}1481 & 0{,}8336 & -0{,}1082 & 154788 \\
-0{,}0003 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}999 & 1802
\end{bmatrix}
\underset{\substack{H_{31(0,1)} \\ H_{41(0,1349)} \\ H_{51}(0,0493) \\ H_{61(0,0840)} \\ H_{71(0,0003)}}}{\overset{H_{2`(0,0023)}}{\approx}}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -0{,}0057 & -0{,}0832 & -0{,}0023 & -0{,}0148 & -0{,}0625 & 15281{,}77 \\
0 & 0{,}9459 & -0{,}0086 & -0{,}0321 & -0{,}0003 & -0{,}0102 & -0{,}0130 & 1195{,}55 \\
0 & -0{,}0202 & -1{,}0003 & -0{,}0383 & -0{,}0099 & -0{,}0372 & -0{,}0985 & 71973{,}17 \\
0 & -0{,}0815 & -0{,}3710 & 0{,}5991 & -0{,}064 & -0{,}0843 & -0{,}1238 & 269290{,}81 \\
0 & -0{,}0426 & -0{,}1149 & -0{,}0486 & 0{,}9546 & -0{,}0383 & -0{,}1093 & 134997{,}89 \\
0 & -0{,}1704 & -0{,}0718 & -0{,}0698 & -0{,}1483 & 0{,}8324 & -0{,}1135 & 1438{,}46 \\
0 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}9989 & 1086{,}58
\end{bmatrix}
\overset{H_{2}\left(\frac{1}{0,9459}\right)}{\approx}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & -0{,}0057 & -0{,}0832 & -0{,}0023 & -0{,}0148 & -0{,}0625 & 15281{,}77 \\
0 & 1 & -0{,}0091 & -0{,}0339 & -0{,}0003 & -0{,}0107 & -0{,}0137 & 1263{,}93 \\
0 & -0{,}0202 & -1{,}0003 & -0{,}0383 & -0{,}0099 & -0{,}0372 & -0{,}0985 & 71973{,}17 \\
0 & -0{,}0815 & -0{,}3710 & 0{,}5991 & -0{,}064 & -0{,}0843 & -0{,}1238 & 269290{,}81 \\
0 & -0{,}0426 & -0{,}1149 & -0{,}0486 & 0{,}9546 & -0{,}0383 & -0{,}1093 & 134997{,}89 \\
0 & -0{,}1704 & -0{,}0718 & -0{,}0698 & -0{,}1483 & 0{,}8324 & -0{,}1135 & 1438{,}46 \\
0 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}9989 & 1086{,}58
\end{bmatrix}
\underset{\substack{H_{42(0,0815)} \\ H_{52(0,0426)} \\ H_{62(0,1704)} \\ H_{72(0,0016)}}}{\overset{H_{32(0,0202)}}{\approx}}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & -1,0005 & -0,0389 & -0,0099 & -0,0375 & -0,0997 & 72281,86 \\ 0 & 0 & -0,3705 & 0,5923 & -0,0642 & -0,0855 & -0,1289 & 270536,27 \\ 0 & 0 & -0,1151 & -0,0521 & 0,9545 & -0,0389 & -0,1119 & 135648,89 \\ 0 & 0 & -0,0727 & -0,0839 & -0,1487 & 0,8298 & -0,1242 & 4042,47 \\ 0 & 0 & -0,0012 & -0,0057 & -0,0171 & -0,0276 & 0,9988 & 1111,03 \end{bmatrix} \overset{H_{3\left(\frac{-1}{1,0005}\right)}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & -0,3705 & 0,5923 & -0,0642 & -0,0855 & -0,1289 & 270536,27 \\ 0 & 0 & -0,1151 & -0,0521 & 0,9545 & -0,0389 & -0,1119 & 135648,89 \\ 0 & 0 & -0,0727 & -0,0839 & -0,1487 & 0,8298 & -0,1242 & 4042,47 \\ 0 & 0 & -0,0012 & -0,0057 & -0,0171 & -0,0276 & 0,9988 & 1111,03 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{53(0,1151)} \\ H_{53(0,0727)} \\ H_{73(0,0012)}}}{\overset{H_{43(0,3705)}}{\approx}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5937 & -0,0879 & -0,0716 & -0,0919 & 243769,22 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0516 & 0,9556 & -0,0346 & -0,1004 & 127333,41 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0836 & -0,1479 & 0,8325 & -0,1169 & -1209,79 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0057 & -0,0171 & -0,0276 & 0,9989 & 1024,34 \end{bmatrix} \overset{H_{4\left(\frac{1}{0,5937}\right)}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,1481 & -0,1206 & -0,1548 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0516 & 0,9556 & -0,0346 & -0,1004 & 127333,41 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0836 & -0,1479 & 0,8325 & -0,1169 & -1209,79 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0057 & -0,0171 & -0,0276 & 0,9989 & 1024,34 \end{bmatrix} \underset{\substack{H_{64(0,0836)} \\ H_{74(0,0057)}}}{\overset{H_{54(0,0516)}}{\approx}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,1481 & -0,1206 & -0,1548 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,9479 & -0,0408 & -0,1084 & 148520,02 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1603 & 0,8201 & -0,1298 & 33115,81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0179 & -0,0283 & 0,998 & 3364,72 \end{bmatrix} \overset{H_{5\left(\frac{1}{0,9479}\right)}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,1481 & -0,1206 & -0,1548 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,0430 & -0,1143 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1603 & 0,8201 & -0,1298 & 33115,81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0179 & -0,0283 & 0,998 & 3364,72 \end{bmatrix} \underset{H_{75(0,0179)}}{\overset{H_{65(0,1603)}}{\approx}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,1481 & -0,1206 & -0,1548 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,0430 & -0,1143 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8132 & -0,1481 & 58232,13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0284 & 0,9968 & 3828,97 \end{bmatrix} \overset{H_{6\left(\frac{1}{0,8132}\right)}}{\approx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,0057 & -0,0832 & -0,0023 & -0,0148 & -0,0625 & 15281,77 \\ 0 & 1 & -0,0091 & -0,0339 & -0,0003 & -0,0107 & -0,0137 & 1263,93 \\ 0 & 0 & 1 & 0,0039 & 0,0099 & 0,0375 & 0,0997 & -72245,74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,1481 & -0,1206 & -0,1548 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,0430 & -0,1143 & 410593,26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,1821 & 71608,62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0284 & 0,9968 & 3828,97 \end{bmatrix} \overset{H_{76(0,0284)}}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -0{,}0057 & -0{,}0832 & -0{,}0023 & -0{,}0148 & -0{,}0625 & 15281{,}77 \\ 0 & 1 & -0{,}0091 & -0{,}0339 & -0{,}0003 & -0{,}0107 & -0{,}0137 & 1263{,}93 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0039 & 0{,}0099 & 0{,}0375 & 0{,}0997 & -72245{,}74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1481 & -0{,}1206 & -0{,}1548 & 410593{,}26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}0430 & -0{,}1143 & 410593{,}26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1821 & 71608{,}62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}9916 & 5862{,}65 \end{array}\right] \overset{H_{7\left(\frac{1}{0,9916}\right)}}{\approx}$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & -0{,}0057 & -0{,}0832 & -0{,}0023 & -0{,}0148 & -0{,}0625 & 15281{,}77 \\ 0 & 1 & -0{,}0091 & -0{,}0339 & -0{,}0003 & -0{,}0107 & -0{,}0137 & 1263{,}93 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0039 & 0{,}0099 & 0{,}0375 & 0{,}0997 & -72245{,}74 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1481 & -0{,}1206 & -0{,}1548 & 410593{,}26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}0430 & -0{,}1143 & 410593{,}26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1821 & 71608{,}62 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5910{,}53 \end{array}\right]$$

Dengan substitusi balik diperoleh:

$x_1 = 5645{,}68$ $\qquad$ $x_5 = 160484{,}24$

$x_2 = 16505{,}97$ $\qquad$ $x_6 = 72684{,}93$

$x_3 = -78881{,}25$ $\qquad$ $x_7 = 5910{,}53$

$x_4 = 444041{,}73$

b.2 Dengan menggunakan metode Dekomposisi Crout

Penyelesaian:

Menurut rumus umum $(I - A)X = C$

$$\begin{bmatrix} 0{,}6995 & -0{,}0000 & -0{,}0038 & -0{,}0582 & -0{,}0016 & -0{,}0104 & -0{,}0437 \\ -0{,}0023 & 0{,}9459 & -0{,}0086 & -0{,}0319 & -0{,}0003 & -0{,}0102 & -0{,}0129 \\ -0{,}0100 & -0{,}0202 & 0{,}9997 & -0{,}0030 & -0{,}0097 & -0{,}0357 & -0{,}0923 \\ -0{,}1349 & -0{,}0815 & -0{,}3703 & 0{,}6103 & -0{,}0637 & -0{,}0823 & -0{,}1154 \\ -0{,}0493 & -0{,}0426 & -0{,}1147 & -0{,}0527 & 0{,}9547 & -0{,}0376 & -0{,}1062 \\ -0{,}0840 & -0{,}1704 & -0{,}0671 & -0{,}0628 & -0{,}1481 & 0{,}8336 & -0{,}1082 \\ -0{,}0003 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10689{,}6 \\ 1160{,}4 \\ 70445 \\ 267229{,}3 \\ 134244{,}5 \\ 154788 \\ 1802 \end{bmatrix}$$

$$(I - A) = \begin{bmatrix} 0{,}6995 & -0{,}0000 & -0{,}0038 & -0{,}0582 & -0{,}0016 & -0{,}0104 & -0{,}0437 \\ -0{,}0023 & 0{,}9459 & -0{,}0086 & -0{,}0319 & -0{,}0003 & -0{,}0102 & -0{,}0129 \\ -0{,}0100 & -0{,}0202 & 0{,}9997 & -0{,}0030 & -0{,}0097 & -0{,}0357 & -0{,}0923 \\ -0{,}1349 & -0{,}0815 & -0{,}3703 & 0{,}6103 & -0{,}0637 & -0{,}0823 & -0{,}1154 \\ -0{,}0493 & -0{,}0426 & -0{,}1147 & -0{,}0527 & 0{,}9547 & -0{,}0376 & -0{,}1062 \\ -0{,}0840 & -0{,}1704 & -0{,}0671 & -0{,}0628 & -0{,}1481 & 0{,}8336 & -0{,}1082 \\ -0{,}0003 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}999 \end{bmatrix}$$

Kolom pertama *L:*

$l_{11} = a_{11} = 0{,}6995$

$l_{21} = a_{21} = -0{,}0023$

$l_{31} = a_{31} = -0{,}0100$

$l_{41} = a_{41} = -0{,}1349$

$l_{51} = a_{51} = -0{,}0493$

$l_{61} = a_{61} = -0{,}0840$

$l_{71} = a_{71} = -0{,}0003$

Baris pertama *U*:

$u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} = \frac{0}{0{,}6995} = 0$

