

SKRIPSI

**TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PERSAMAAN
TELEGRAF**



HANA MEI SATRIANA SARI
15610018
STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2019

TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PERSAMAAN TELEGRAF

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

HANA MEI SATRIANA SARI

15610018

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2019



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Hana Mei Satriana Sari
NIM : 15610018
Judul Skripsi : *Transformasi Laplace Ganda pada Persamaan Telegraph*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Pembimbing II

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom.

NIP: 19720423 199903 1 003

Yogyakarta, 20 Februari 2019

Pembimbing I

Sugiyanto, M.Si.

NIP. 19800505 200801 1 028



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1251/Un.02/DST/PP.00.9/04/2019

Tugas Akhir dengan judul : TRANSFORMASI LAPLACE GANDA PADA PERSAMAAN TELEGRAF

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : HANA MEI SATRIANA SARI
Nomor Induk Mahasiswa : 15610018
Telah diujikan pada : Selasa, 02 April 2019
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Sugiyanto, S.Si., M.Si
NIP. 19800505 200801 1 028

Penguji I

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji II

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom
NIP. 19720423 199903 1 003

Yogyakarta, 02 April 2019

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

DEKAN



Dr. Murtono, M.Si.
NIP. 19691212 200003 1 001

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hana Mei Satriana Sari

NIM : 15610018

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya serupa yang diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu perguruan tinggi lain dan sepanjang pengetahuan saya juga belum terdapat karya yang pernah ditulis atau diterbitkan orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah skripsi ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 13 Maret 2019

Yang Menyatakan



Hana Mei Satriana Sari

PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua tercinta (Bapak Prayitno dan Ibu Muntarti)

serta seluruh keluarga

Teman-teman Matematika Angkatan 2015 UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Terima kasih untuk segala kenangan yang begitu berharga



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

"Nrimo ing pandum"

"Tentrem Iku Sarananing Urip Ana Donya"

-Falsafah Jawa-

"The happiest people do not necessarily have the best things. They simply appreciate the things they have"

-Warren Buffett-

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(QS al-Insyirah: 5-6)

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PRAKATA

Alhamdulillah rabbil'alamin, puji syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul *Transformasi Laplace Ganda pada Persamaan Telegraph*. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menjadi suri tauladan bagi seluruh umatnya.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi syarat kuliah guna memperoleh gelar Sarjana Matematika. Penulis menyadari dalam penulisan skripsi ini tidak akan terselesaikan tanpa adanya bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati, penyusun banyak mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Murtono, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
2. Dr. M. Wakhid Mustofa, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga sekaligus Dosen Pembimbing Akademik mahasiswa program studi matematika angkatan 2015.
3. Sugiyanto, M.Si., serta Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom. selaku pembimbing yang telah memberikan arahan, saran, serta solusi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
4. Segenap dosen serta karyawan Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan studi.

5. Bapak Prayitno dan Ibu Muntarti, kedua orang tua tercinta yang selalu memberikan kasih sayang, do'a, dan dukungan kepada penulis.
6. Kakak tercinta Ajeng Mega Asriani dan Fachriaditya Dany Bayu Krisna, ponakan tersayang Lituhayu Hanum Fachrega, serta nenek Miskiyah yang selalu memberikan dukungan, do'a dan motivasi kepada penulis.
7. Teman-teman matematika angkatan 2015 yang telah memberikan semangat dan bantuan selama berproses bersama, sukses selalu untuk kalian semua.
8. Sahabat-sahabat seperjuangan (Umil, Duweg, Inung, Ily, Mutiara, Syakila, Nurlita, dan Irfiana) serta teman-teman satu bimbingan (Luluk dan Rodham) yang selalu memberikan dukungan serta motivasi untuk penulis.
9. Resa Nanda Hanantya yang telah memberikan semangat dan perhatian untuk penulis.
10. Teman-teman KKN 24 Selo Barat (Annisa, Rahmanda dan lainnya) yang telah memberikan motivasi serta pengalaman kepada penulis.
11. Teman-teman kos bunena (Mike, Teh Desi, Wama, Ayu, Lelita, Kak Cut, Mbak Suri, dan lainnya) yang telah memberikan motivasi serta perhatian kepada penulis.
12. Teman-teman HM-PS Matematika yang telah memberikan motivasi serta pengalaman kepengurusan kepada penulis.
13. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, kritik dan saran sangat diharapkan sehingga skripsi ini dapat lebih baik lagi. Penulis berharap skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis maupun pembaca.

