Rachmad Resmiyanto

Nalar Fisika di Pasar Saham

Pengantar Ekonofisika

GRE publishing

Pengantar Ekonofisika

Nalar Fisika di Pasar Saham

Rachmad Resmiyanto

GRE Publishing

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Rachmad Resmiyanto

Nalar Fisika di Pasar Saham: Pengantar Ekonofisika; penulis, Rachmad Resmiyanto; Edisi 1.– Yogyakarta: GRE Publishing, 2014.
203 hlm.;21 cm
ISBN 978-602-7677-52-4
1. Fisika Ekonomi. I. Judul.

Sampul dan tata letak: Abu Ibrahim Abimanyu

DITERBITKAN OLEH GRE PUBLISHING
Jalan Monjali Dusun Nandan Gang Kembang Duren II No. 83A Sarihardjo Ngaglik Sleman – Yogyakarta
Laman: `http://grepublishing.com`

Edisi Pertama, Ramadhan 1435 H/Juli 2014

Sekapur Sirih

Pasar saham sarat dengan unsur spekulasi. Mark Twain[1] melukiskannya sebagai:

> "Oktober. Ini adalah salah satu bulan yang teramat berbahaya untuk berspekulasi saham. Bulan-bulan yang lain adalah Juli, Januari, September, April, Nopember, Mei, Maret, Juni, Desember, Agustus dan Februari."

Ini artinya saat demi saat di pasar saham hanyalah spekulasi demi spekulasi.

Spekulasi tidak sepenuhnya merupakan permainan judi, dimana tidak ada sama sekali ukuran-ukuran untuk menilainya. Pada gilirannya, apabila ukuran-ukuran itu bisa dihitung secara tepat (eksak) maka akan membuat semakin matang sebuah pengambilan keputusan dalam penanaman modal, sehingga seorang pemodal tidak perlu harus *'swarga nunut neraka katut'* pada pemodal lain.

[1]Sastrawan Amerika penganut madzhab realisme.

Ranah kajian semacam ini di fisika merupakan bagian dari **ekonofisika** (*econophysics*). Beberapa yang lain menyebut kajian seperti ini dengan istilah fisika keuangan (*phynance*).

Selama ini, banyak orang memahami bahwa fisika dan ekonomi merupakan dua disiplin ilmu yang tidak mungkin saling menjamah. Keduanya bahkan terkesan saling bertolak belakang. Pendapat ini lebih banyak didasarkan pada pandangan bahwa fisika tergolong dalam rumpun ilmu pasti (sains) sedangkan ekonomi bernaung dibawah rumpun ilmu sosial. Kedua buah rumpun ini dipahami memiliki perbedaan pada aras ontologis. Epistemologi keduanya juga dipandang tak sama. Perbedaan ini kemudian membuat beberapa ahli di kedua ilmu menyatakan bahwa fisika tidak mungkin bisa menjamah ekonomi. Bahkan Mubyarto, ekonom UGM, memantapkan bahwa jika ekonomi harus rujuk (bergabung) dengan ilmu yang lain, maka rujuk itu harus dilakukan bukan dengan fisika, melainkan dengan sosiologi dan antropologi (Kompas, 17/09/2002).

Saya sadar, ekonomika (*economics*) memang tidak mempelajari tabiat benda-benda nirnyawa sebagaimana fisika. Objek kajian ekonomika adalah tabiat manusia dalam mengurus rumah tangganya (*oikos* = rumah; *nomos* = kaidah, aturan). Untuk itu, buku ini mencoba menyajikan sebuah pandangan baru.

* * *

Dalam penulisan karya ini, saya berusaha sedapat mungkin menghindari penggunaan istilah asing. Saya lebih menyukai untuk menggunakan khazanah perbendaharaan kata dalam bahasa Indonesia untuk istilah-istilah tersebut, meskipun istilah asing itu sudah diserap dan sangat masyhur dalam perbicangan keilmuan kita. Hal ini dilatari oleh sebuah keyakinan, bahwa bahasa merupakan benteng terakhir suatu bangsa. Karena itu, pembaca akan sering menjumpai kata-kata semacam takrif, kemeruapan, andaian dan seterusnya. Setiap awal penulisan istilah tersebut, saya selalu mencantumkan istilah aslinya dalam cetak miring untuk menanggulangi keganjilan (jika ada) beberapa istilah yang mungkin belum dianggap lazim dalam khazanah.

Namun, saya mengakui bahwa dalam beberapa bagian karya ini, saya belum bisa sepenuhnya teguh dengan pendirian ini. Acapkali saya terpaksa harus tetap memakai istilah serapan tersebut, bukan karena tidak ada padanannya, namun saya khawatir pesan yang saya sampaikan justru bias dan sulit dimengerti. Misalnya kata ’efisien’ yang sebenarnya sudah ada padanannya yakni ’mangkus’. Saya merasa jika frasa ’hipotesis kemangkusan pasar’ agaknya masih teramat janggal dan sulit ditangkap pesan yang dikandungnya. Karenanya, saya tetap memilih untuk memakai frasa ’hipotesis pasar efisien’.