$u_{14} = \frac{a_{14}}{l_{11}} = \frac{-0{,}0582}{0.6995} = -0{,}0832$

$u_{13} = \frac{a_{13}}{l_{11}} = \frac{-0{,}0038}{0{,}6995} = -0{,}0054$

$u_{15} = \frac{a_{15}}{l_{11}} = \frac{-0{,}0016}{0{,}6995} = -0{,}0023$

$u_{16} = \frac{a_{16}}{l_{11}} = \frac{-0{,}0104}{0{,}6995} = -0{,}0149$

$u_{17} = \frac{a_{17}}{l_{11}} = \frac{-0{,}0437}{0{,}6995} = -0{,}0625$

Kolom kedua *L*:

$$l_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 0{,}9459 - (-0{,}0023)(0) = 0{,}9459$$
$$l_{32} = a_{32} - l_{31}u_{12} = -0{,}0202 - (-0{,}1)(0) = -0{,}0202$$
$$l_{42} = a_{42} - l_{41}u_{12} = -0{,}0815 - (-0{,}1349)(0) = -0{,}0815$$
$$l_{52} = a_{52} - l_{5}u_{12} = -0{,}0426 - (-0{,}0493)(0) = -0{,}0426$$
$$l_{62} = a_{62} - l_{61}u_{12} = -0{,}1704 - (-0{,}0840)(0) = -0{,}1704$$
$$l_{72} = a_{72} - l_{71}u_{12} = -0{,}0016 - (-0{,}0003)(0) = -0{,}0016$$

Baris kedua *U*:

$$u_{23} = \frac{a_{23} - l_{21}u_{13}}{l_{22}} = \frac{-0{,}0086 - (-0{,}0023)(-0{,}0054)}{0{,}9459} = -0{,}0092$$
$$u_{24} = \frac{a_{24} - l_{21}u_{14}}{l_{22}} = \frac{-0{,}0319 - (-0{,}0023)(-0{,}0832)}{0{,}9459} = -0{,}0339$$
$$u_{25} = \frac{a_{25} - l_{21}u_{15}}{l_{22}} = \frac{-0{,}0003 - (-0{,}0023)(-0{,}0023)}{0{,}9459} = -0{,}0003$$
$$u_{26} = \frac{a_{26} - l_{21}u_{16}}{l_{22}} = \frac{-0{,}0120 - (-0{,}0023)(-0{,}0149)}{0{,}9459} = -0{,}0108$$
$$u_{27} = \frac{a_{27} - l_{21}u_{17}}{l_{22}} = \frac{-0{,}0129 - (-0{,}0023)(-0{,}0625)}{0{,}9459} = -0{,}0138$$

Kolom ketiga *L*:

$$l_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = -0{,}9997 - (-0{,}1)(-0{,}0054) - (-0{,}0202)(-0{,}0092) = -1{,}0004$$
$$l_{43} = a_{43} - l_{41}u_{13} - l_{42}u_{23} = -0{,}3703 - (-0{,}1349)(-0{,}0054) - (-0{,}0815)(-0{,}0092) = -0{,}3718$$
$$l_{53} = a_{53} - l_{51}u_{13} - l_{52}u_{23} = -0{,}1147 - (-0{,}0493)(-0{,}0054) - (-0{,}0426)(-0{,}0092) = -0{,}1154$$
$$l_{63} = a_{63} - l_{61}u_{13} - l_{62}u_{23} = -0{,}0671 - (-0{,}0840)(-0{,}0054) - (-0{,}1704)(-0{,}0092) = -0{,}0692$$
$$l_{73} = a_{73} - l_{71}u_{13} - l_{72}u_{23} = -0{,}0012 - (-0{,}0003)(-0{,}0054) - (-0{,}0016)(-0{,}0092) = -0{,}0012$$

Baris ketiga *U*:

$$u_{34} = \frac{a_{34} - l_{31}u_{14} - l_{32}u_{24}}{l_{33}} = \frac{-0{,}030 - (-0{,}1)(-0{,}0832) - (-0{,}0202)(-0{,}0339)}{-1{,}0004} = \frac{-0{,}039}{-1{,}0004} = 0{,}0389$$

$$u_{35} = \frac{a_{35} - l_{31}u_{15} - l_{32}u_{25}}{l_{33}} = \frac{-0{,}0097 - (-0{,}1)(-0{,}0023) - (-0{,}0202)(-0{,}0003)}{-1{,}0004} = \frac{-0{,}0120}{-1{,}0004} = 0.0120$$

$$u_{36} = \frac{a_{36} - l_{31}u_{16} - l_{32}u_{2}}{l_{33}} = \frac{-0{,}0357 - (-0{,}1)(-0{,}0149) - (-0{,}0202)(-0{,}0108)}{-1{,}0004} = \frac{-0{,}0374}{-1{,}0004} = 0{,}0374$$

$$u_{37} = \frac{a_{37} - l_{31}u_{17} - l_{32}u_{27}}{l_{33}} = \frac{-0{,}0923 - (-0{,}1)(-0{,}0625) - (-0{,}0202)(-0{,}0138)}{-1{,}0004} = \frac{-0{,}989}{-1{,}0004} = 0{,}0989$$

Kolom keempat L:

$$
\begin{aligned}
l_{44} &= a_{44} - l_{41}u_{14} - l_{42}u_{24} - l_{43}u_{34} \\
&= 0{,}6103 - (-0{,}1349)(-0{,}0832) - (-0{,}0815)(-0{,}0339) - (-0{,}3718)(0{,}0389) = 0{,}51 \\
l_{54} &= a_{54} - l_{51}u_{14} - l_{52}u_{24} - l_{53}u_{34} \\
&= -0{,}0527 - (-0{,}0493)(-0{,}0832) - (-0{,}0426)(-0{,}0339) - (-0{,}1154)(0{,}0389) = -0{,}0537 \\
l_{64} &= a_{64} - l_{61}u_{14} - l_{62}u_{24} - l_{63}u_{34} \\
&= -0{,}0628 - (-0{,}0840)(-0{,}0832) - (-0{,}1704)(-0{,}0339) - (-0{,}0692)(0{,}0389) = -0{,}0728 \\
l_{74} &= a_{74} - l_{71}u_{14} - l_{72}u_{24} - l_{73}u_{34} \\
&= -0{,}0056 - (-0{,}0003)(-0{,}0832) - (-0{,}0016)(-0{,}0339) - (-0{,}0012)(0{,}0389) = -0{,}0056
\end{aligned}
$$

Baris keempat U:

$$
\begin{aligned}
u_{45} &= \frac{a_{45} - l_{41}u_{15} - l_{42}u_{25} - l_{43}u_{35}}{l_{44}} \\
&= \frac{-0{,}0637 - (-0{,}1349)(-0{,}0023) - (-0{,}0815)(-0{,}0003) - (-0{,}3718)(0{,}0120)}{0{,}51} = \frac{-0{,}0595}{0{,}51} = -0{,}1167 \\
u_{46} &= \frac{a_{46} - l_{41}u_{16} - l_{42}u_{26} - l_{43}u_{36}}{l_{44}} \\
&= \frac{-0{,}0823 - (-0{,}1349)(-0{,}0149) - (-0{,}0815)(-0{,}0108) - (-0{,}3718)(0{,}0374)}{0{,}51} = \frac{-0{,}0713}{0{,}51} = -0{,}1398 \\
u_{47} &= \frac{a_{47} - l_{41}u_{17} - l_{42}u_{27} - l_{43}u_{37}}{l_{44}} \\
&= \frac{-0{,}1154 - (-0{,}1349)(-0{,}0625) - (-0{,}0815)(-0{,}0138) - (-0{,}3718)(0{,}0989)}{0{,}51} = \frac{-0{,}0881}{0{,}51} = -0{,}1727
\end{aligned}
$$

Kolom kelima L:

$$
\begin{aligned}
l_{55} &= a_{55} - l_{51}u_{15} - l_{52}u_{25} - l_{53}u_{35} - l_{54}u_{45} \\
&= 0{,}9547 - (-0{,}0493)(-0{,}0023) - (-0{,}0426)(-0{,}0003) - (-0{,}1154)(0{,}0120) - (-0{,}0537)(-0{,}1167) \\
&= 0{,}9497 \\
l_{65} &= a_{65} - l_{61}u_{15} - l_{62}u_{25} - l_{63}u_{35} - l_{64}u_{45} \\
&= -0{,}1481 - (-0{,}0840)(-0{,}0023) - (-0{,}1704)(-0{,}0003) - (-0{,}0692)(0{,}0120) - (-0{,}0728)(-0{,}1167) \\
&= -0{,}1561 \\
l_{75} &= a_{75} - l_{71}u_{15} - l_{72}u_{25} - l_{73}u_{35} - l_{74}u_{45} \\
&= -0{,}0171 - (-0{,}0003)(-0{,}0023) - (-0{,}0016)(-0{,}0003) - (-0{,}0012)(0{,}0120) - (-0{,}0056)(-0{,}1167) \\
&= -0{,}0178
\end{aligned}
$$

Baris kelima U:

$$
\begin{aligned}
u_{56} &= \frac{a_{56} - l_{51}u_{16} - l_{52}u_{26} - l_{53}u_{36} - l_{54}u_{46}}{l_{55}} \\
&= \frac{-0{,}0376 - (-0{,}0493)(-0{,}0149) - (-0{,}0426)(-0{,}0108) - |-0{,}1154|(0{,}037) - (-0{,}0537)(-0{,}1398)}{0{,}9497} = \frac{-0{,}042}{0{,}9497} = -0{,}0442
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{57} &= \frac{a_{57} - l_{51}u_{17} - l_{52}u_{27} - l_{53}u_{37} - l_{54}u_{47}}{l_{55}} \\
&= \frac{-0{,}1062 - (-0{,}0493)(-0{,}0625) - (-0{,}0426)(-0{,}0138) - (-0{,}1154)(0{,}0989) - (00{,}0537)(-0{,}1727)}{0{,}9497} = \frac{-0{,}1078}{0{,}9497} = -0{,}1135
\end{aligned}
$$

Kolom keenam *L*:

$$
\begin{aligned}
l_{66} &= a_{66} - l_{61}u_{16} - l_{62}u_{26} - l_{63}u_{36} - l_{64}u_{46} - l_{65}u_{56} \\
&= 0{,}8336 - (-0{,}0840)(-0{,}0149) - (-0{,}1704)(-0{,}0108) - (-0{,}0692)(0{,}0374) \\
&\quad - (-0{,}0728)(-0{,}1398) - (-0{,}1561)(-0{,}0442) \\
&= -0{,}816
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
l_{76} &= a_{76} - l_{71}u_{16} - l_{72}u_{26} - l_{73}u_{36} - l_{74}u_{46} - l_{75}u_{56} \\
&= -0{,}0276 - (-0{,}0003)(-{,}0149) - (-0{,}0016)(-0{,}01081) - (-0{,}0012)(0{,}0374) \\
&\quad - (-0{,}0056)(-0{,}1398) - (-0{,}0178)(-0{,}0442) \\
&= -0{,}0292
\end{aligned}
$$

Baris keenam *U*:

$$
\begin{aligned}
u_{67} &= \frac{a_{67} - l_{61}u_{17} - l_{62}u_{27} - l_{63}u_{37} - l_{64}u_{47} - l_{65}u_{57}}{l_{66}} \\
&= \frac{-0{,}1082 - (-0{,}0840)(-0{,}0625) - (-0{,}1704)(-0{,}0318) - (-0{,}0692)(0{,}0989) - (-0{,}0728)(-0{,}1727) - (-0{,}1561)(-0{,}1135)}{0{,}816} \\
&= \frac{-0{,}1394}{0{,}816} = -0{,}1708
\end{aligned}
$$