Yogyakarta, 14 Maret 2019

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR LAMBANG	xv
INTISARI	xvi
ABSTRACT	xvii
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Rumusan Masalah	3
1.3. Batasan Masalah	3
1.4. Tujuan Penelitian	3
1.5. Manfaat Penelitian	4
1.6. Tinjauan Pustaka	4
1.7. Sistematika Penulisan	6
II LANDASAN TEORI	8
2.1. Pengertian Persamaan Diferensial	8
2.1.1. Persamaan Diferensial Biasa	8

2.1.2.	Persamaan Diferensial Parsial	9
2.1.3.	Orde Persamaan Diferensial	9
2.1.4.	Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Homogen	10
2.1.5.	Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Tak Homogen	11
2.2.	Limit	11
2.3.	Integral	11
2.3.1.	Integral Tak Wajar	12
2.3.2.	Integral Parsial	14
2.4.	Transformasi Laplace	14
2.4.1.	Sifat-sifat Transformasi Laplace	15
2.4.2.	Fungsi Heaviside	18
2.4.3.	Invers Transformasi Laplace	19
2.4.4.	Konvolusi	25
2.5.	Transformasi Laplace Ganda	27
2.5.1.	Invers Transformasi Laplace Ganda	33
2.5.2.	Konvolusi Ganda	34
2.5.3.	Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas	36
III	METODE PENELITIAN	37
IV	PEMBAHASAN	39
4.1.	Analisis Solusi Persamaan Telegraf dan Persamaan Integrodiferensial Parsial dengan Transformasi Laplace Ganda	39
4.1.1.	Analisis Solusi Persamaan Telegraf dengan Transformasi Laplace Ganda	40
4.1.2.	Analisis Solusi Persamaan Integrodiferensial Parsial dengan Transformasi Laplace Ganda	43
4.2.	Solusi Persamaan Telegraf dan Persamaan Integrodiferensial Parsial	46
4.2.1.	Solusi Persamaan Telegraf Kasus I	47

4.2.2. Solusi Persamaan Telegraf Kasus II	53
4.2.3. Solusi Persamaan Integrodiferensial Parsial	60
V SIMULASI	71
5.1. Simulasi Persamaan Telegraf Kasus I	71
5.2. Simulasi Persamaan Telegraf Kasus II	72
5.3. Simulasi Persamaan Integrodiferensial Parsial	73
VI PENUTUP	75
6.1. Kesimpulan	75
6.2. Saran	76
DAFTAR PUSTAKA	77
LAMPIRAN	79

DAFTAR TABEL

1.1	Tinjauan Pustaka	5
2.1	Rumus-rumus Dasar Transformasi Laplace dan Invers Transformasi Laplace Fungsi-Fungsi Sederhana	25



DAFTAR GAMBAR

3.1	Langkah-langkah Penelitian	38
5.1	Grafik Solusi Persamaan Telegraph Kasus I	72
5.2	Grafik Solusi Persamaan Telegraph Kasus II	73
5.3	Grafik Solusi Persamaan Integrodiferensial Parsial	74



DAFTAR LAMBANG

\mathcal{L} : transformasi Laplace

\int : integral

∞ : tak hingga

π : phi

α : alpha

β : beta

Γ : Gamma

$*$: konvolusi

$**$: konvolusi ganda

■ : akhir suatu bukti

\rightarrow : mendekati

\Leftrightarrow : jika dan hanya jika

τ : tau

λ : lambda

ε : varepsilon

INTISARI

Transformasi Laplace Ganda pada Persamaan Telegraph

Oleh

HANA MEI SATRIANA SARI

15610018

Persamaan telegraf merupakan persamaan diferensial parsial yang termasuk dalam persamaan gelombang dimensi satu. Persamaan ini dapat digunakan untuk menyelesaikan beberapa permasalahan yang mengatur secara fisik tegangan dan arus pada saluran transmisi listrik dalam jarak dan waktu. Pada penelitian ini, persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial dianalisis dan diselesaikan dengan transformasi Laplace ganda. Persamaan ini disertai nilai awal dan nilai batas yang diselesaikan dengan transformasi Laplace. Selanjutnya diberikan beberapa kasus persamaan untuk diperoleh solusinya. Solusi dari beberapa kasus tersebut menunjukkan bahwa transformasi Laplace ganda merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan telegraf. Solusi-solusi tersebut kemudian disimulasikan dalam bentuk grafik yang menunjukkan bentuk gelombang dari persamaan tersebut.

