

SKRIPSI

**KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTINU
MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF**



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
NURYANTO
14610044
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2019

**KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTINU
MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika



diajukan oleh

NURYANTO

14610044

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2019



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas akhir

Lamp : -

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Nuryanto

NIM : 14610044

Judul Skripsi : Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontinu Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Pembimbing I

Malahayati, M.Sc.
NIP. 19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 9 Januari 2019

Pembimbing II

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc
NIP. 19861208 201503 2 006



PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : B-322/Un.02/DST/PP.00.9/2019

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTINU
MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :
Nama : Nuryanto
NIM : 14610044
Telah dimunaqasyahkan pada : Senin, 28 Januari 2019
Nilai Munaqasyah : A
Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Malahayati, M.Sc
NIP. 19840412 201101 2 010

Penguji I

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc
NIP.19861208 201503 2 006

Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, M.Sc
NIP.19840113 201503 1 001

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 28 Januari 2018

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan



Dr. Murtono, M.Si

NIP. 19691212 200003 1 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nuryanto
NIM : 14610044
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA
Yogyakarta, 09 Januari 2019
Yang Menyatakan


Nuryanto
NIM. 14610044

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini penulis persembahkan untuk :

**Bapak dan Ibu tercinta serta keluarga
besar Bani Rasiatin dan Bani
Maruwiyyah.**



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

وَكُلُّ مَنْ لَمْ يَعْتَقِدْ لَمْ يَنْتَفِعْ

”Segala sesuatu yang tidak diyakini, maka tidak akan memberi manfaat”

«« Syeikh Syarifuddin Yahya Al-Imrithi ; Nadhom Imrithi ; Bait 17 »»



كَجِدُّ كُلِّ الْجِدِّ وَأَفْرَحِ الْجَدِّ

”Bersungguh-sungguhlah dengan segala kesungguhan dan berbahagialah dengan segala kebahagiaan.”

«« Syeikh Ibnu Malik Al-Andalus ; Nadhom Alfiyah Ibnu Malik ; bait 289 »»



Wise man speak because they have something to say.

Fools speak because they have something to do.

”Orang bijak berbicara karena merasa ada yang perlu dibicarakan.

Orang bodoh berbicara karena ada yang harus dilakukan”

«« Plato (428 - 348 SM) ; Filsuf – Athena, Yunani »»



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah akhirabbil 'aalamiin, puji syukur kami panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat, rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga kami sebagai penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **"Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontinu Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif"** sebagai syarat memperoleh gelar kesarjanaan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.

Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurah limpahkan kepada pimpinan para nabi dan rasul baginda Rasulullah Muhammad SAW yang selalu menjadi suri tauladan sempurna bagi seluruh umat manusia dari zaman jahiliyah hingga era millennial yang penuh dengan kecanggihan teknologi seperti saat ini dan insya Allah hingga *akhiruzzaman* nanti. Penulis menyadari bahwa proses penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, dukungan, motivasi, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, sangat perlu sekiranya penulis mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Bapak Arjab Purwanto dan Ibu Marlani, terimakasih atas segala dukungan moril dan materil, motivasi, kasih sayang serta do'a restu yang selalu ditujukan kepada penulis sehingga penulis selalu bersemangat untuk menyelesaikan setiap jenjang pendidikan yang ditempuh dari tingkat Sekolah Dasar (SD) sampai saat ini penulisan skripsi di tingkat Perguruan Tinggi (PT) dapat terselesaikan, dan terimakasih pula kepada Rindi Makrufa adik kandung tercinta beserta suami yang selalu setia menemani orang tua penulis selama

masa perantauan *thalibul ilm*, serta Nur Maula Ahmad keponakan kandung satu-satunya saat ini yang selalu membuat rindu untuk pulang ke rumah.

2. Bapak Maruwi serta seluruh keluarga besar bani Maruwi dan Bani Rasiatin di Pasuruan. Terimakasih telah memberi dorongan semangat, do'a, kasih sayang dan perhatian, sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
3. Alm. KH. Abdullah Mawiyah beserta keluarga besar Madrasah Miftahul Ulum An-Nidhomiyah, yayasan pondok pesantren Al-Khoiriyah Kalipang Timur Grati Pasuruan dan KH. A. Mujib Imron, S.Ag beserta keluarga besar pondok pesantren Miftahul Ulum Al-Yasini Areng-Areng Pasuruan. Terimakasih atas pengalaman serta pengabdian yang telah diberikan dan diajarkan serta barokah ilmu yang selalu disalurkan kepada penulis sehingga sampai saat ini dapat terus menuntut ilmu dan menyelesaikan penulisan skripsi ini.
4. Rektor, Dekan, Bapak/Ibu Dosen dan seluruh Staff Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta. Terimakasih atas ilmu, bimbingan serta pelayanan yang diberikan selama masa perkuliahan dan penyusunan skripsi.
5. Bapak Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M. Si., selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
6. Ibu Malahayati, M. Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi I dan selaku Dosen Penasehat Akademik (DPA) mahasiswa Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga angkatan 2014, dan Ibu Pipit Pratiwi Rahayu, M. Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi II. Terimakasih atas segala arahan selama masa studi serta selalu meluangkan waktu untuk membimbing sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