Kolom ketujuh *L*;

$$
\begin{aligned}
l_{77} &= a_{77} - l_{71}u_{17} - l_{72}u_{27} - l_{73}u_{37} - l_{74}u_{47} - l_{75}u_{57} - l_{76}u_{67} \\
&= 0{,}999 - (-0{,}0003)(-0{,}0625) - (-0{,}0016)(-0{,}0138) - (-0{,}0012)(0{,}0989) \\
&\quad - (0{,}0056)(-0{,}1727) - (-0{,}0178)(-0{,}1135) - (-0{,}0292)(-0{,}1708) \\
&= 0{,}9913
\end{aligned}
$$

$$
\text{Jadi } L = \begin{bmatrix}
0{,}6995 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}0023 & 0{,}9459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}1 & -0{,}0202 & -1{,}0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}1349 & -0{,}0815 & -0{,}3718 & 0{,}51 & 0 & 0 & 0 \\
-0{,}0493 & -0{,}0426 & -0{,}1154 & -0{,}0537 & 0{,}9497 & 0 & 0 \\
-0{,}0840 & -0{,}1704 & -0{,}0692 & -0{,}0728 & -0{,}1561 & 0{,}816 & 0 \\
-0{,}0003 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0178 & -0{,}0292 & 0{,}9913
\end{bmatrix}
$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0054 & -0{,}00832 & -0{,}0023 & -0{,}0149 & -0{,}0625 \\ 0 & 1 & -0{,}0092 & -0{,}0339 & -0{,}0003 & -0{,}0108 & -0{,}0138 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0389 & 0{,}0120 & 0{,}0374 & 0{,}0989 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1167 & -0{,}1398 & -0{,}1727 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}0442 & -0{,}1135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1708 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai Y digunakan rumus $LY = B$

$$L = \begin{bmatrix} 0{,}6995 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0023 & 0{,}9459 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}0202 & -1{,}0004 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}1349 & -0{,}0815 & -0{,}3718 & 0{,}51 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0493 & -0{,}0426 & -0{,}1154 & -0{,}0537 & 0{,}9497 & 0 & 0 \\ -0{,}0840 & -0{,}1704 & -0{,}0692 & -0{,}0728 & -0{,}1561 & 0{,}816 & 0 \\ -0{,}0003 & -0{,}0016 & -0{,}0012 & -0{,}0056 & -0{,}0178 & -0{,}0292 & 0{,}9913 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10689{,}6 \\ 1160{,}4 \\ 70445 \\ 267229{,}3 \\ 134244{,}5 \\ 154788 \\ 1802 \end{bmatrix}$$

Dengan substitusi maju diperoleh;

$$\begin{array}{ll} y_1 = 15281{,}77 & y_5 = 160360{,}62 \\ y_2 = 1263{,}93 & y_6 = 197192{,}94 \\ y_3 = -71969{,}92 & y_7 = 5910{,}53 \\ y_4 = 475755{,}69 & \end{array}$$

atau $$Y' = \begin{bmatrix} 15281{,}77 \\ 1263{,}93 \\ -71969{,}92 \\ 475755{,}69 \\ 160360{,}62 \\ 197192 \\ 5910{,}53 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai X dengan menggunakan rumus $UX = Y'$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}0054 & -0{,}00832 & -0{,}0023 & -0{,}0149 & -0{,}0625 \\ 0 & 1 & -0{,}0092 & -0{,}0339 & -0{,}0003 & -0{,}0108 & -0{,}0138 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}0389 & 0{,}0120 & 0{,}0374 & 0{,}0989 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1167 & -0{,}1398 & -0{,}1727 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}0442 & -0{,}1135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0{,}1708 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15281{,}77 \\ 1263{,}93 \\ -71969{,}92 \\ 475755{,}69 \\ 160360{,}62 \\ 197192 \\ 5910{,}53 \end{bmatrix}$$

dengan substitusi balik diperoleh;

$x_1 = 56465{,}68$ $\qquad$ $x_5 = 160484{,}24$

$x_2 = 16505{,}97$ $\qquad$ $x_6 = 72684{,}93$

$x_3 = -78881{,}25$ $\qquad$ $x_7 = 5910{,}53$

$x_4 = 444041{,}73$

atau

$$X = \begin{bmatrix} 15281{,}77 \\ 1263{,}93 \\ -71969{,}92 \\ 475755{,}69 \\ 160360{,}62 \\ 197192 \\ 5910{,}53 \end{bmatrix}$$

b.3 Dengan Menggunakan Metode Partisi Matriks

Penyelesaian:

$$(I-A)=\begin{bmatrix} 0,6995 & -0,0000 & -0,0038 & -0,0582 & -0,0016 & -0,0104 & -0,0437 \\ -0,0023 & 0,9459 & -0,0086 & -0,0319 & -0,0003 & -0,0102 & -0,0129 \\ -0,0100 & -0,0202 & 0,9997 & -0,0030 & -0,0097 & -0,0357 & -0,0923 \\ -0,1349 & -0,0815 & -0,3703 & 0,6103 & -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 \\ -0,0493 & -0,0426 & -0,1147 & -0,0527 & 0,9547 & -0,0376 & -0,1062 \\ -0,0840 & -0,1704 & -0,0671 & -0,0628 & -0,1481 & 0,8336 & -0,1082 \\ -0,0003 & -0,0016 & -0,0012 & -0,0056 & -0,0171 & -0,0276 & 0,999 \end{bmatrix}$$

Missal $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix}$

Partisi

$$(I-A)=\left[\begin{array}{cc:ccccc} 0,6995 & -0,0000 & -0,0038 & -0,0582 & -0,0016 & -0,0104 & -0,0437 \\ -0,0023 & 0,9459 & -0,0086 & -0,0319 & -0,0003 & -0,0102 & -0,0129 \\ \hdashline -0,0100 & -0,0202 & 0,9997 & -0,0030 & -0,0097 & -0,0357 & -0,0923 \\ -0,1349 & -0,0815 & -0,3703 & 0,6103 & -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 \\ -0,0493 & -0,0426 & -0,1147 & -0,0527 & 0,9547 & -0,0376 & -0,1062 \\ -0,0840 & -0,1704 & -0,0671 & -0,0628 & -0,1481 & 0,8336 & -0,1082 \\ -0,0003 & -0,0016 & -0,0012 & -0,0056 & -0,0171 & -0,0276 & 0,999 \end{array}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$$

$$S=\left[\begin{array}{cc:ccc} -0,9997 & -0,0030 & -0,0097 & -0,0357 & 0,0923 \\ -0,3703 & 0,6103 & -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 \\ \hdashline -0,1147 & -0,0527 & 0,9547 & -0,0376 & -0,1064 \\ -0,0671 & -0,0628 & -0,1481 & 0,8336 & -0,1082 \\ -0,0012 & -0,0056 & -0,0171 & -0,0276 & 0,999 \end{array}\right]$$

Misal $S^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Partisi $S = \begin{bmatrix} K & L \\ M & N \end{bmatrix}$

$$N = \left[\begin{array}{c:cc} 0{,}9547 & -0{,}0376 & -0{,}1064 \\ \hdashline -0{,}1481 & 0{,}8336 & -0{,}1082 \\ -0{,}0171 & -0{,}0276 & 0{,}999 \end{array}\right]; \text{ missal } N^{-1} = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix}$$

Partisi $N = \begin{bmatrix} I & J \\ X & Z \end{bmatrix}$

Dicari Z^{-1} untuk menentukan *T*, *U*, *V*, dan *W*

$$Z = \begin{bmatrix} 0{,}8336 & -0{,}1082 \\ -0{,}0276 & 0{,}999 \end{bmatrix};$$

$$\det Z = (0{,}8336 \times 0{,}999) - (-0{,}1082 \times -0{,}0276) = 0{,}8298$$

$$Z^{-1} = \tfrac{1}{\det(Z)} Adj(Z)$$

$$= \tfrac{1}{0{,}8298} \begin{bmatrix} 0{,}999 & 0{,}1082 \\ 0{,}0276 & 0{,}8336 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}2039 & 0{,}1304 \\ 0{,}0333 & 1{,}0046 \end{bmatrix}$$

- $T = (I - JZ^{-1}X)^{-1}$

$$JZ^{-1} = [-0{,}0376 \quad -0{,}1064] \begin{bmatrix} 1{,}2039 & 0{,}1304 \\ 0{,}0333 & 1{,}0046 \end{bmatrix} = [-0{,}0488 \quad -0{,}1118]$$

$$JZ^{-1}X = [-0{,}0488 \quad -0{,}1118] \begin{bmatrix} -0{,}1481 \\ -0{,}0171 \end{bmatrix} = [0{,}0091]$$

$$\left(I - JZ^{-1}X\right) = (0{,}9547 - 0{,}0091) = 0{,}9456$$
$$\left(I - JZ^{-1}X\right)^{-1} = (0{,}9456)^{-1} = 1{,}0575$$

- $U = -TJZ^{-1}$
  $= -1{,}0575\begin{bmatrix} 0{,}0488 & -0{,}1118 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}0516 & 0{,}1182 \end{bmatrix}$

- $V = -Z^{-1}XT \quad \rightarrow \quad Z^{-1}X = \begin{bmatrix} 1{,}2039 & 0{,}1304 \\ 0{,}0333 & 1{,}0046 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}1481 \\ -0{,}0171 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1805 \\ -0{,}0221 \end{bmatrix}$

$$-Z^{-1}XT = \begin{bmatrix} 0{,}1805 \\ 0{,}0221 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}0575 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1909 \\ 0{,}0234 \end{bmatrix}$$

- $W = Z^{-1} - Z^{-1}XU$

$$Z^{-1}XU = \begin{bmatrix} -0{,}1805 \\ -0{,}022` \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0{,}0516 & 0{,}1182 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0093 & -0{,}0213 \\ 0{,}0014 & -0{,}0026 \end{bmatrix}$$

$$Z^{-1} - Z^{-1}XU = \begin{bmatrix} 1{,}2039 & 0{,}1304 \\ 0{,}0333 & 1{,}0046 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}0093 & -0{,}0213 \\ 0{,}0014 & -0{,}0026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}1946 & 0{,}1517 \\ 0{,}0319 & 1{,}0072 \end{bmatrix}$$

Jadi $N^{-1} = \begin{bmatrix} T & U \\ V & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0575 & -0{,}0516 & 0{,}1182 \\ 0{,}1909 & 1{,}1946 & 0{,}1517 \\ 0{,}0234 & 0{,}0319 & 1{,}0072 \end{bmatrix}$

- $A = \left(K - LN^{-1}M\right)^{-1}$

$$LN^{-1} = \begin{bmatrix} -0{,}0097 & -0{,}0357 & 0{,}0923 \\ -0{,}0637 & -0{,}0823 & -0{,}1154 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1{,}0575 & -0{,}0516 & 0{,}1182 \\ 0{,}1909 & 1{,}1946 & 0{,}1517 \\ 0{,}0234 & 0{,}0319 & 1{,}0072 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}0149 & -0{,}0392 & 0{,}0864 \\ -0{,}0251 & -0{,}0987 & -0{,}1362 \end{bmatrix}$$

$$LN^{-1}M = \begin{bmatrix} -0,0149 & -0,0392 & 0,0864 \\ -0,0251 & -0,0987 & -0,1362 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,1147 & -0,0527 \\ -0,0671 & -0,0628 \\ -0,0012 & -0,0056 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0042 & 0,0028 \\ 0,0097 & 0,0083 \end{bmatrix}$$

$$\left(K - LN^{-1}M\right) = \begin{bmatrix} -0,9997 & -0,030 \\ -0,3703 & 0,6103 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0042 & 0,0028 \\ 0,0097 & 0,0083 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0039 & -0,0328 \\ -0,38 & 0,602 \end{bmatrix}$$

misal $\left(K - LN^{-1}M\right) = \alpha$

det $\alpha = (-1,0039 \times 0,602) - (-0,38 \times -0,0328) = -0,6168$

$$\alpha^{-1} = \tfrac{1}{\det \alpha} \operatorname{adj}(\alpha) = \tfrac{1}{-0,6168} \begin{bmatrix} 0,602 & 0,0328 \\ 0,38 & -1,0039 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,976 & -0,0532 \\ -0,6161 & 1,6276 \end{bmatrix}$$