* * *

Buku ini menyuguhkan lompatan-lompatan nalar dari fisika ke pasar saham. Harapannya, buku ini akan turut melengkapi khazanah buku referensi ekonofisika di Indonesia yang masih sangat langka.

Bagi pembaca dari fisika yang merindukan medan kajian yang menantang, ekonofisika patut untuk dipertimbangkan. Bagi pembaca dari ekonomi yang merindukan cara pandang atau paradigma baru dalam melihat medan persoalan ekonomi, ekonofisika layak diperhitungkan kecanggihannya.

Buku ini awalnya merupakan karya tugas akhir ketika menempuh program sarjana fisika di UGM. Karya itu selesai ditulis pada Desember 2005 dan baru diujikan pada akhir Januari 2006. Saya mengucapkan terimakasih yang setinggi-tingginya kepada Dr.rer.nat M. F. Rosyid yang telah membimbing saya dalam penyelesaian tugas akhir tersebut.

Karya ini menuntun impian saya untuk membangun disiplin *ekonofisika syariah*. Saya mengawalinya dengan membangun pembuktian bahwa sistem ekonomi yang berbasis bunga uang merupakan sistem ekonomi yang destruktif. Pembuktian ini selesai bersamaan dengan selesainya tesis magister saya di Jurusan Fisika UGM 2013. Tesis ini sedang saya persiapkan untuk diterbitkan sebagai buku. Saya harap ia segera menyusul buku ini.

Dalam perjalanannya, setelah banyak membaca dan merenung, akhirnya saya menyadari bahwa kajian tentang pasar saham tidak lain ialah kajian tentang judi. Aktivitas-aktivitas niaga di pasar saham tidak lain merupakan aktivitas judi. Inilah pendapat yang saya pegang saat ini. Saya beriman dengan pendapat ini.

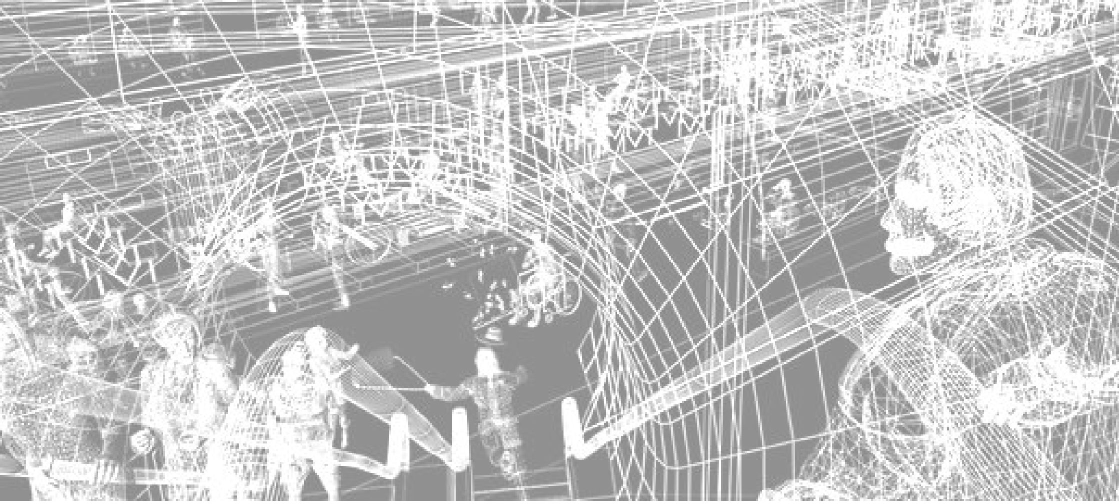
Anda dapat bersekutu atau berseteru dengan pendapat saya. Oleh karena itu, saya hendak menempatkan buku ini sebagai buku yang menawarkan gagasan bahwa *nalar fisika dapat dibawa ke ranah yang berbeda*. Itu saja. Saya tidak sedang mendakwahkan pasar sahamnya tetapi mendakwahkan jalan berpikir fisikanya. Semoga tujuan buku ini tercapai dan saya sangat berharap mendapat pahala dari-Nya.

Saya mengucapkan terimakasih yang tulus kepada Rochmaniyah binti Tarhadi yang senantiasa mengingatkan saya untuk menyelesaikan penulisan buku ini. Saya juga mengucapkan terimakasih kepada Anggun Gunawan, Direktur GRE Publishing Yogyakarta, yang telah berkenan menerbitkan buku ini.

Semoga buku ini turut memberi sumbangan ilmu yang berarti dan membawa keberkahan. Segenap puji untuk Allah Yang Maha Mengetahui. Shalawat dan salam untuk Muhammad Shallallahu 'alaihi wa salam.

Klaten, 15 Jumadilakhir 1435 H (15 April 2014)

Rachmad Resmiyanto



Daftar Isi

1 — Selayang Pandang Ekonofisika

Sejarah mencatat babak baru. Tahun 1997, ranah keilmuan manusia telah bertambah dengan terbitnya istilah '*econophysics*' (ekonofisika). Istilah ini pertama kali digunakan dalam sebuah *workshop* di kota Budapest Hungaria pada bulan Juli, '*Workshop on econophysics*' (De Liso dan Filatrella, 2001, hlm. 2). Maka, mulai saat itu frasa ekonofisika tertera dan mengalir dalam bentangan peradaban manusia.