7. Teman-teman angkatan 2014 Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga khususnya teman-teman Matematika angkatan 2014 atau Element Math. Terimakasih atas kebersamaan dan cerita yang telah kita jalani bersama.
8. Sahabat-sahabati korp Oksigen 2015 Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Rayon Aufklarung Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga. Terimakasih atas suka-duka, kebersamaan dan kekeluargaan yang telah kita alami bersama. Sahabat-sahabati Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Cabang D.I. Yogyakarta, sahabat-sahabati Komisariat Pondok Sahabat, sahabat-sahabati Rayon Aufklarung, dan sahabat-sahabati Lintas Surya Perjuangan, keluarga HM-PS Matematika, Ikatan Kerabat Pasuruan Yogyakarta (IKPY) serta IKPM Jawa Timur. Terimakasih telah memberikan banyak pengalaman-pengalaman baru dan mengajarkan banyak hal tentang organisasi kepada penulis selama menuntut ilmu di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
9. Ibu Sari beserta keluarga. Terimakasih telah mengizinkan penulis untuk tinggal bersama menjadi keluarga baru selama kuliah di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
10. Hanifah, Risma, Nia, Ella, Faqih, Aida, Naji, Harjuna, Dihan, teman-teman KKN 93 Jambean Selatan-Rambeanak, Kec. Mungkid, Kab. Magelang-Jawa Tengah dan Bapak Zamroni sekeluarga selaku induk semang beserta masyarakat Jambean Selatan. Terimakasih telah memberi kesempatan kepada penulis untuk belajar dan mengabdikan serta kebersamaan juga pengalaman yang tidak mudah untuk dilupakan selama 2 (dua) bulan KKN.
11. Nur Layla Faizati. Terimakasih atas waktu bermain dan belajar bersama selama kuliah di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta serta dukungan, do'a dan motivasi sehingga skripsi ini terselesaikan.

12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih telah membantu dan memberi dukungan serta do'a sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan penulisan skripsi ini.

Jazakumullah bi Ahsanil Jaza'. Semoga Allah SWT memberikan balasan kepada mereka dengan segala bentuk kebaikan. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, diharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun demi kesempurnaan skripsi ini, sehingga penulis dapat belajar, belajar dan terus belajar. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan pembaca. *Amiin, Allahumma Amiiin.*

Wallahul Muwaffiq ilaa Aqwamith Thoriiq.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Yogyakarta, 3 Januari 2019



Penulis

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
SURAT PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR LAMBANG	xiv
INTISARI	xvi
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	6
1.3. Rumusan Masalah	6
1.4. Tujuan Penelitian	7
1.5. Manfaat Penelitian	7
1.6. Tinjauan Pustaka	8
1.7. Metode Penelitian	9
1.8. Sistematika Penulisan	10
II LANDASAN TEORI	12
2.1. Teori Dasar Analisis Real	12
2.1.1. Kekonvergenan Barisan	20
2.1.2. Kekonvergenan Fungsi Kontinu	29

2.2. Teori Dasar Analisis Fungsional	31
2.2.1. Ruang Metrik	32
2.2.2. Titik Tetap	40
III PEMBAHASAN	45
3.1. Teori Dasar Ruang Metrik Multiplikatif	45
3.2. Teorema Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontinu Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif	62
IV PENUTUP	96
4.1. Kesimpulan	96
4.2. Saran	97
DAFTAR PUSTAKA	100

DAFTAR TABEL

1.1 Tinjauan Pustaka	9
--------------------------------	---



DAFTAR LAMBANG

ε	: epsilon
δ	: delta
\forall	: untuk setiap
\exists	: terdapat
$x \in A$: x anggota A
$x \notin A$: x bukan anggota A
$A \subseteq X$: A himpunan bagian (<i>subset</i>) atau sama dengan X
$x = y$: x sama dengan y
$x \neq y$: x tidak sama dengan y
$x > y$: x lebih dari y
$x < y$: x kurang dengan y
$x \geq y$: x lebih dari atau sama dengan y
$x \leq y$: x kurang dari atau sama dengan y
\mathbb{Z}	: himpunan semua bilangan bulat
\mathbb{N}	: himpunan semua bilangan asli
\mathbb{R}	: himpunan semua bilangan real
\mathbb{R}^+	: himpunan semua bilangan real positif
$n \rightarrow \infty$: n menuju tak hingga
$x_n \rightarrow x$: barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x
$x_n \rightarrow_* x$: barisan $\{x_n\}$ konvergen multiplikatif ke x
$f : X \rightarrow Y$: pemetaan f dari X terhadap Y