- $B = -ALN^{-1} = \begin{bmatrix} 0,976 & 0,0532 \\ 0,6161 & -1,6276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0149 & -0,0392 & 0,0864 \\ -0,0251 & -0,0987 & -0,1362 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -0,0158 & -0,0436 & 0,0771 \\ 0,0317 & 0,1364 & 0,2749 \end{bmatrix}$$

- $C = -N^{-1}MA$

$$-N^{-1}M = \begin{bmatrix} -1,0575 & 0,0516 & -0,1182 \\ -0,1909 & -1,1946 & -0,1517 \\ -0,0234 & -0,0319 & -1,0072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,1147 & -0,0527 \\ -0,0671 & -0,0628 \\ -0,0012 & -0,0056 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0,1179 & 0,0532 \\ 0,1023 & 0,0859 \\ 0,006 & 0,0104 \end{bmatrix}$$

$$-N^{-1}MA = \begin{bmatrix} 0,1179 & 0,532 \\ 0,1023 & 0,0859 \\ 0,006 & 0,0104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,976 & -0,0532 \\ -0,6161 & 1,6276 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,4429 & 0,8596 \\ -0,1527 & 0,1344 \\ -0,0123 & 0,0166 \end{bmatrix}$$

- $D = N^{-1} - N^{-1}MB$

$$-N^{-1}MB = \begin{bmatrix} 0,1179 & 0,0532 \\ 0,1023 & 0,0859 \\ 0,006 & 0,0104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,0097 & -0,0357 & 0,0923 \\ -0,0637 & -0,0823 & -0,1154 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0,0045 & -0,0086 & 0,0048 \\ -0,0064 & -0,0177 & -0,0005 \\ -0,0007 & -0,0011 & -0,0006 \end{bmatrix}$$

$$N^{-1} - N^{-1}MB = \begin{bmatrix} 1,0575 & -0,0516 & 0,1182 \\ 0,1909 & 1,1946 & 0,1517 \\ 0,0234 & 0,0319 & 1,0072 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0045 & -0,0086 & 0,0048 \\ -0,0064 & -0,0177 & -0,0005 \\ -0,0007 & -0,0011 & -0,0006 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,053 & -0,0602 & 0,123 \\ 0,1845 & 1,1769 & 0,1512 \\ 0,0227 & 0,0308 & 1,0066 \end{bmatrix}$$

Jadi, $S^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,976 & -0,0532 & -0,0158 & -0,0436 & 0,0771 \\ -0,6161 & 1,6276 & 0,0317 & 0,1364 & 0,2749 \\ -0,4429 & 0,8596 & 1,053 & -0,0602 & 0,123 \\ -0,1527 & 0,1344 & 0,1845 & 1,1769 & 0,1512 \\ -0,0123 & 0,0166 & 0,0227 & 0,0308 & 1,0066 \end{bmatrix}$

- $E = \left(P - QS^{-1}R\right)^{-1}$

$$QS^{-1} = \begin{bmatrix} -0,0038 & -0,0582 & -0,0016 & -0,0104 & -0,0437 \\ -0,0086 & -0,0319 & -0,0003 & -0,0102 & -0,0129 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,976 & -0,0532 & -0,0158 & -0,0436 & -0,0771 \\ -0,6161 & 1,627 & 0,0317 & 0,1364 & 0,2749 \\ -0,4429 & 0,8596 & 1,053 & -0,0602 & 0,123 \\ -0,1527 & 0,1344 & 0,1845 & 1,1769 & 0,1512 \\ -0,0123 & 0,0166 & 0,0227 & 0,308 & 10066 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,0424 & -0,0980 & -0,00633 & -0,0333 & -0,0614 \\ 0,0299 & -0,0529 & -0,0034 & -0,0120 & -0,0176 \end{bmatrix}$$

$$QS^{-1}R=\begin{bmatrix}0{,}0424 & -0{,}0980 & -0{,}00633 & -0{,}0333 & -0{,}0614\\ 0{,}0299 & -0{,}0529 & -0{,}0034 & -0{,}0120 & -0{,}0176\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0{,}1 & -0202\\ -0{,}1349 & -0{,}0815\\ -0{,}0493 & -0{,}0426\\ -0{,}0840 & -0{,}1704\\ -0{,}0003 & -0{,}0016\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0{,}0121 & 0{,}0135\\ 0{,}0697 & 0{,}0446\end{bmatrix}$$

$$\left(P-QS^{-1}R\right)=\begin{bmatrix}0{,}6995 & 0\\ -0{,}0023 & 0{,}9454\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0{,}0121 & 0{,}0135\\ 0{,}0697 & 0{,}0446\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}6874 & -0{,}0135\\ -0{,}072 & 0{,}9013\end{bmatrix}$$

misal $\left(P-QS^{-1}R\right)=\beta$

$$\det(\beta)=(0{,}6874\times 0{,}9013)-(-0{,}0135\times -0{,}072)=0{,}6186$$

$$\beta^{-1}=\tfrac{1}{\det(\beta)}\operatorname{adj}(\beta)=\tfrac{1}{0{,}6186}\begin{bmatrix}0{,}9013 & 0{,}0135\\ 0{,}072 & 0{,}6874\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1{,}4569 & 0{,}0218\\ 0{,}1164 & 1{,}1112\end{bmatrix}$$

- $F=-EQS^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}-1{,}4569 & -0{,}0218\\ -0{,}1164 & -0{,}1112\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}0424 & -0{,}0980 & -0{,}00633 & -0{,}0333 & -0{,}0614\\ 0{,}0299 & -0{,}0529 & -0{,}0034 & -0{,}0120 & -0{,}0176\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0{,}0683 & 0{,}1439 & 0{,}0039 & 0{,}0488 & 0{,}0899\\ -0{,}0381 & 0{,}0702 & 0{,}0045 & 0{,}0172 & 0{,}0267\end{bmatrix}$$

- $G=-S^{-1}RE$

$$-S^{-1}R=\begin{bmatrix}0{,}976 & 0{,}0532 & 0{,}0158 & 0{,}0436 & -0{,}0771\\ 0{,}6161 & -1{,}6276 & -0{,}0317 & -0{,}1364 & -0{,}2749\\ 0{,}4429 & -0{,}8596 & -1{,}053 & 0{,}0602 & -0{,}123\\ 0{,}1527 & -0{,}1344 & -0{,}1845 & -1{,}1769 & -0{,}1512\\ 0{,}0123 & -0{,}0166 & -0{,}0227 & -0{,}0308 & -1{,}0066\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0{,}1 & -0{,}0202\\ -0{,}1349 & -0{,}0815\\ -0{,}0493 & -0{,}0426\\ -0{,}0840 & -0{,}1704\\ -0{,}0003 & -0{,}0016\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} -0{,}1093 & -0{,}0319 \\ 0{,}1712 & 0{,}1450 \\ 0{,}1286 & 0{,}1166 \\ 0{,}1108 & 0{,}2164 \\ 0{,}005 & 0{,}0089 \end{bmatrix}
$$

$$
-S^{-1}RE = \begin{bmatrix} -0{,}1093 & -0{,}0319 \\ 0{,}1712 & 0{,}1450 \\ 0{,}1286 & 0{,}1166 \\ 0{,}1108 & 0{,}2164 \\ 0{,}005 & 0{,}0089 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}4569 & 0{,}0218 \\ 0{,}1164 & 1{,}1112 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1629 & -0{,}0378 \\ 0{,}2663 & 0{,}1648 \\ 0{,}2009 & 0{,}1321 \\ 0{,}1866 & 0{,}2429 \\ 0{,}0083 & 0{,}0099 \end{bmatrix}
$$

- $H = S^{-1} - S^{-1}RF$

$$
-S^{-1}RF = \begin{bmatrix} -0{,}1093 & -0{,}0319 \\ 0{,}17012 & 0{,}1450 \\ 0{,}1286 & 0{,}1166 \\ 0{,}1108 & 0{,}2164 \\ 0{,}005 & 0{,}0089 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}0683 & 0{,}1439 & 0{,}0093 & 0.0488 & 0{,}0899 \\ -0{,}0381 & 0{,}0702 & 0{,}0045 & 0{,}0172 & 0{,}0267 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 0{,}0087 & -0{,}0179 & -0{,}0011 & -0{,}0059 & -0{,}0107 \\ -0{,}01712 & 0{,}0347 & 0{,}0023 & 0{,}0108 & 0{,}0192 \\ -0{,}0132 & 0{,}0267 & 0{,}0017 & 0{,}0083 & 0{,}0147 \\ -0{,}0163 & 0{,}0321 & 0{,}0021 & 0{,}0091 & 0{,}0157 \\ -0{,}00064 & 0{,}0013 & 0{,}0001 & 0{,}0004 & 0{,}0007 \end{bmatrix}
$$

$$H = \begin{bmatrix} -0{,}976 & -0{,}0532 & -0{,}0158 & -0{,}0436 & 0{,}0771 \\ -0{,}6161 & 1{,}6276 & 0{,}0317 & 0{,}1364 & 0{,}2749 \\ -0{,}4429 & 0{,}8596 & 1{,}053 & -0{,}0602 & 0{,}123 \\ -0{,}1527 & 0{,}1344 & 0{,}1845 & 1{,}1769 & 0{,}1512 \\ -0{,}0123 & 0{,}0166 & 0{,}0227 & 0{,}0308 & 1{,}0066 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}0087 & -0{,}0179 & -0{,}0011 & -0{,}0059 & -0{,}0107 \\ -0{,}01712 & 0{,}0347 & 0{,}0023 & 0{,}0108 & 0{,}0192 \\ -0{,}0132 & 0{,}0267 & 0{,}0017 & 0{,}0083 & 0{,}0147 \\ -0{,}0163 & 0{,}0321 & 0{,}0021 & 0{,}0091 & 0{,}0157 \\ -0{,}00064 & 0{,}0013 & 0{,}0001 & 0{,}0004 & 0{,}0007 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0{,}9673 & -0{,}0711 & -0{,}0169 & -0{,}0377 & 0{,}0664 \\ -0{,}6332 & 1{,}6617 & 0{,}034 & 0{,}1472 & 0{,}2941 \\ -0{,}4561 & 0{,}8863 & 1{,}0547 & -0{,}0519 & 0{,}1377 \\ -0{,}169 & 0{,}1665 & 0{,}1866 & 1{,}186 & 0{,}1669 \\ -0{,}0129 & 0{,}0179 & 0{,}0228 & 0{,}0312 & 1{,}0073 \end{bmatrix}$$