Kata kunci : Persamaan Telegraph, Persamaan Integrodiferensial, Transformasi Laplace Ganda

ABSTRACT

Double Laplace Transformation in Telegraph Equation

By

HANA MEI SATRIANA SARI

15610018

Telegraph equation is a partial differential equation which include in the one dimensional wave equation. This equation can be used to solve several problems that physically regulate voltage and current in the electricity transmission line in distance and time. In this study, telegraph equation and partial integrodifferential equation were analyzed and resolved by double Laplace transform. This equation was accompanied by initial values and boundary values that solved by Laplace transform. Next, there are some examples of equations to discover a solution. The solution of these examples showed that double Laplace transform is one method that can be used to solve telegraph equation. Then, the solutions are simulated in graphical form which shows the waveform of the equation.

Keywords: Telegraph Equation, Partial Integrodifferential Equation, Double Laplace Transform

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Persamaan gelombang merupakan salah satu dari tiga persamaan fundamental dalam matematika fisika. Persamaan gelombang terdiri dari persamaan homogen dan persamaan non homogen. Persamaan homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan berbagai metode, seperti: pemisahan variabel, metode karakteristik, transformasi Laplace tunggal, dan transformasi fourier. Sedangkan persamaan non homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan transformasi Laplace ganda [Gadain dan Kilicman, 2008].

Persamaan telegraf merupakan persamaan diferensial parsial yang termasuk dalam persamaan gelombang dimensi satu (hiperbolik). Persamaan yang dikembangkan secara luas dalam sains dan teknik oleh Oliver Heaviside pada tahun 1880 ini mengatur secara fisik tegangan dan arus pada saluran transmisi listrik dalam jarak dan waktu [Jang, 2015].

Persamaan telegraf merupakan persamaan yang dapat diaplikasikan dalam beberapa hal, terutama dalam analisis sinyal untuk transmisi dan propagasi sinyal listrik. Salah satu aplikasi persamaan telegraf adalah penyelesaian masalah sistem komunikasi yang melibatkan transmisi sinyal dari satu titik ke titik lain. Medium transmisi ini dapat dibagi menjadi 2 kelompok, yaitu terpandu dan saluran transmisi terarah. Dalam medium terpandu, sinyal ditransfer melalui kabel koaksial atau transmisi baris yang secara langsung menyebarkan informasi antara 2 atau lebih banyak lokasi. Dalam perjalanannya, media transmisi ini sering

kehilangan sinyal yang membuatnya kurang optimal. Untuk menentukan hilangnya sinyal ini, dimodelkan beberapa jenis persamaan untuk mengoptimalkannya, salah satunya adalah persamaan telegraf [Veerasha, 2018].

Persamaan telegraf biasanya disertai dengan nilai awal dan nilai batas, untuk menyelesaikan persamaan tersebut, diperlukan metode untuk menganalisis dan memperoleh solusinya. Dalam hal ini matematika berperan untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Terdapat beberapa metode matematika untuk menyelesaikan persamaan tersebut, salah satu metode penyelesaian yang efektif untuk memperoleh solusinya adalah transformasi Laplace yang ditemukan pada abad ke-19 oleh insinyur listrik Inggris, Oliver Heaviside [Dhunde dan Waghmare, 2016]. Transformasi Laplace merupakan salah satu metode pemecahan persamaan gelombang homogen koefisien konstan, sedangkan untuk persamaan non homogen koefisien konstan, diselesaikan dengan metode transformasi Laplace ganda yang merupakan pengembangan dari transformasi Laplace.