$T^n(x_0)$: himpunan barisan rekursif sebanyak n kali
$[x; y]$: interval bilangan real dari x sampai y
e	: bilangan euler
$A \cap B$: A irisan B
\emptyset	: himpunan tak kosong
\Rightarrow	: jika ... maka ... atau pembuktian dari kiri ke kanan
\Leftarrow	: pembuktian dari kanan ke kiri
\Leftrightarrow	: jika dan hanya jika
\ni	: sedemikian sehingga
\therefore	: kesimpulan
■	: akhir suatu bukti



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

INTISARI

KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTINU MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF

Oleh

NURYANTO

14610044

Tahun 2008, A.E. Bashirov dkk., mendefinisikan nilai mutlak multiplikatif dari bilangan real tak negatif dan jarak multiplikatif antar 2 (dua) elemen bilangan real tak negatif. Kemudian pada tahun 2012, Ozavsar dan Cevikel memperkenalkan konsep ruang metrik multiplikatif yang dilatarbelakangi oleh definisi nilai mutlak multiplikatif dan jarak multiplikatif serta membahas tentang titik tetap pada suatu pemetaan multiplikatif di ruang metrik multiplikatif. Selanjutnya, tahun 2014, Sarwar dan Rome melakukan penelitian tentang sifat ketunggalan titik tetap pada suatu pemetaan multiplikatif di ruang metrik multiplikatif. Ruang metrik multiplikatif merupakan himpunan tak kosong yang memuat fungsi jarak multiplikatif antar elemen-elemen di dalamnya dan memenuhi aksioma multiplikatif tertentu.

Skripsi ini mengkaji tentang penelitian yang dilakukan oleh Sarwar dan Rome, yaitu langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu multiplikatif yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu di ruang metrik multiplikatif serta beberapa akibat yang diperoleh dari teorema tersebut. Selain itu, dalam skripsi ini diberikan pula suatu contoh sifat titik tetap di ruang metrik multiplikatif berdasarkan pembuktian teorema yang dibahas.

Penelitian dalam skripsi ini menghasilkan titik tetap tunggal pada fungsi kontinu multiplikatif yang memenuhi kondisi tertentu di ruang metrik multiplikatif. Pembuktian teorema dan akibat dari teorema tersebut dimulai dengan membentuk barisan iteratif yang konvergen multiplikatif ke suatu titik. Selanjutnya, pembuktian eksistensi titik tetap dapat dilakukan dengan menggunakan sifat kekontinuan multiplikatif atau menggunakan sifat kekontinuan multiplikatif yang disertai dengan memenuhi kondisi tertentu di dalamnya. Langkah terakhir adalah pembuktian ketunggalan titik tetap dari hasil yang diperoleh sebelumnya dengan menggunakan kondisi yang disebutkan dalam teorema dan akibat dari teorema tersebut.

Kata Kunci : Fungsi kontinu, Fungsi Kontinu Multiplikatif, Ruang metrik, Ruang metrik multiplikatif, Titik Tetap.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Islam memposisikan Al-Quran sebagai pedoman dan petunjuk dalam segala aspek kehidupan, baik kehidupan di dunia maupun di akhirat. Kitab suci berupa *kalamullah* yang diwahyukan kepada nabi Muhammad SAW untuk ummatnya sejak lebih dari 14 abad yang lalu masih sangat relevan digunakan di era milenial ini. Keotentikan teks maupun kandungan dalam Al-Qur'an sendiri selalu terjaga dan dapat dipertanggungjawabkan sampai datangnya hari kiamat nanti, sebagaimana telah disebutkan dalam Al-Qur'an surat An-nisa' ayat 82 berikut ini :

أَفَلَا يَتَدَبَّرُونَ الْقُرْآنَ وَلَوْ كَانَ مِنْ عِنْدِ غَيْرِ اللَّهِ لَوَجَدُوا فِيهِ اخْتِلَافًا كَثِيرًا

"Maka apakah mereka tidak memperhatikan Al-Qur'an, kalau kiranya Al-Qur'an itu bukan dari sisi Allah, tentulah mereka mendapat pertentangan yang banyak di dalamnya", (Q.S. An-Nisa', 82).

Al-Qur'an sebagai mu'jizat terbesar dan sumber dari segala ilmu pengetahuan, baik ilmu pengetahuan baru yang sedang maupun yang telah dikembangkan oleh banyak para ilmuwan tak satupun ditemukan pertentangan di dalamnya, termasuk juga ilmu matematika yang merupakan tetesan kecil dari Al-Qur'an. Diantara ayat Al-Qur'an yang menjelaskan adanya ilmu matematika di dalamnya adalah surat Al-Kahfi ayat 25 berikut :

وَلَبِثُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَازْدَادُوا تِسْعًا

”Dan mereka tinggal di gua mereka tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun (lagi)”, (Q.S. Al-Kahfi, 25).