Jadi $(I-A)^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}4569 & 0{,}0218 & -0{,}0683 & 0{,}1439 & 0{,}0093 & 0{,}0488 & 0{,}0899 \\ 0{,}1164 & 1{,}1112 & -0{,}0381 & 0{,}0702 & 0{,}0045 & 0{,}0172 & 0{,}0267 \\ -0{,}1629 & -0{,}0378 & -0{,}9673 & -0{,}0711 & -0{,}0169 & -0{,}0377 & 0{,}0664 \\ 0{,}2663 & 0{,}1648 & -0{,}06332 & 1{,}6617 & 0{,}034 & 0{,}1472 & 0{,}2941 \\ 0{,}2009 & 0{,}1321 & -0{,}04561 & 0{,}8863 & 1{,}0547 & -0{,}0519 & 0{,}1377 \\ 0{,}1866 & 0{,}2429 & -0{,}169 & 0{,}1665 & 0{,}1866 & 1{,}186 & 0{,}1669 \\ 0{,}0083 & 0{,}0099 & -0{,}0129 & 0{,}0179 & 0{,}0228 & 0{,}0312 & 1{,}0073 \end{bmatrix}$$

untuk mencari nilai X digunakan rumus $X = (I-A)^{-1}U$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}4569 & 0{,}0218 & -0{,}0683 & 0{,}1439 & 0{,}0093 & 0{,}0488 & 0{,}0899 \\ 0{,}1164 & 1{,}1112 & -0{,}0381 & 0{,}0702 & 0{,}0045 & 0{,}0172 & 0{,}0267 \\ -0{,}1629 & -0{,}0378 & -0{,}9673 & -0{,}0711 & -0{,}0169 & -0{,}0377 & 0{,}0664 \\ 0{,}2663 & 0{,}1648 & -0{,}06332 & 1{,}6617 & 0{,}034 & 0{,}1472 & 0{,}2941 \\ 0{,}2009 & 0{,}1321 & -0{,}04561 & 0{,}8863 & 1{,}0547 & -0{,}0519 & 0{,}1377 \\ 0{,}1866 & 0{,}2429 & -0{,}169 & 0{,}1665 & 0{,}1866 & 1{,}186 & 0{,}1669 \\ 0{,}0083 & 0{,}0099 & -0{,}0129 & 0{,}0179 & 0{,}0228 & 0{,}0312 & 1{,}0073 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10689{,}6 \\ 1160{,}4 \\ 70445 \\ 267229{,}3 \\ 134244{,}5 \\ 154788 \\ 1802 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15281{,}77 \\ 1263{,}93 \\ -71969{,}92 \\ 475755{,}69 \\ 160360{,}62 \\ 197192 \\ 5910{,}53 \end{bmatrix}$$

Dari ketiga metode tersebut dapat diperoleh:

- Keluaran total (*output total*) masing-masing sektor adalah:

Pertanian	= 56465,68
Pertambangan	= 16505,97
Konstruksi	= -78881,25
Industri	= 444041,73
Transportasi	= 160484,24
Jasa	= 72684,93
Kegiatan yang tidak jelas batasnya	= 5910,53

- Nilai tambah (*input primer*) sektor adalah

pertanian $= \frac{2374}{56690} \times 56465{,}68 = 23646{,}06$

pertambangan $= \frac{12931}{20542} \times 16505{,}97 = 10390{,}36$

konsrtuksi $= \frac{37021}{85313} \times -78881{,}25 = -34229{,}98$

industri $= \frac{181955}{459372} \times 444041{,}73 = 175882{,}76$

transportasi $= \frac{114121}{159794} \times 160484{,}24 = 114613{,}95$

jasa $= \frac{168362}{267345} \times 72684{,}93 = 45773{,}74$

kegiatan yang tidak jelas batasnya $= \frac{7606}{14618} \times 5910{,}53 = 3075{,}35$

- Untuk membuat tabel transaksi yang baru, terlebih dahulu menentukan koefisien teknologi yang baru, yaitu sebagai berikut:

$a_{11} = 0{,}3005 \times 56465{,}68 = 16967{,}94$	$a_{12} = 0{,}0000 \times 16505{,}97 = 0{,}0000$	$a_{13} = 0{,}0038 \times -78881{,}25 = -299{,}75$
$a_{21} = 0{,}0023 \times 56465{,}68 = 129{,}87$	$a_{22} = 0{,}0541 \times 16505{,}97 = 892{,}97$	$a_{23} = 0{,}0086 \times -78881{,}25 = -678{,}38$
$a_{31} = 0{,}0100 \times 56465{,}68 = 5646{,}57$	$a_{32} = 0{,}0202 \times 16505{,}97 = 3334{,}21$	$a_{33} = 0{,}0003 \times -78881{,}25 = -23{,}66$
$a_{41} = 0{,}1349 \times 56465{,}68 = 7617{,}22$	$a_{42} = 0{,}0815 \times 16505{,}97 = 1345{,}24$	$a_{43} = 0{,}3703 \times -78881{,}25 = -29209{,}73$
$a_{51} = 0{,}0493 \times 56465{,}68 = 2783{,}76$	$a_{52} = 0{,}0426 \times 16505{,}97 = 703{,}15$	$a_{53} = 0{,}1147 \times -78881{,}25 = -9047{,}68$
$a_{61} = 0{,}0840 \times 56465{,}68 = 4743{,}17$	$a_{62} = 0{,}1704 \times 16505{,}97 = 2812{,}62$	$a_{63} = 0{,}0671 \times -78881{,}25 = -529{,}93$
$a_{71} = 0{,}0003 \times 56465{,}68 = 16{,}94$	$a_{72} = 0{,}0016 \times 16505{,}97 = 26{,}41$	$a_{73} = 0{,}0012 \times -78881{,}25 = -94{,}66$

$a_{14} = 0{,}0582 \times 444041{,}73 = 25843{,}23$	$a_{15} = 0{,}0016 \times 160484{,}24 = 256{,}77$	$a_{16} = 0{,}0104 \times 72684{,}24 = 755{,}92$
$a_{24} = 0{,}0319 \times 444041{,}73 = 14164{,}93$	$a_{25} = 0{,}0003 \times 160484{,}24 = 48{,}15$	$a_{26} = 0{,}0102 \times 72684{,}24 = 946{,}36$
$a_{34} = 0{,}0030 \times 444041{,}73 = 1332{,}13$	$a_{35} = 0{,}0097 \times 160484{,}24 = 1556{,}69$	$a_{36} = 0{,}0357 \times 72684{,}24 = 2594{,}85$
$a_{44} = 0{,}3897 \times 444041{,}73 = 173043{,}06$	$a_{45} = 0{,}0637 \times 160484{,}24 = 10222{,}85$	$a_{46} = 0{,}0823 \times 72684{,}24 = 5981{,}97$
$a_{54} = 0{,}0527 \times 444041{,}73 = 23400{,}99$	$a_{55} = 0{,}0453 \times 160484{,}24 = 7269{,}94$	$a_{56} = 0{,}0376 \times 72684{,}24 = 2732{,}95$
$a_{64} = 0{,}0628 \times 444041{,}73 = 27885{,}821$	$a_{65} = 0{,}1481 \times 160484{,}24 = 23767{,}72$	$a_{66} = 0{,}1664 \times 72684{,}24 = 12094{,}77$
$a_{74} = 0{,}0056 \times 444041{,}73 = 2486{,}63$	$a_{75} = 0{,}0171 \times 160484{,}24 = 2744{,}28$	$a_{76} = 0{,}276 \times 72684{,}24 = 2006{,}10$

$$a_{17} = 0{,}0437 \times 5910{,}53 = 258{,}29$$
$$a_{27} = 0{,}0129 \times 5910{,}53 = 76{,}25$$
$$a_{37} = 0{,}0923 \times 5910{,}53 = 545{,}54$$
$$a_{47} = 0{,}1154 \times 5910{,}53 = 682{,}08$$
$$a_{57} = 0{,}1062 \times 5910{,}53 = 627{,}69$$
$$a_{67} = 0{,}1082 \times 5910{,}53 = 639{,}52$$
$$a_{77} = 0{,}0010 \times 5910{,}53 = 5{,}91$$

- Tabel matriks transaksi yang baru adalah sebagai berikut:

output / input	1	2	3	4	5	6	7	Permintaan Akhir	Keluaran Total
1	16967,94	0,0000	-299,75	25843,23	256,77	755,92	258,29	10689,6	56465,68
2	129,87	892,97	-678,38	14164,93	48,15	946,36	76,25	1160,4	16505,97
3	5646,57	3334,21	-23,66	1332,13	1556,69	2594,85	545,54	70445	-78881,25
4	7617,22	1345,24	-29209,7	173043,06	10222,85	5981,97	682,08	267229,3	444041,73
5	2783,76	703,15	-9047,68	23400,99	7269,94	2732,95	627,69	134244,5	160484,24
6	47431,17	2812,62	-529,93	278858,21	23767,72	12094,77	639,52	154788	72684,93
7	16,94	26,41	-94,66	2486,63	2744,28	2006,10	5,91	1802	5910,53
Nilai tambah	23646,06	10390,36	-34229,98	175882,76	114613,95	45773,74	3075,35		
Keluaran total	56465,68	16505,97	-78881,25	444041,73	160484,24	72684,93	5910,53		

Tabel 4.4 Tabel Matriks Transaksi Baru berorde 7×7

Dari tabel 4.3 di atas, pembacaan tabel ke samping menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran (*output*) sektor pertanian senilai Rp56465,68 milyar, senilai Rp16967,94 milyar digunakan oleh sektor itu sendiri sebagai masukan (*input*), senilai –Rp299,75 milyar digunakan sebagai masukan sektor konstruksi, senilai Rp25843,23 milyar digunakan sebagai masukan sektor industri, senilai Rp256,77 milyar digunakan sebagai masukan sektor transportasi, senilai Rp755,92 milyar digunakan sebagai masukan sektor jasa, senilai Rp258,29 milyar digunakan sebagai masukan sektor lain-lain atau kegiatan yang tidak jelas batasnya, dan sisanya senilai Rp10689,6 milyar dibeli oleh konsumen akhir sebagai barang konsumsi. Pembacaan tabel ke bawah berarti menjelaskan bahwa dari seluruh keluaran sektor pertanian senilai Rp56465,68 milyar, senilai Rp 16967,94 milyar berupa masukan sektor itu sendiri, senilai Rp129,87 milyar berupa masukan yang berasal dari sektor pertambangan, senilai Rp 5646,57 milyar berupa masukan dari sektor konstruksi, senilai Rp7617,22 milyar berupa masukan dari sektor industri, senilai Rp2783,76 milyar berupa masukan dari sektor transportasi, senilai Rp47431,17 berupa masukan dari sektor jasa, senilai Rp16,94 milyar berupa masukan dari sektor yang lain atau kegitan yang tidak jelas batasnya, dan selebihnya merupakan nilai tambah (*added value*) sektor pertanian tersebut sebesar Rp23646,06 milyar.

D. Pembahasan

1. Perbandingan Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Menggunakan Metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Matriks Invers

Metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan matriks invers yang telah digunakan dalam menyelesaikan sistem persaman linier orde nxn akan dianalisis dengan menggunakan metode perbandingan. Perbandingan ini dapat dilihat dari banyaknya langkah penyelesaian, jumlah operasi, waktu, dan ketepatan mendapatkan solusi dari sistem.

a. Banyaknya Langkah Penyelesaian

Pada tahap banyaknya langkah, dapat dihitung dengan ketentuan bahwa satu langkah terdiri dari perkalian, pembagian, penjumlahan, dan pengurangan. Untuk itu uraian dari masing-masing penyelesaian sistem persamaan linier orde 2 sampai 5 di atas adalah sebagai berikut;

1) Pada soal 4.1, metode eliminasi Gauss pada operasi baris elementernya memerlukan 2 kali operasi, pada soal 4.5 yaitu *Dekomposisi Crout* memerlukan 1 kali operasi, sedangkan matriks invers memerlukan 4 partisi. Eliminasi Gauss memerlukan 1 langkah substitusi balik, *Dekomposisi Crout* memerlukan 3 langkah, yaitu penentuan matriks L, substitusi maju, dan substitusi balik, sedangkan pada soal 4.9 yaitu matriks invers memerlukan 5 kali operasi perhitungan untuk menentukan elemen-elemen inversnya dan 1 langkah untuk menentukan nilai X. Jumlah secara keseluruhan dari metode eliminasi Gauss memerlukan 2 langkah yaitu 2 kali operasi baris elementer dan substitusi mundur, *Dekomposisi Crout* memerlukan 4 langkah yaitu sekali operasi baris elementer, penentuan matriks L, substitusi maju, dan substitusi balik, sedangkan matriks invers memerlukan 3 langkah yaitu membuat 4 partisi dan 5 kali operasi perhitungan untuk menentukan elemen-elemen inversnya, dan

menentukan nilai *X*. Selain itu, metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan sistem persamaan linier orde 2 lebih mudah dan lebih cepat, dibandingkan bila menggunakan *Dekomposisi Crout* dan matriks invers.