Sejauh ini masih sedikit literatur dan peneliti yang membahas tentang transformasi Laplace ganda, hal ini menjadi salah satu alasan penulis menelitinya. Dalam beberapa tahun terakhir, terdapat beberapa peneliti yang memecahkan masalah persamaan dengan transformasi Laplace ganda. Beberapa diantaranya yaitu Adem Kilicman, Hassan E. Gadain, Ranjid Dhunde, Govind Waghmare, Arman Aghili, Lokenath Debnath, D. Bhatta, dan lainnya.

Berdasarkan latar belakang di atas, penulisan skripsi ini akan membahas tentang penyelesaian persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial yang termasuk persamaan telegraf yang memuat integral dan turunan di dalamnya. Persamaan-persamaan tersebut disertai dengan nilai awal dan nilai batas yang kemudian diselesaikan dengan transformasi Laplace ganda.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka dapat dirumuskan beberapa masalah yang akan dibahas, yaitu:

1. Bagaimanakah analisis transformasi Laplace ganda pada persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial?
2. Bagaimanakah solusi persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial dengan masalah nilai awal dan nilai batas?

1.3. Batasan Masalah

Terdapat beberapa batasan masalah agar penelitian tidak melebar, adapun batasan masalah yang akan dibahas yaitu

1. Persamaan telegraf yang digunakan dengan bentuk umum:

$$u_{xx} = u_{tt} + \alpha u_t + u - f(x, t).$$

2. Persamaan integrodiferensial parsial yang digunakan dengan bentuk umum:

$$u_{tt} - u_{xx} + u + \int_0^x \int_0^t g(x - \alpha, t - \beta) u(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = f(x, t).$$

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Mengetahui analisis transformasi lapalce ganda pada persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial.
2. Mengetahui solusi persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial dengan masalah nilai awal dan nilai batas.

1.5. Manfaat Penelitian

Dari tujuan penelitian di atas, maka manfaat yang didapatkan dari penelitian yaitu memberikan pengetahuan tentang transformasi Laplace ganda sebagai salah satu metode penyelesaian persamaan diferensial parsial terutama persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial.

1.6. Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini mengacu pada literatur-literatur yang tertera pada daftar pustaka sebagai landasan teori yang sesuai dengan pembahasan penelitian. Beberapa pengertian dasar persamaan diferensial mengacu pada buku yang ditulis oleh Nugroho (2011), Sugiyanto dan Mugiyono (2011). Beberapa dasar teori tentang integral mengacu pada buku yang ditulis oleh Sudaryono (2015). Selanjutnya untuk dasar teori transformasi Laplace mengacu pada buku yang ditulis oleh Prayudi (2006) dan Spiegel (1965).

Penelitian dalam jurnal *A New Solution Procedure for The Nonlinear Telegraph Equation*, yang ditulis oleh T. S. Jang (2015), membahas mengenai penyelesaian persamaan telegraf dengan menggunakan analisis solusi persamaan hiperbolik linear Klein-Gordon.

Penelitian dalam jurnal *"The Combined Laplace Transform-Adomian Decomposition Method for Handling Nonlinear Volterra Integrodifferential"* yang ditulis oleh Abdul-Majid Wazwaz (2010), membahas mengenai penyelesaian persamaan non linier voltera integro-diferensial dengan transformasi Laplace dan metode dekomposisi adomian.

Penelitian dalam jurnal *The Double Laplace Transforms and Their Properties with Application to Functional, Integral and Partial Differential Equations* yang ditulis oleh Lokenath Debnath (2015), membahas mengenai sifat-

sifat transformasi Laplace ganda dan aplikasinya dalam fungsi, integral dan persamaan diferensial parsial. Selain itu membahas transformasi Laplace ganda sebagai metode untuk menyelesaikan masalah nilai awal dan nilai batas pada matematika dan matematika fisika.