Dari ayat tersebut terdapat operasi penjumlahan yaitu tiga ratus tahun ditambah sembilan tahun, dimana operasi penjumlahan tersebut merupakan salah satu konsep dasar matematika.

Matematika merupakan suatu ilmu yang mempunyai obyek kajian abstrak dan universal yang bermanfaat untuk menunjang dan mengembangkan daya pikir manusia, hal ini dilatarbelakangi oleh tujuan utama mempelajari matematika adalah menemukan cara menyelesaikan persoalan dimana cara penyelesaian atau hasil akhirnya belum diketahui sebelumnya. Sebagaimana Wida Rachmawati (2015) di dalam bukunya yang berjudul ”Konsep Bilangan untuk Calon Guru SD/MI”, menyatakan bahwa matematika memiliki kontribusi yang sangat berarti bagi masa depan siswa yang mempelajarinya, adapun yang melatarbelakangi pernyataan tersebut adalah kenyataan bahwa di Indonesia mata pelajaran matematika diberikan di semua sekolah mulai dari tingkat Sekolah Dasar (SD) sampai dengan tingkat Sekolah Menengah Atas (SMA).

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris dan logis. Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Al-Imran ayat 191 berikut :

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمٰوٰتِ
وَالْاَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هٰذَا بَطْلًا سُبْحٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ

”(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka”, (Q.S. Al-Imran, 191).

Metematika juga mempunyai peranan penting dalam berbagai disiplin ilmu, karena matematika memuat berbagai macam variabel tertentu yang bermanfaat bagi disiplin ilmu lain, sehingga pengembangan konsep-konsep matematika sangatlah penting berbanding lurus dengan pengembangan ilmu-ilmu lainnya. Dalam matematika terdapat satu bidang yang dalam mempelajarinya dituntut untuk selalu berikir secara analitis, sistematis, logis dan kritis, yaitu bidang analisis.

Menurut Edwin Hewitt dan Karl Stromberg dalam bukunya yang berjudul *”Real and Abstract Analysis”*, tahun 1965. Matematika bidang analisis merupakan cabang ilmu matematika yang mencakup teori turunan, integral, ukuran, limit, dan deret. Teori ini biasanya dipelajari dalam konteks bilangan real yang di dalamnya memuat suatu fungsi tertentu. Namun, analisis ini dapat diperluas cakupan kajiannya dan dapat diterapkan di seluruh ruang objek matematika yang memiliki kedekatan definisi dengan bilangan real seperti halnya topik pembahasan dalam skripsi ini yaitu titik tetap di ruang metrik.

Titik tetap dari suatu fungsi adalah elemen domain fungsi yang menghasilkan pemetaan berupa dirinya sendiri atau hasil dari pemetaan fungsi

tersebut sama dengan elemen sebelum dilakukan pemetaan. Sedangkan ruang metrik adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi suatu fungsi berupa metrik dan memenuhi kondisi tertentu. Pembahasannya tentang titik tetap dan ruang metrik akan dijelaskan pada bab selanjutnya.

Adapun perkembangan teori titik tetap ini bermula pada pertengahan abad XIX, yaitu ketika seorang matematikawan dan fisikawan dari Prancis, bernama Jules Henri Poincare (1854-1912) melakukan penelitian sistem dinamika tak linear yang dalam keadaan tertentu menunjukkan fenomena tak beraturan atau kekacauan. Contoh sistem ini adalah atmosfer, lempeng tektonik, turbulensi fluida, pertumbuhan makhluk hidup, ekonomi dan lain sebagainya. Penelitian ini dikenal dengan sebutan Teori Kekacauan. Teori Kekacauan tersebut menggunakan pendekatan titik tetap untuk menemukan solusi dalam pengambilan kesimpulan. Selanjutnya, Spencer (1906-1980) berhasil membuktikan lemma kombinatorial pada penguraian segitiga yang sangat berguna dalam pembuktian dan penggunaan sifat titik tetap. Setelah itu, karena titik tetap mempunyai peran penting dalam analisis fungsional, maka di era milenial ini, teori titik tetap banyak dikembangkan oleh matematikawan bidang analisis dalam penelitian analisis fungsional, khususnya penyelidikan tentang eksistensi dan ketunggalan titik tetap dari suatu fungsi dengan domain tertentu, salah satunya adalah fungsi dengan domain ruang metrik.

Konsep ruang metrik ini pertama kali diperkenalkan oleh Maurice Fréchet pada tahun 1906. Seiring perkembangannya berbagai modifikasi yang merupakan penemuan baru maupun pengembangan dari ruang metrik yang sebelumnya telah banyak kita temukan saat ini, misalnya ruang b -metrik, ruang quasi b -metrik, ruang metrik D , ruang metrik G dan lain-lain sebagainya.