2) Pada soal 4.2, eliminasi Gauss membutuhkan 4 operasi baris elementer, sedangkan pada soal 4.6 yaitu *Dekomposisi Crout* membutuhkan 3 kali operasi untuk menentukan matriks *L* dan *U*, sedangkan pada soal 4.10 yaitu matriks invers memerlukan 4 partisi. Metode eliminasi Gauss ditambah 1 langkah substitusi balik, *Dekomposisi Crout* ditambah 3 langkah yaitu penentuan matriks *L*, substitusi maju, dan substitusi balik, sedangkan matriks invers ditambah 5 kali operasi perhitungan untuk menentukan elemen-elemen inversnya. Total langkah yang digunakan antara eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan matriks invers juga tetap sama. Pada soal ini matriks mempunyai orde 3×3 sehingga dalam mencari variabel *y* pada langkah sustitusi maju harus lebih cermat dan teliti. Bila variabel *y* yang didapatkan tidak tepat, maka penyelesaian untuk substitusi balik tentunya juga akan salah.

3) Pada soal 4.3, jumlah operasi baris elementernya pada metode eliminasi Gauss ada 9 operasi, untuk soal 4.7 yaitu *Dekomposisi Crout* terdapat 6 operasi untuk menentukan matriks L dan U, sedangkan pada soal 4.11 yaitu matriks invers jumlah operasinya tetap sama seperti pada bagian (1) dan (2) di atas. Perbedaan terjadi dalam melakukan pengoperasian, *Dekomposisi Crout* lebih banyak memerlukan ketelitian dalam pengoperasian, karena orde semakin besar sehingga langkah penyelesaiannya semakin banyak.

4) Pada soal 4.4, eliminasi Gauss membutuhkan 13 operasi baris elementer, untuk soal 4.8 yaitu *Dekomposisi Crout* membutuhkan 10 operasi untuk menentukan elemen-elemen pada matriks L dan U, sedangkan pada soal 4.12 yaitu matriks invers memerlukan 8 partisi. Jumlah langkah untuk eliminasi Gauss dan *Dekomposisi Crout* masih sama seperti halnya bagian (1), (2), dan (3), sedangkan pada matriks invers ditambah 10 kali operasi perhitungan untuk menentukan elemen-elemen inversnya.

Berdasarkan analisis di atas diperoleh hasil bahwa proses operasi baris elementer untuk eliminasi Gauss jumlah operasinya lebih banyak dari pada *Dekomposisi Crout*. Hal ini, karena eliminasi Gauss entri utama setiap baris adalah 1, sehingga bila tidak sama dengan 1, entri tersebut harus dilakukan operasi pembagian sehingga diperoleh 1, akibatnya akan menambah jumlah operasi baris elementernya. Namun, perbandingan jumlah operasi baris elementernya tidak terlalu besar, sehingga tidak terlalu berpengaruh dalam penyelesaian.

Pada tahap operasi baris elementer, metode eliminasi Gauss digunakan untuk mencari matriks segitiga atas, kemudian setelah itu dilakukan substitusi balik sehingga diperoleh solusi sistem. Pada *Dekomposisi Crout* operasi baris elementer digunakan untuk mencari bentuk matriks *L* dan *U*, sehingga untuk mendapatkan solusi sistem masih diperlukan tahap selanjutnya yaitu substitusi maju dan substitusi balik. Sementara itu, untuk metode matriks invers tidak membutuhkan opersi baris elementer, namun hanya membutuhkan perhitungan untuk menentukan elemen-elemen inversnya.

Secara keseluruhan metode eliminasi Gauss memerlukan 2 langkah yaitu tahap operasi baris elementer dan substitusi balik, sedangkan *Dekomposisi Crout* membutuhkan 4 langkah yaitu operasi baris elementer (mencari matriks *U*), penentuan matriks *L*, substitusi maju, dan substitusi balik. Sementara pada metode matriks invers memerlukan 3 langkah yaitu menentukan partisi matriks, melakukan perhitungan untuk menentukan elemen-elemen inversnya, dan menetukan nilai *x*. Namun, untuk menentukan jumlah operasi perhitungan sangat bergantung pada jumlah partisi yang ada. Semakin besar ukuran matriks maka semakin banyak operasi perhitungan yang dilakukan. Oleh karena itu, dalam tahap langkah penyelesaian, eliminasi Gauss lebih efisien dibandingkan dengan dekomposisi Crout dan metode matriks invers. Hal ini berguna sekali sebagai dasar dalam mengambil metode penyelesaian yang tepat untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan orde besar.

Berdasarkan analisis di atas, banyaknya langkah penyelesaian ketiga metode tersebut dapat dilihat pada tabel 4.5 berikut;

n	**Banyaknya langkah penyelesaian**		
	Eliminasi Gauss	**Dekomposisi Crout**	**Matriks Invers**
2	2	4	3
3	2	4	3
4	2	4	3
5	2	4	3

Tabel 4.5 Banyaknya langkah penyelesaian

b. Jumlah Operasi Aritmatika

Selain pada langkah, perbandingan metode eliminasi Gauss dan Dekomposisi Crout dapat dilihat pada jumlah operasi aritmatikanya. Pembahasan jumlah operasi aritmatika memerlukan rumus sebagai berikut; jumlah *n* pertama bilangan positif dan jumlah kuadrat *n* pertama bilangan bulat positif;

$$1 + 2 + 3 + \Lambda + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (4.1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + \Lambda + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (4.2)$$

Selain itu juga membutuhkan rumus untuk penjumlahan $n-1$ pertama bilangan bulat positif dan penjumlahan kuadrat dari $n-1$ pertama bilangan bulat positif. Ini dapat diperoleh dengan mensubtitusikan $n-1$ untuk n dalam (4.1) dan (4.2):

$$1+2+3+\Lambda\ +(n-1)=\tfrac{(n-1)n}{2} \qquad (4.3)$$

$$1^2+2^2+3^3+\Lambda\ +(n-1)^2=\tfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} \qquad (4.4)$$

Misal $Ax=B$ merupakan suatu sistem persamaan linier berorde *n*, yang diasumsikan bahwa *A* dapat dibalik, sehingga penyelesaian dari sistem tersebut tunggal. Pertukaran baris matriks lengkap (*AB*) tidak diperlukan dalam pengoperasian baris elementer, sehingga langkah awal proses eliminasi Gauss adalah menghasilkan utama 1 pada baris pertama dengan mengalikan pada baris tersebut. Langkah ini dapat disajikan secara skematis sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

$\times$ menyatakan kuantitas yang perlu dihitung
$\bullet$ menyatakan kuantitas yang tidak perlu dihitung
Ukuran matriks $n\times(n+1)$

Bahwa utama 1 adalah pencatatan yang sederhanakan dan tidak memerlukan perhitungan, hanya *n* anggota yang tersisa dalam baris pertama saja yang dihitung.

Berikut ini adalah suatu ukuran skematik dari langkah-langkah dan jumlah operasi yang diperlukan untuk mereduksi (*AB*) menjadi bentuk baris eselon.

Langkah 1

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

n perkalian 0 penjumlahan

Langkah 1.a

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \end{array}\right]$$

n perkalian/baris
n penjumlahan/baris
n-1 baris yang memerlukan perkalian

$n(n-1)$ perkalian $n(n-1)$ penjumlahan

Langkah 2

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

n-1 perkalian 0 penjumlahan

Langkah 2.a

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \Lambda & \times & \times & \times \end{array}\right]$$

n-1 perkalian/baris
n-1 penjumlahan/baris
n-2 baris yang memerlukan perkalian

(*n*-1) (*n-2)* perkalian (*n-1*) (*n*-2) penjumlahan

Langkah 3

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \times & \times & \times \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

n-2 perkalian 0 penjumlahan

Langkah 3.a

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \times & \times & \times \end{array}\right]$$

n-2 perkalian/baris
n-2 penjumlahan/baris
n-3 baris yang memerlukan perkalian

(*n*-2) (*n-3)* perkalian (*n-2*) (*n*-3) penjumlahan

M

Langkah (*n-2*)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

2 perkalian 0 penjumlahan

Langkah (*n-1*)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \times & \times \end{array}\right]$$

2 perkalian/baris
2 penjumlahan/baris
1 baris yang memerlukan perkalian

2 perkalian 2 penjumlahan

Langkah n

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \times \end{array}\right]$$

1 perkalian
0 penjumlahan

Jadi, jumlah operasi yang diperlukan untuk melengkapi langkah berurutan ini adalah sebagai berikut:

Langkah 1 dan 1.a

Perkalian: $n + n(n-1) = n^2$

Penjumlahan: $n(n-1) = n^2 - n$

Langkah 2 dan 2.a

Perkalian: $(n-1) + (n-1)(n-2) = (n-1)^2$

Penjumlahan: $(n-1)(n-2) = (n-1)^2 - (n-1)$

Langkah 3 dan 3.a

Perkalian: $(n-2) + (n-2)(n-3) = (n-2)^2$

Penjumlahan: $(n-2)(n-3) = (n-2)^2 - (n-2)$

$\vdots$

Langkah $(n-1)$ dan $(n-1)$a

Perkalian : $4 = (2)^2$

Penjumlahan: $2(= 2^2 - 2)$

Langkah *n*

Perkalian: $1\left(=1^2\right)$

Penjumlahan: $0\left(=1^2-1\right)$

sehingga, total jumlah operasi yang diperlukan untuk mereduksi (*AB*) terhadap bentuk eselon baris adalah:

Perkalian: $n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\Lambda\ +1^2$

Penjumlahan: $\left[n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\Lambda\ +1^2\right]-\left[n+(n-1)+(n-2)+\Lambda\ 1\right]$

Atau, pada penerapan rumus (4.2) dan (4.3)

$$\text{Perkalian:}\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \qquad (4.4)$$

$$\text{Penjumlahan:}\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3} \qquad (4.5)$$

Berikut ini adalah suatu uraian skematik dari langkah-langkah dan jumlah operasi yang diperlukan untuk substitusi balik pada eliminasi Gauss.