Perbedaan penelitian ini dengan penelitian-penelitian sebelumnya yaitu metode penyelesaian persamaannya. Persamaan telegraf yang sebelumnya diselesaikan dengan menggunakan analisis solusi persamaan hiperbolik linear Klein-Gordon dan persamaan integrodiferensial yang sebelumnya diselesaikan dengan transformasi Laplace, akan diselesaikan dengan transformasi Laplace ganda. Selain itu akan dibahas simulasi dari solusi penyelesaiannya. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian-penelitian sebelumnya dapat disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 1.1 Tinjauan Pustaka

No	Nama Peneliti	Judul Penelitian	Hasil Penelitian
1.	T.S. Jang (2015)	<i>A New Solution Procedure for The Nonlinear Telegraph Equation</i>	Penelitian ini membahas mengenai penyelesaian persamaan telegraf dengan menggunakan analisis solusi persamaan linear Klein-Gordon.
2.	Abdul-Majid Wazwaz (2010)	<i>The Combined Laplace Transform Adomian Decomposition Method for Handling Nonlinear Volterra Integrodifferential Equations</i>	Penelitian ini membahas penyelesaian persamaan voltera integrodiferensial dengan transformasi Laplace

No	Nama Peneliti	Judul Penelitian	Hasil Penelitian
3.	Lokenath Debnath (2015)	<i>The Double Laplace Transforms and Their Properties with Application to Functional, Integral and Partial Differential Equations</i>	Penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat transformasi Laplace ganda dan aplikasinya dalam fungsi, integral dan persamaan diferensial parsial.
4.	Hana Mei Satriana Sari (2019)	Transformasi Laplace Ganda pada Persamaan Telegraf	Penelitian ini membahas analisis, hasil, dan simulasi penyelesaian persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial dengan transformasi Laplace ganda

1.7. Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi mudah dipahami, digunakan sistematika penulisan sebagai gambaran menyeluruhnya, secara garis besar sistematika penulisannya sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini akan dibahas kerangka dari penulisan skripsi yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori dasar yang mendukung penyelesaian rumusan masalah pada bab selanjutnya. Materi yang akan dijadikan landasan teori yaitu penjelasan tentang persamaan diferensial, baik persamaan diferensial biasa maupun parsial, limit, integral, transformasi Laplace, transformasi Laplace ganda, serta masalah nilai awal dan nilai batas.

BAB III : METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan metode yang digunakan dalam penelitian yang meliputi langkah kerja dan alur penelitian.

BAB IV : PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis dan menyelesaikan solusi persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial. Pada bab ini pula diberikan beberapa contoh kasus disertai nilai awal dan nilai batas yang diselesaikan dengan transformasi Laplace ganda.

BAB V : SIMULASI NUMERIK

Pada bab ini dibahas simulasi numerik dari solusi penyelesaian yang telah diperoleh, sehingga dapat ditampilkan grafik untuk mengetahui gambaran dari hasil penelitian yang dilakukan.

BAB VI : PENUTUP

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan penelitian serta saran sebagai acuan penelitian selanjutnya.

BAB VI

PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

6.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, simpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini yaitu:

1. Transformasi Laplace ganda dapat digunakan sebagai salah satu metode untuk menganalisis dan menyelesaikan masalah persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial.
2. Analisis persamaan telegraf bentuk umum $u_{xx} = u_{tt} + \alpha u_t + u - f(x, t)$ dengan masalah nilai awal dan nilai batas yaitu

$$u(x, t) = \mathcal{L}_p^{-1} \mathcal{L}_s^{-1} \left[\left(\frac{pF_1(s) + F_2(s)}{(p^2 - s^2 - \alpha s - 1)} \right) - \left(\frac{sG_1(p) + G_2(p) + \alpha G_1(p) + F(p, s)}{(p^2 - s^2 - \alpha s - 1)} \right) \right]$$

3. Analisis persamaan integrodiferensial parsial bentuk umum

$u_{tt} - u_{xx} + u + \int_0^x \int_0^t g(x - \alpha, t - \beta)u(\alpha, \beta)d\alpha d\beta = f(x, t)$ dengan masalah nilai awal dan nilai batas yaitu

$$u(x, t) = \mathcal{L}_p^{-1} \mathcal{L}_s^{-1} \left[\left(\frac{F(p, s) + pF_1(s) + F_2(s)}{(p^2 - s^2 - s - 1)} \right) - \left(\frac{sG_1(p) + G_2(p) + G_1(p)}{(p^2 - s^2 - s - 1)} \right) \right]$$

4. Solusi persamaan telegraf homogen kasus I dengan masalah nilai awal

$u(x, 0) = e^x$, $u_t(x, 0) = -e^x$ dan nilai batas $u(0, t) = e^{-t}$, $u_x(0, t) = e^{-t}$ yaitu $u(x, t) = e^{x-t}$