Setelah Agamira E. Bashirov dkk pada tahun 2008 memperkenalkan konsep kalkulus multiplikatif dalam jurnal yang berjudul "*Multiplicative Calculus*

and its Application”, dalam jurnal tersebut terdapat definisi ruang metrik multiplikatif yang selanjutnya penelitian ini dijadikan motivasi oleh Ozavsar dan Cevikel dalam pembentukan dan pembuktian beberapa teorema titik tetap pada pemetaan di ruang metrik multiplikatif, tertulis dalam jurnal berjudul *“Fixed Point of Multiplicative Contraction Mapping on Multiplicative Metric Space”*, karya Ozavsar dan Cevikel tahun 2012.

Setelah itu, penelitian Ozavsar dan Cevikel tersebut dikembangkan oleh Muhammad Sarwar dan Badshah E. Rome pada tahun 2014, yaitu pembuktian ketunggalan titik tetap terhadap beberapa teorema titik tetap pada pemetaan ruang metrik multiplikatif. Penelitian ini ditulis dalam jurnal yang berjudul *“Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space”*, dalam jurnal yang ditulis pada tahun 2014 itu, selain menyajikan teorema-teorema tentang titik tetap beserta pembuktiannya disajikan juga akibat dari teorema-teorema tersebut.

Mengingat ilmu matematika di bidang analisis terus mengalami perkembangan, khususnya perkembangan dari pada ruang metrik dan teori titik tetap, penulis tertarik untuk mempelajari lebih lanjut tentang teori titik tetap pada fungsi kontinu di ruang metrik multiplikatif yang selanjutnya fungsi kontinu di ruang metrik multiplikatif tersebut dinamakan fungsi kontinu multiplikatif.

Penelitian ini merupakan penjabaran sekaligus melengkapi langkah-langkah pembuktian teorema dan akibat yang belum disajikan dalam jurnal *“Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space”* yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah E. Rome pada tahun 2014. Oleh karena itu, skripsi ini diberi judul **“KETUNGGALAN TITIK TETAP PADA FUNGSI KONTINU MULTIPLIKATIF DI RUANG METRIK MULTIPLIKATIF”**. Sedangkan untuk mempermudah pemahaman dalam skripsi ini juga akan diberikan contoh-contoh sederhana terkait penelitian ini.

1.2. Batasan Masalah

Sebelum dibahas lebih dalam, perlu dipahami terlebih dahulu batasan-batasan masalah yang berhubungan dengan penelitian ini, hal ini bertujuan agar terhindar dari kesalahpahaman terhadap obyek yang dikaji dan tentunya juga dapat membantu penulis supaya lebih fokus terhadap tema penelitian.

Ditinjau dari latar belakang di atas bahwa yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah titik tetap, fungsi kontinu dan ruang metrik multiplikatif, beserta sifat-sifatnya. Selanjutnya, karena pemetaannya berupa fungsi kontinu multiplikatif di ruang metrik multiplikatif, maka dalam hal mencari titik tetap pada suatu pemetaan di ruang metrik multiplikatif tersebut hanya memanfaatkan sifat-sifat dasar yang berlaku dalam fungsi kontinu multiplikatif di ruang metrik multiplikatif. Adapun sifat kelengkapan pada ruang metrik multiplikatif dan fungsi kontraksi tidak dibahas dalam skripsi ini, meskipun pemetaan tersebut merupakan pemetaan pada dirinya sendiri.

1.3. Rumusan Masalah

Merujuk pada latar belakang dan rumusan masalah, maka dapat dirumuskan masalah yang berkaitan dengan penjelasan di atas, yaitu :

- a. Bagaimana membuktikan teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu di ruang metrik multiplikatif?
- b. Bagaimana membuktikan akibat dari teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu di ruang metrik multiplikatif?

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk :

- a. Mengetahui langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu di ruang metrik multiplikatif?
- b. Mengetahui langkah-langkah pembuktian akibat dari teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu di ruang metrik multiplikatif?

1.5. Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat sebagai berikut :

- a. Bagi lembaga, menambah bahan kepustakaan dan informasi pembelajaran mata kuliah di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta khususnya di Program Studi Matematika.
- b. Bagi mahasiswa, khususnya bagi mahasiswa Matematika bidang analisis, dapat menambah pengetahuan keilmuan mahasiswa mengenai analisis fungsional yaitu penyelidikan titik tetap di ruang metrik multiplikatif dengan menggunakan pemetaan berupa fungsi kontinu multiplikatif.
- c. Bagi penulis, meningkatkan daya pikir penulis ke arah yang lebih tinggi serta menambah wawasan penulis untuk mengetahui ilmu pengetahuan yang terus mengalami perkembangan, khususnya perkembangan ilmu matematika bidang analisis yaitu analisis fungsional.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penelitian dalam skripsi ini menggunakan beberapa buku sebagai penunjang atau materi pendukung dari jurnal yang digunakan sebagai sumber utama dalam melakukan penelitian. Adapun buku-buku yang dimaksud di atas adalah buku yang berjudul "*Introduction to Real Analysis*" edisi keempat tahun 2010 karya Robert G. Bartle dan Sherbert. Buku tersebut membahas tentang dasar-dasar analisis real seperti halnya sifat-sifat yang berlaku dalam bilangan real, konsep limit, kekontinuan, kekonvergenan dan lain sebagainya. Selanjutnya adalah buku "*Metric Space*" yang ditulis oleh S. Shirali dkk. pada tahun 2006. Buku tersebut membahas tentang ruang metrik beserta sifat-sifat yang berlaku didalamnya.