Langkah 1

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

0 perkalian
0 pembagian
0 penjumlahan/pengurangan

Langkah 2

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

1 perkalian
1 pembagian
1 penjumlahan/pengurangan

M

Langkah (n-2)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \times & \times & \times \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

n-3 perkalian
n-3 pembagian
n-3 penjumlahan/pengurangan

Langkah (n-1)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

n-2 perkalian
n-2 pembagian
n-2 penjumlahan/pengurangan

Langkah (n)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & 1 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 1 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

n-1 perkalian
n-1 pembagian
n-1 penjumlahan/pengurangan

Jadi, jumlah operasi yang diperlukan untuk substitusi balik adalah

Perkalian: $1 + 2 + 3 + \Lambda\ + (n-2) + (n-1)$

Pembagian: $1 + 2 + 3 + \Lambda\ + (n-2) + (n-1)$

Penjumlahan/pengurangan: $1 + 2 + 3 + \Lambda\ + (n-3) + (n-2) + (n-1)$

Atau dengan rumus (4.1) dan (4.2),

Perkalian/pembagian: $$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \quad (4.6)$$

Pengurangan/penjumlahan: $$\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2 - n}{2} \quad (4.7)$$

Sehingga total jumlah operasi eliminasi Gauss dari (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), dan (4.7) adalah

Perkalian: $$\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \quad (4.8)$$

Penjumlahan/pengurangan: $$\frac{n^3}{3} + \frac{n}{3} + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} \quad (4.9)$$

Jadi total keseluruhan jumlah operasi eliminasi Gauss dari (4.8) dan (4.9) adalah

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} + \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{5n}{6} = \frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6} \quad (4.10)$$

Gambaran skematik dari langkah-langkah dan jumlah operasi yang diperlukan Dekomposisi Crout adalah sebagai berikut:

Pada tahap pertama, yaitu proses operasi baris elementer baris untuk mencarimatriks U jumlah operasi yang diperlukan sama dengan jumlah operasi pada eliminasi Gauss;

Perkalian: $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \tag{4.11}$$

Penjumlahan: $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} \tag{4.12}$$

Langkah-langkah dan jumlah operasi pada substitusi maju (*forward substitution*) dan substitusi balik (*back substitution*) adalah sebagai berikut:

Hitungan operasi pada proses substitusi maju untuk Dekomposisi Crout

Langkah 1

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \Lambda & 0 & 0 & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & 1 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

0 perkalian
0 pengurangan

Langkah 2

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & \bullet \\ \times & 1 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & \times \\ \bullet & \bullet & 1 & \Lambda & 0 & 0 & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & 1 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

1 perkalian
1 pengurangan

Langkah 3

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \times & \times & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

2 perkalian
2 pengurangan

$\vdots$

Langkah (n-1)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \times & \cdots & 1 & 0 & \times \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & 1 & \bullet \end{array}\right]$$

(n-2) perkalian
(n-2) pengurangan

Langkah (n)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \bullet & \bullet & 1 & \cdots & 0 & 0 & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & 1 & 0 & \bullet \\ \times & \times & \times & \cdots & \times & 1 & \times \end{array}\right]$$

(n-1) perkalian
(n-1) pengurangan

Jumlah operasi yang diperlukan untuk substitusi maju pada Dekomposisi Crout adalah sebagai berikut;

Perkalian: $$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=\frac{n^2-n}{2} \qquad (4.13)$$

Pengurangan: $$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n}{2} \qquad (4.14)$$

Sedangkan jumlah operasi proses substitusi balik pada Dekomposisi Crout adalah sebagai berikut;

Langkah 1

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \times & \times \end{array}\right]$$

1 perkalian
1 pembagian
0 penjumlahan/pengurangan

Langkah 2

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

2 perkalian
2 pembagian
1 penjumlahan/pengurangan

M

Langkah (*n*-2)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

n-2 perkalian
n-2 pembagian
n-3 penjumlahan/pengurangan

Langkah (n-1)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

n-1 perkalian
n-1 pembagian
n-2 penjumlahan/pengurangan

Langkah n

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \times & \times & \times & \Lambda & \times & \times & \times \\ 0 & \bullet & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ M & M & M & & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right]$$

n perkalian
n pembagian
n-1 penjumlahan/pengurangan

Jadi, jumlah operasi yang diperlukan untuksubstitusi balik pada Dekomposisi Crout adalah

Perkalian: $1+2+3+\Lambda\ +(n-2)+(n-1)+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{n^2+n}{2} \qquad (4.15)$$

Pembagian: $1+2+3+\Lambda\ +(n-3)+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$=\frac{n^2+n}{2} \qquad (4.16)$$

Pengurangan: $1+2+3+\Lambda\ +(n-3)+(n-2)+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$$=\frac{n^2-n}{2} \qquad (4.17)$$

Jadi, dari persamaan di atas dapat diperoleh total jumlah operasi untuk Dekomposisi Crout adalah sebagai berikut:

Perkalian/pembagian: $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}+\frac{n^2+n}{2}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{6}$ (4.18)

Penjumlahan/pengurangan: $\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}+\frac{n^2-n}{2}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{4n}{3}$ (4.19)

Sehingga total keseluruhan jumlah operasi Dekomposisi Crout adalah sebagai berikut;

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{3}+\frac{4n}{3}+\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{4n}{3}=\frac{2n^3}{3}+\frac{4n^2}{3} \tag{4.20}$$

Maka, jumlah operasi eliminasi Gauss dan Dekomposisi Crout untuk matriks *A* yang berukuran $n \times n$ dapat dilihat pada tabel 4.6 di bawah ini;

Metode	**Jumlah operasi penjumlahan**	**Jumlah operasi perkalian**
Eliminasi Gauss	$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}$	$\frac{n^3}{3}+n^2+\frac{n}{3}$
Dekomposisi Crout	$\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{4n}{3}$	$\frac{n^3}{3}+\frac{3n^2}{3}+\frac{n}{6}$

Tabel 4.6 jumlah operasi untuk matriks *A* yang berorde $n \times n$

Sehingga dari tabel 4.6 di atas, dapat diperoleh total jumlahg operasi eliminasi Gauss dan Dekomposisi Crout, dan hal ini dapat dilihat pada tabel 4.7 di bawah ini;

Metode	Total Jumlah Operasi
Eliminasi Gauss	$\frac{2n^3}{3}+\frac{3n^2}{2}-\frac{7n}{6}$
Dekomposisi Crout	$\frac{2n^3}{3}+\frac{11n^2}{6}+\frac{3n}{2}$

Tabel 4.7 Total jumlah operasi untuk matriks berorde $n \times n$

Agar perbandingan jumlah operasi kedua metode terlihat, maka akan diberikan contoh untuk n = 1 sampai 5, yang dapat diperlihatkan pada table 4.8 di bawah ini:

n	**Jumlah operasi aritmatika**	
	Eliminasi Gauss	**Dekomposisi Crout**
2	7	16
3	$23.5 \approx 24$	39
4	54	78
5	$102.5 \approx 103$	$136.67 \approx 137$

Tabel 4.8 Perbandingan jumlah operasi eliminasi Gauss dan Dekomposisi Crout untuk matriks A berorde $n \times n$

Dari tabel 4.8 di atas, dapat diperoleh suatu kesimpulan bahwa metode eliminasi Gauss jauh lebih sedikit jumlah operasi aritmatikanya dibandingkan dengan metode Dekomposisi Crout.

Sebagaimana keterangan di atas, untuk metode matriks invers tidaka dapat ditentukan jumlah operasi aritmatikanya. Hal ini di karenakan pada metode matriks invers tidak membutuhkan operasi baris elementer, tetapi hanya membutuhkan operasi penghitungan untuk menentukan elemen-elemen pada matriks inversnya. Dalam satu tahap penghitungan saja membutuhkan operasi aritmatika yang banyak sekali, sehingga sangat sulit untuk menentukan jumlah aritmatikanya. Akan tetapi terdapat satu kesimpulan yang dapat diperoleh yaitu, semakin banyak langkah yang dibutuhkan akan semakin banyak pula jumlah operasi aritmatika yang dibutuhkan.

Pada sistem persamaan linear dengan ribuan persaman dalam ribuan variabel yang tidak diketahui, polinom dari tabel 4.7 di atas dapat diaproksimasikan (dihampirkan) dengan baik melalui suku-sukunya yang tertinggi, yakni;

$a_0 + a_1 x + \Lambda + a_k x^k \approx a_k x^k$ untuk besar x [42]

Sehingga tabel 4.7 menjadi;

Metode	Total Jumlah operasi
Eliminasi Gauss	$\approx \frac{n^3}{3}$
Dekomposisi Crout	$\approx \frac{n^3}{3}$

Tabel 4.9 Hampiran hitungan Operasi untuk suatu matriks $n \times n$ dengan n besar

Sehingga dari tabel 4.9 di atas diperoleh operasi aritmatika yang jumlahnya sama diantara metode eliminasi Gauss dan Dekomposisi Crout untuk matriks berorde n yang sangat besar.

[42] Howard Anton, *Aljabar Linear Elementer*, Ed. 5, Terj. Pantyr Silaban, (Jakarta: erlangga, 1987), hlm. 347

c. Kecepatan

Dari sisi kecepatan dalam operasi, metode eliminasi Gauss lebih cepat dalam penyelesaiannya karena tahap yang dilalui dalam penyelesaian tidak terlalu banyak, yaitu proses operasi baris elementer untuk mendapatkan matriks segitiga atas, dan substitusi balik memperoleh solusi dari sistem. Di samping itu, jumlah operasi aritmatikanya juga lebih sedikit.

Pada Dekomposisi Crout memerlukan 4 tahap, yaitu operasi baris elementer untuk mencari matriks U, menentukan matriks L substitusi maju, dan substitusi balik. Di samping itu, jumlah operasi aritmatikanya juga lebih banyak, sehingga dari tingkat kecepatan akan sedikit lebih lambat.

Untuk metode matriks invers dalam penyelesaiannya membutuhkan 3 langkah yaitu menetukan partisi matriks, menghitung elemen-elemen untuk menentukan inversnya, dan menentukan nilai x nya. Namun, dalam menentukan elemen-elemen untuk menentukan inversnya sangat tergantung pada jumlah partisi yang ada. Semakin banyak partisi yang terbentuk maka akan semakin banyak operasi penghitungan yang dilakukan, sehingga hal ini kurang efektif dalam menyelesaikan sistem persamaan linier.

d. Ketepatan

Dari sisi ketepatan eliminasi Gauss lebih baik dari pada dekomposisi Crout dan metode matriks invers, karena tahapan eliminasi Gauss dalam menyelesaikan sistem persamaan linier lebih singkat, sehingga kemungkinan untuk memperoleh hasil yang lebih tepat akan lebih besar.

2. Aplikasi penyelesaian sistem persamaan linier dalam bidang ekonomi (analisis *input-output*)

Aplikasi matematika terutama penyelesaian sistem persamaan linier dalam ekonomi mungkin bukan merupakan hal yang baru lagi. Sebab selama ini, matematika sudah seringkali digunakan untuk menyelesaiakan persoalan-persoalan yang terkait dengan kehidupan sehari-hari. Pada penelitian kali ini, penyelesaian sistem persamaan linier diaplikasikan pada analisis *input-output.* Sesuai dengan contoh yang telah dibahas di atas, penyelesaian tersebut sebenarnya bisa dilakukan secara langsung sesuai dengan rumus yang telah dipakai selama ini. Cara yang dilakukan sebenarnya lebih cepat dan lebih mudah, tetapi di sini perlu diketahui bahwa aplikasi dari penyelesaian sistem persamaan linier tidak hanya dengan satu metode saja, namun dapat juga diselesaikan dengan metode lain.

Hal ini dapat dilihat pada soal 4.13 dan soal 4.14 untuk aplikasi metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers. Kedua soal tersebut dicoba diselesaikan dengan menggunakan bantuan matriks, yaitu dengan cara membentuk model matematikanya terlebih dahulu. Model matematika yang digunakan adalah sistem persamaan linier. Setelah itu, dijadikan dalam bentuk matriks lengkap, sehingga dapat diselesaikan dengan ketiga metode yang sedang dibahas.