5. Solusi persamaan telegraf non homogen kasus II dengan masalah nilai awal $u(x, 0) = e^x$, $u_t(x, 0) = e^x$ dan nilai batas $u(0, t) = e^t$, $u_x(0, t) = e^t$ yaitu $u(x, t) = e^{x+t}$
6. Solusi persamaan integrodiferensial parsial dengan masalah nilai awal $u(x, 0) = e^x$, $u_t(x, 0) = e^x$ dan nilai batas $u(0, t) = e^t$, $u_x(0, t) = e^t$ yaitu $u(x, t) = e^{x+t}$
7. Solusi persamaan telegraf kasus pertama menghasilkan grafik yang menunjukkan bahwa semakin besar waktu yang diberikan, maka semakin kecil solusi yang didapatkan.
8. Solusi persamaan telegraf kasus kedua dan persamaan integrodiferensial parsial menghasilkan grafik yang menunjukkan bahwa semakin besar waktu yang diberikan, maka semakin besar solusi yang didapatkan.

6.2. Saran

Penulisan penelitian ini hanya membahas solusi penyelesaian persamaan telegraf dan persamaan integrodiferensial parsial dengan menggunakan transformasi Laplace ganda. Bagi penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas tentang transformasi Laplace ganda atau transformasi Laplace dimensi n pada persamaan parsial diferensial lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Debnath, L. dan Bhatta D., 2015, *Integral Transforms and Their Applications*, India.
- Debnath, Lokenath, 2015, *The Double Laplace Transforms and Their Properties with Application to Functional, Integral and Partial Differential Equations*, India.
- Dedeng, I Wayan, 2007, *Kalkulus Lanjut Persamaan Diferensial dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Dhunde, Ranjit R. dan G. L. Waghmare. 2016. *Double Laplace Transform Method for Solving Space and Time Fractional Telegraph Equation*. Malaysia.
- Eltayeb, Hassan dan Adem Kilicman, 2008, *A Note on Wave Equation and Convolution*, Malaysia.
- Eltayeb, Hassan dan Adem Kilicman, 2013, *A Note on Double Laplace Transform and Telegraphic Equations*
- Gadain, Hassan Eltayeb dan Adem Kilicman, 2008, *A Note on Solution of Wave, Laplace and Heat Equations with Convolution terms by Using A Double Laplace Transform*, Malaysia.
- Jang, T.S., 2015, *A new solution procedure for the nonlinear telegraph equation*, Korea.
- Kartono, 2012, *Persamaan Diferensial Biasa Model Matematika Fenomena Perubahan*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

- Kilicman, Adem dan Hassan Eltayeb, 2008, *A Note on Defining Singular Integral as Distribution and Partial Equations with Convolution Term*, Malaysia.
- Marwan dan Said Munzir, 2009, *Persamaan Diferensial*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Nugroho, Didit Budi, 2011, *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya Penyelesaian Manual dan Menggunakan Maple*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Panggabean, A. B., 2008, *Kalkulus*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Prayudi, 2006, *Matematika Teknik*, Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Spiegel, Murray R., 1965, *Schaums Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms*. Amerika: The McGraw-Hill Companies.
- Spiegel, Murray R., 1971, *Schaums Outline of Advanced for Engineers and Scientists*. Amerika: The McGraw-Hill Companies.
- Sudaryono, 2015, *Kalkulus Diferensial dan Integral Teori dan Aplikasi*, Jakarta: Prenadamedia Group.
- Sugiyanto dan Slamet Mugiyono, 2011, *Persamaan Diferensial Biasa*, Yogyakarta: SUKA-Press UIN Sunan Kalijaga.
- Veerasha, P. dan D. G. Prakasha, 2018, *Numerical solution for fractional model of telegraph equation by using q-HATM*, India.
- Wazwaz, Abdul-Majid, 2010, *The Combined Laplace Transform-Adomian Decomposition Method for Handling Nonlinear Volterra Integrodifferential*, Chicago.
- Wazwaz, A.-M., 2011, *Volterra Integro-Differential Equations*, Springer, Berlin, Heidelberg.