Sedangkan sumber utama dalam penelitian ini adalah berupa jurnal-jurnal penelitian, bermula dari penelitian yang dilakukan oleh Agamira E. Bashirov dkk. pada tahun 2008 tertulis dalam jurnal yang berjudul "*Multiplicative Calculus and its Application*". Jurnal tersebut memperkenalkan konsep kalkulus multiplikatif, nilai mutlak multiplikatif dan terdapat pula definisi jarak multiplikatif antar 2 (dua) elemen bilangan real tak negatif.

Pada tahun 2012, Ozavsar dan Cevikel melakukan penelitian lebih lanjut tentang jarak multiplikatif yang selanjutnya disebut dengan istilah ruang metrik multiplikatif. Penelitian tersebut ditulis dalam jurnal yang berjudul "*Fixed Point of Multiplicative Contraction Mapping on Multiplicative Metric Space*". Dalam jurnal tersebut disajikan pula beberapa teorema titik tetap di ruang metrik multiplikatif.

Selanjutnya, jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah E. Rome pada tahun 2014, berjudul "*Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space*", membahas tentang beberapa teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif. Jurnal tersebut dijadikan oleh penulis

sebagai literatur utama dalam penulisan skripsi ini, yaitu membahas tentang teorema "Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontinu Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif". Dalam penelitian ini, disajikan langkah-langkah pembuktian teorema serta diberikan contoh tentang teorema tersebut. Selain itu, dibahas pula langkah-langkah pembuktian akibat yang diperoleh dari teorema tersebut.

Berikut ini adalah daftar tabel tinjauan pustaka yang digunakan oleh penulis dalam melakukan penelitian ini. Tabel ini merupakan ringkasan dari narasi subbab Tinjauan Pustaka di atas.

Tabel 1.1 Tinjauan Pustaka

No.	Penulis (Tahun)	Judul	Pembahasan
1	Robert G. Bartle (2010)	<i>Introduction to Real Analisis</i>	Dasar-dasar analisis real.
2	S. Shirali dkk. (2006)	<i>Metric Space</i>	Ruang Metrik beserta sifat-sifatnya.
3	A. E. Bashirov dkk. (2008)	<i>Multiplicative Calculus and its Application</i>	Kalkulus multiplikatif, Nilai mutlak multiplikatif dan jarak multiplikatif.
4	Ozavsar dan Cevikel (2012)	<i>Fixed Point of Multiplicative Contraction Mapping on Multiplicative Metric Space</i>	Ruang metrik multiplikatif serta teorema titik tetap di ruang metrik multiplikatif.
5	M. Sarwar dan B. E. Rome (2014)	<i>Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplikatif Metric Space</i>	Beberapa teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif.

1.7. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah kajian pustaka (*library research*) yang sering disebut studi literatur. Studi literatur adalah suatu metode penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber, seperti jurnal, buku dan sumber penelitian ilmiah lainnya.

Adapun sifat penelitian dalam skripsi ini adalah kualitatif. Artinya, data yang terkumpul dari berbagai sumber yang telah disebutkan di atas, diolah menjadi suatu bahan penelitian dan selanjutnya disajikan dengan menggunakan kalimat atau bahasa sehingga mudah untuk dipelajari.

Selanjutnya, untuk mencapai tujuan yang diinginkan. Penulis juga melakukan diskusi-diskusi ringan terkait dengan penelitian ini dengan beberapa ahli dari berbagai bidang khususnya matematikawan. Sebelumnya penulis juga telah mengumpulkan data yang diperlukan kemudian dipelajari terlebih dahulu berbagai teori-teori dasar analisis fungsional yaitu teori tentang titik tetap, ruang metrik dan fungsi kontinu, serta pembahasan inti dari penelitian ini yaitu teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu multiplikatif di ruang metrik multiplikatif, seperti yang telah disebutkan sebelumnya bahwa skripsi ini mengacu pada jurnal yang ditulis oleh Muhammad Sarwar dan Badshah E. Rome pada tahun 2014 yang berjudul *Some Unique Fixed Point Theorems in Multiplicative Metric Space*. Pembuktian teorema-teorema yang disajikan, termasuk juga pembuktian teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu multiplikatif di ruang metrik multiplikatif ini masih sulit untuk dipahami, adapun akibat dari teorema ini tidak dibuktikan di dalam jurnal tersebut. Oleh karena itu, perlu adanya penjelasan lebih detail serta contoh-contoh sederhana supaya teorema dan akibat dari teorema tersebut lebih mudah untuk dipahami.