Penyelesaian dengan bantuan matriks akan terasa lebih efektif dan efisien, jika jumlah nominal dan jumalah sektor perekonomiannya banyak. Artinya jumlah variabel dan persamaannya banyak.

Pada soal 4.13 dapat dilihat penyelesaian metode eliminasi Gauss dalam menyelesaikan sistem persamaan linier yang diperoleh dari tabel transaksi pada analisis *input-output*. Pada soal tersebut, tabel transaksi mempunyai orde 3×3. Penggunaan metode ini, terlihat tidak terlalu efektif. Hal ini disebabkan ukuran tabel yang terlalu sederhana, sehingga tanpa menggunakan metode inipun sebenarnya lebih cepat. Salah satu alternatifnya, bisa menggunakan metode eliminasi atau metode substitusi. Untuk penerapan metode *Dekomposisi Crout* pada soal 4.13 poin b.2, juga tidak terlihat sederhana. Hal ini dikarenakan langkah-langkah yang terlalu panjang dan lama, sedangkan untuk penerapan metode matriks invers pada soal 4.13 poin b.3, juga tidak terlihat sederhana. Hal ini sama dengan alasan sebelumnya bahwa langkah-langkah terlalu panjang dan lama.

Pada soal 4.14, tabel transaksi mempunyai orde 7×7. Pada soal ini dapat dilihat penyelesaian metode eliminasi Gauss dalam menyelesaiakan sistem persamaan linier yang diperoleh dari tabel transaksi pada analisis *input-output* tersebut. Sama halnya keterangan di atas, metode ini lebih efektif dan efisien dalam menyelesaikan sistem persamaan tersebut, karena langkah-langkah yang dibutuhkan lebih sedikit. Untuk penerapan metode *Dekomposisi Crout* pada soal 4.14 poin b.2 dan penerapan metode matriks invers pada soal 4.14 poin b.3, keduanya tidak terlihat sederhana. Hal ini dikarenakan langkah-langkah yang terlalu panjang dan lama. Efektifitas eliminasi Gauss akan terlihat, karena sistem terdapat banyak persamaan linier dan variabel. Efektifitas akan terlihat bila dalam penyelesaiannya menggunakan bantuan komputer.

Terlihat dari pembahasan ini, bahwa ketiga metode tersebut punya kelebihan dan kekurangan. Hal ini dapat dilihat dari soal-soal yang sudah diselesaikan dengan ketiga metode tersebut. Namun, yang perlu ditekankan di sini, bahwa untuk mencari nilai *output total* pada analisis *input-output* tidak harus menggunakan satu metode saja. Tetapi bisa menggunakan metode eliminasi Gauss, *Dekomposisi Crout*, dan metode matriks invers khususnya partisi matriks.

Dari uraian di atas, dapat diperoleh suatu kesimpulan bahwa untuk sistem persamaan linier dengan $n \leq 3$ lebih baik menggunakan proses eliminasi (2 persamaan), sedangkan untuk sistem yang besar akan lebih cepat dan lebih mudah mendapatkan solusi bila menggunakan bantuan matriks dengan penyelesaian melelui metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan metode matriks invers. Metode eliminasi Gauss lebih mudah diaplikasikan dibandingkan Dekomposisi Crout dan metode matriks invers, karena dapat diselesaikan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang berorde $m \times n$.

Tidak semua sistem dapat diselesaikan, karena terkadang diperoleh sistem yang tidak konsisten.

Ternyata matriks dan sistem persamaan linier sangat membantu sekali dalam bidang ekonomi. Ini terbukti dari penggunaan metode eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan matriks invers yang dapat digunakan untuk menyelesaikan analisis *input-output*.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, dapat diperoleh suatu kesimpulan bahwa:

1. metode eliminasi Gauss lebih efektif dibandingkan *Dekomposisi Crout* dan metode matriks invers. Perbandingan ini dapat dilihat dari langkah penyelesaian, jumlah operasi aritmatika, kecepatan penyelesaian, dan ketepatan dalam menyelesaiakan sistem persamaan linier orde $n \times n$.
2. Berdasarkan perbandingan banyaknya langkah metode eliminasi Gauss lebih sedikit dari pada Dekomposisi Crout dan metode matriks invers.
3. Pada jumlah operasi aritmatika, metode eliminasi Gauss lebih sedikit dibandingkan metode *Dekomposisi Crout*. Metode eliminasi Gauss memerlukan $\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{7n}{6}$ operasi aritmatika, sedangkan metode Dekomposisi Crout memerlukan $\frac{2n^3}{3} + \frac{11n^2}{6} + \frac{3n}{2}$ operasi aritmatika, namun untuk sistem yang besar keduanya hampir sama, sedangkan untuk metode partisi matriks tidak dapat ditentukan jumlah operasi aritmatikanya
4. Kecepatan metode eliminasi Gauss lebih baik dibandingkan Dekomposisi Crout dan metode matriks invers.

5. Ketepatan eliminasi Gauss lebih baik dibandingkan Dekomposisi Crout dan matriks invers.
6. Penyelesaian sistem persamaan linier dapat diaplikasikan dalam bidang ekonomi terutama dalam analisis *input-output* dengan bantuan matriks.

B. Saran

1. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang berorde $n \times n$, dengan $n \geq 2$ hendaknya menggunakan metode eliminasi Gauss.
2. Penyelesaian sistem persamaan linier dengan $n \geq 3$ akan semakin efektif dan efisien, jika menggunakan bantuan komputer.
3. Perlunya dosen/guru bidang studi matematika dalam mempelajari Aljabar dan matriks mengenalkan beberapa metode penyelesaian untuk menyelesaikan sistem persamaan linier yang efektif dan efisien.
4. Untuk mahasiswa MIPA, khususnya jurusan matematika lebih memprioritaskan penelitiannya pada integrasi keilmuan antara ilmu eksakta dengan kehidupan sehari-hari.
5. Untuk menyelesaikan masalah input-output akan lebih efektif dan efisien jika menggunakan metode eliminasi Gauss.
6. Aplikasi matematika tentunya tidak hanya dalam bidang ekonomi saja, akan tetapi masih banyak lagi keterkaitannya dengan bidang lain. Oleh karena itu, inovasi penelitian perlu ditingkatkan dan diprioritaskan.

DAFTAR PUSTAKA

Anggraini, Wiwik, 2006, *Aljabar Linear dilengkapi dengan Program Matlab,* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Anton, Howard, 1987, *Aljabar Linear dengan Penerapannya*, terj. Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, Jakarta: Erlangga.

Ayres, Frank, 1994, *Theory and Problem of Matriks,* Bandung: Erlangga.

Cullen, Charles G., 1993, *Aljabar Linear dengan Penerapannya*, terj. Bambang Sumantri, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Damayanti, Fitri, 2003, *Perbandingan antara Metode Gauss-Jordan dan Kaidah Kramer dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linier serta Peninjauan Terhadap Peranan Al Karaji di Bidang Aljabar (Skripsi),* Yogyakarta: IAIN Sunan Kalijaga.

Dowling, Edward T., 1980, *Matematika untuk Ekonomi*, terj. Bambang Sugiarto, Jakarta: Erlangga.

Dumairy, 2003, *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi,* ed. 2003/2004, Yogyakarta: BPFE.

Hadley, G., 1992, *Aljabar Linier*, ed. Revisi, terj. Naipospos & Noenik Sumartoyo, Jakarta: Erlangga.

Harjito, Agus, 2000, *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis,* Yogyakarta: Ekonisia

Johannes, H., & Budiono S. Handoko, 1998, *Pengantar Matematika untuk Ekonomi*, cet. Sebelas, Jakarta: LP3ES.

Kholil, Muhammad, 2002, *Metode-Metode Pencarian Invers Matriks (Suatu Studi Banding)(Skripsi),* Yogyakarta: IAIN Sunan Kalijaga.

Kolman, Bernard, 1996, *Elementary Linear Algebra*, Six Edition, New Jersey: Prentice hall.

Kreyzig, Erwin, 1993, *Matematika Teknik Lanjutan,* ed. Keenam, Buku kedua, terj. Bambang Soemantri, Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Labarre, A. E., 1960, *Elementary mathemathical Analysis*, London: Addison-wesley Publishing Company.

Leon, Steven J., 2001, *Aljabar Linier dan Aplikasinya,* ed. Kelima. Terj. Alit Bondan, Jakarta:Erlangga.

Lipschutz, Seymour dan Marc Lars Lipson, 2002, *Teori dan Soal Aljabar Linear,* ed. Ketiga, Jakarta: Erlangga.

Nazara, Suahasil, 2005, *Analisis Input-Output*, ed. Kedua, Jakarta: Lembaga Penerbit FEUI.

Nicholson, Keith W., *Linear Algebra With Aplication,* Third Edition, Boston: PSW. Publishing Company.

Saefudin, Abdul Aziz, 2004, *Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dan Aplikasinya dalam Sains dan Islam (Skripsi),* Yogyakarta: IAIN Sunan Kalijaga.

Setiawan, Agus, 2000, *Pengantar Metode Numerik,* Ygyakarta: Andi.

Soepranto dan Boen, 1984, *Analisis Struktur dengan Metode Matriks,* cet. Ketiga, Jakarta: UII Press.

Supranto, J., 1980, *Pengantar matriks,* ce. Pertama, Jakarta: Rineka Cipta.

Unoningsih, Daru, 1990, *Aljabar Vektor dan Matriks,* Yogyakarta: FMIPA UGM.

Weber, Jean E., 1994, *Analisis Matematika Penerapan Bisnis dan Ekonomi,* ed. Keempat, terj. Stephen Kakicina, Jakarta: Erlangga.

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-STUINSK-BM-05-H/RO

BUKTI SEMINAR PROPOSAL

Nama	: Iin Indrayani
NIM	: 04610010
Semester	: VIII
Program Studi	: Matematika
Tahun Akademik	: 2007 / 2008

Telah melaksanakan seminar proposal skripsi pada tanggal 13 Mei 2008 dengan judul:

Analisis Metode Eliminasi Gauss, Dekomposisi Crout, dan Metode Matriks Invers dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier serta Aplikasinya dalam Bidang Ekonomi

Selanjutnya kepada mahasiswa tersebut supaya berkonsultasi kepada pembimbing berdasarkan hasil-hasil seminar untuk menyempurnakan proposal.

Yogyakarta, 13 Mei 2008
Pembimbing

Fitriyana Yuli Saptaningtyas, M.Si
NIP: 132326893

CURRICULUM VITAE

Nama	: Iin Indrayani
Tempat/tanggal lahir	: Kab. Semarang, 27 November 1985
Alamat	: Rowoganjar RT 02 RW 02 Rowoboni, Banyubiru, Semarang, Jawa Tengah 50664
Alamat di Yogyakarta	: Jl.Ace No. 64 RT 06 RW 27 Condong Catur, Depok, Sleman, Yogyakarta
Nama Orang Tua	
- Ayah	: Suratman
- Ibu	: Salimah

Pendidikan:

- RA Masyithah Rowoboni lulus tahun 1992
- MI Ma'arif Rowoboni lulus tahun 1998
- SLTP N I Banyubiru lulus tahun 2001
- SMU Takhassus Al-Qur'an Wonosobo lulus tahun 2004
- Tahun 2004 masuk UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta pada fakultas sains dan Teknologi jurusan Matematika

Organisasi:

- Sekretaris II OSIS SLTP N I Banyubiru tahun 1999
- Sie Penggalian Dana IPNU-IPPNU SMU Takhassus Al-Qur'an Wonosobo