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan berguna untuk mempermudah mengetahui isi serta urutan-urutan yang terdapat di dalam skripsi ini. Oleh karena itu, perlu dipahami sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan skripsi ini. Adapun sistematika penulisan yang digunakan oleh penulis adalah sistematika penulisan 4

(empat) bab, secara garis besar penjelasan masing-masing bab adalah sebagai berikut :

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang kajian pustaka berupa beberapa dasar teori analisis real dan teori dasar analisis fungsional yang mendukung pembahasan teori-teori berikutnya, sehingga dapat digunakan dalam pembahasan teorema inti dalam penelitian ini, yaitu pembahasan yang terdapat pada BAB III.

BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas inti dari penelitian yaitu ruang metrik multiplikatif dan teorema ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu multiplikatif di ruang metrik multiplikatif beserta contohnya juga akibat dari teorema tersebut.

BAB IV : PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian dari skripsi ini.

BAB IV

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan sebelumnya adalah :

1. Pembuktian Teorema Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontinu di Ruang Metrik Multiplikatif dilakukan dengan beberapa langkah pembuktian. Langkah pembuktian tersebut diantaranya yaitu :
 - a. Terlebih dahulu dibentuk suatu barisan yang diperoleh dari iterasi fungsi secara rekursif melalui suatu titik elemen domain fungsi tersebut. Lebih lanjut, barisan tersebut merupakan himpunan bagian dari himpunan tak kosong M .
 - b. Dibuktikan barisan tersebut konvergen multiplikatif ke suatu titik di M . Pembuktian kekonvergenan multiplikatif ini memanfaatkan sifat kekontinuan multiplikatif yang telah disajikan pada bab sebelumnya.
 - c. Setelah dibuktikan barisan tersebut konvergen multiplikatif ke suatu titik di M , langkah selanjutnya adalah pembuktian pasangan titik-titik yang berbeda dari barisan yang diperoleh dari langkah sebelumnya merupakan barisan turun monoton.
 - d. Pembuktian eksistensi titik tetap pada fungsi kontinu multiplikatif di

ruang metrik multiplikatif. Langkah ini, dapat dilakukan dengan memilih salah satu dari 2 (dua) cara yang telah disajikan pada bab sebelumnya. Adapun pemilihan cara yang digunakan dapat disesuaikan dengan hasil yang diperoleh dari langkah-langkah sebelumnya.

e. Setelah dibuktikan bahwa fungsi kontinu multiplikatif di ruang metrik multiplikatif tersebut memiliki titik tetap, selanjutnya dibuktikan titik tetap tersebut adalah tunggal.

2. Berdasarkan langkah pembuktian (1*d*). Barisan yang diperoleh dari langkah pembuktian (1*a*) yang memenuhi langkah pembuktian (1*b*) di atas, terdapat 2 (dua) kemungkinan yang akan terjadi. *Pertama*, setidaknya terdapat 2 (dua) titik yang sama dari anggota barisan tersebut, sehingga langkah pembuktian (1*d*) dapat menggunakan cara *i*, akan tetapi cara *i* ini hanya dapat membuktikan eksistensi dari titik tetapnya, sedangkan pembuktian ketunggalan titik tetapnya tidak cukup dengan menggunakan cara *i* ini. *Kedua*, semua anggota barisan tersebut berbeda, sehingga langkah pembuktian (1*d*) dapat menggunakan cara *ii*.
3. Kondisi pertidaksamaan yang terdapat Teorema 3.2.1 beserta Akibatnya, memiliki peran penting dalam langkah-langkah pembuktian teorema dan akibat-akibatnya, terlebih pada langkah pembuktian (1*c*), (1*d*), dan (1*e*).

4.2. Saran

Berdasarkan keterbatasan dari penulis dalam melakukan penelitian ini, maka berikut akan dicantumkan beberapa saran dari penulis untuk para pembaca dan para peneliti selanjutnya. Hal ini, bertujuan supaya ilmu matematika khususnya pembahasan tentang ruang metrik multiplikatif terus mengalami perkembangan ke arah yang lebih baik.

Adapun saran dari penulis adalah sebagai berikut :

1. Bagi para pembaca, contoh penerapan Teorema Ketunggalan Titik Tetap pada Fungsi Kontinu Multiplikatif di Ruang Metrik Multiplikatif yang di berikan dalam skripsi ini sangatlah terbatas, sehingga untuk para pembaca perlu menggunakan contoh-contoh lain guna menambah pemahaman tentang pembuktian teorema tersebut. Selanjutnya diharapkan dapat melakukan penelitian lanjutan tentang ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif.
2. Bagi para peneliti selanjutnya,
 - a. Penelitian ini hanya membahas tentang konsep dasar ruang metrik multiplikatif dan teorema ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif dimana fungsi yang digunakan hanyalah fungsi kontinu multiplikatif yang memenuhi kondisi tertentu. Oleh karena itu, penelitian ini masih dapat di- kembangkan lagi, misalnya mengganti fungsi yang digunakan dari fungsi kontinu multiplikatif menjadi fungsi semi kontinu multiplikatif atau menjadi fungsi kontinu seragam multiplikatif.
 - b. Selanjutnya, dalam pengkajian eksistensi dan ketunggalan titik tetap pada fungsi kontinu multiplikatif ini, dapat dilakukan dengan menggunakan kondisi lain selain 3 (tiga) kondisi yang diberikan dalam teorema inti pada penelitian ini atau dengan menggunakan kondisi yang ekuivalen dengan 3 (tiga) kondisi tersebut, sehingga dapat menghasilkan teorema baru tentang ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif.
 - c. Seperti yang telah disebutkan dalam saran bagi para pembaca di atas, contoh penerapan ketunggalan titik tetap di ruang metrik multiplikatif yang diberikan dalam skripsi ini sangatlah terbatas. Selain itu, ketiga

akibat dari teorema tersebut belum diberikan contoh penerapannya, sehingga perlu adanya contoh-contoh lain guna mempermudah pemahaman pembuktian teorema dan akibat dari teorema tersebut.



DAFTAR PUSTAKA

- Al-Qur'an dan Terjemahannya*, 2009, Departemen Agama Republik Indonesia. Jakarta: PT.Sygma Examedia Arkanleema.
- Bartle, R. G., dan Sherbert, D. R., 2010, *Introduction to Real Analysis. Third Edition*, New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Bashirov, A. E., Kurpnar, E. M., dan Ozyapc, A., *Multiplicative calculus and its applications*, J. Math.Analy. App., 337(2008), 3648.
- Hewitt, E., dan Stromberg, K., 1965, *Real and Abstract Analysis*, London: Springer Verlag.
- Kertasari, Yunita, *Analysis of Fuzzy Continuity of Function*, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Thesis. Departemen of Mathematics. Faculty of Sains and Technology (2012).
- Khabibah, S., dkk., *Dinamika Keluarga Fungsi Kuadrat $Q_c(x) = x^2 + c$ Berdasarkan Titik Tetap*, Universitas Diponegoro Semarang: Departemen of Mathematics. Faculty of Science and Mathematics [38574] Februari (2013).
- Malahayati, *Analisa Ketunggalan Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif di Ruang Metrik Lengkap dengan Memanfaatkan Jarak-W*, J. Matematika.Mantik., Vol.01 No.02. Mei (2016).
- Ozavsar, M., dan Cevikel, A. C., *Fixed point of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric space*, arXiv:1205.5131v1 [matn.GN] (2012).

Pendra, Tri, *The Classification of the Al-Qur'an Verses that Contain's Mathematic Concepts*, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Theses. Departemen of Mathematics. Faculty of Sains and Technology (2012).

Purcell, E. J., dan Varberg, D., 1994, *Kalkulus dan Geometri Analitis. Jilid 1: Edisi 5*, Jakarta: Erlangga Press.

Rachmawati, Wida, 2015, *Konsep Bilangan untuk Calon Guru SD/MI*, Depok: Madani Publishing.

Sarwar, M., dan Rome, B. E., *Some Unique xed points theorems in multiplicative metric space*, <http://arxiv.org/abs/1410.3384> (2014).

Setyobudi, Febrina Mediawati, *The Use of Elliptic Curve Cryptography on Elgamal Encryption*, UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Theses. Departemen of Mathematics. Faculty of Sains and Technology (2012).

Shirali, Satish dan Vasudeva, Harkrishan L., 2006, *Metric Spaces*, London: Springer Verlag.

Soesianto, F., dan Dwijono, Djoni, 2003, *Seni Logika Matematika: Logika Proposisional*, Yogyakarta: Penerbit Andi.

CURRICULUM VITAE



Nama Lengkap : NURYANTO

Alamat : Dusun Krikilan RT: 005/RW: 007
Desa Grati Tunon Kec. Grati
Kab. Pasuruan.

Telp : +6282220308766

e – mail : nuryantofaqod@gmail.com

Riwayat Pendidikan : SDN Kalipang II-Grati-Pasuruan Tahun 2000 – 2006
MTs DU Ranuklindungan-Grati-Pasuruan Tahun 2006 – 2009
MAN Kraton-Pasuruan Tahun 2009 – 2012
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta Tahun 2014 – 2019