Konferensi ilmiah pertama yang membahas ini diadakan 2 tahun kemudian (1999) oleh Himpunan Fisika Eropa (*European Physical Society*) dengan tajuk *International Applications of Physics in Financial Analysis* di Dublin Irlandia dan dilanjutkan di Liège setahun berikutnya (2000) (Simanungkalit, 2002; Stauffer, 2000; Surya, 2002). De Liso dan Filatrella (2001) menyatakan bahwa beberapa buku generasi awal yang mengupas konsep-konsep ini antara lain *An Introduction to Econophysics* oleh Mantegna dan Stanley tahun 2000, *Theory of Financial Risk: From Statistical Physics to Risk Managament* oleh Bouchaud dan Potters tahun 2000 dan *An Intoduction to High Frequency Finance* oleh Dacorragna *et al* tahun 2001.

Sebenarnya, sejarah ekonofisika tidak hanya bermula pada tahun 1997. Tahun tersebut lebih tepat jika sekedar dipandang menjadi penanda bahwa nama ekonofisika baru lahir. Acapkali, *econophysics* juga disebut dengan *phynance* (fisika keuangan). Namun, Stauffer (2000) menyatakan istilah *econophysics* jauh lebih berkembang dibanding *phynance*. De Liso dan Filatrella (2001) menyatakan bahwa kata *economics* dan *physics* dalam frasa *econophysics* merupakan cermin dari kerja para fisikawan yang mulai menerapkan fisika statistik ke dalam ranah keuangan pada masa-masa itu. Jika ditilik dengan cakupan yang lebih luas, yakni dengan memandang ekonofisika sebagai interaksi timbal balik antara ekonomi dan fisika, maka penelusuran terhadap rekam jejak ekonofisika menemukan akarnya jauh sebelum bilangan tahun tersebut.

Pada tahun 1973, Black dan Scholes memaklumkan sebuah cara baru dalam menghitung harga opsi yang adil di pasar modal dengan menggunakan model gerak Brown geometrik dan persamaan rambatan panas. Model ini sebenarnya merupakan penyempurnaan dari model yang dirancang oleh Bachelier pada tahun 1900. Pada waktu itu Bachelier menggunakan pendekatan limit jalan acak (gerak Brown).

Bahkan yang lebih mengejutkan, karya klasik Bapak Ekonomi Adam Smith (1723-1790) yang berjudul *The Principles which Lead and Direct Philosophical Enquiries; Illustrated by* *the History of Astronomy* —sering disingkat sebagai *The History of Astronomy* saja[1] — secara jelas membuktikan bahwa ia menggunakan teori gerak planet untuk menjelaskan prinsip-prinsip ekonominya (De Liso dan Filatrella, 2001; Simanungkalit, 2002; Supratikno, 2002). Teorinya yang menyatakan, "fungsi pasar mirip dengan fungsi matahari dalam sistem tata surya" atau pandangannya tentang "tangan-tangan gaib" (*the invisible hands*) yang menciptakan kesetimbangan pasar (*market equilibrium*) menunjukkan betapa kuat pengaruh ini. Karenanya mudah untuk dimafhumi jika Dagun (1992) banyak menggunakan kiasan-kiasan dalam fisika di dalam bukunya yang berjudul *Pengantar Filsafat Ekonomi* demi menjelaskan konsep-konsep ekonomi.

Sedini sebelum *workshop* yang fenomenal itu, Stanley dalam *Nature* edisi 29 Februari 1996 telah mencoba memberikan takrif apa itu ekonofisika. Menurutnya, ekonofisika merupakan penerapan teknik-teknik fisika untuk menyelesaikan persoalan-persoalan ekonomi.

Dengan demikian, tujuan dari ekonofisika adalah menerapkan gagasan ilmu fisika dengan sebaik-baiknya ke dalam ranah ekonomi. Bisa jadi, ekonofisika akan mengurai hukum-hukum alam dan perilaku manusia dalam gejala ekonomi, dan proses ini akan berujung pada lahirnya sebuah ekonomi baru.

Dalam konteks ini, takrif ekonofisika yang diberikan oleh Wang *et al.* (2005) menjadi takrif yang lebih rinci daripada takrif Stanley. Ekonofisika merupakan disiplin yang menerapkan dan menawarkan gagasan, metode dan model dalam fisika

[1]Bentuk penyingkatan judul karya Smith ini sebenarnya amat rancu, sebab singkatan tersebut menunjukkan seolah-olah karya Smith berisi tentang kronologis ilmu astronomi saja

statistik dan kompleksitas untuk menganalisis data-data dari gejala ekonomi.

Sebenarnya, sampai sekarang belum ada takrif yang terang mengenai ekonofisika. Kendati demikian, jumlah karya ilmiah di bidang ini sejak 1992 sampai April 2003 telah mencapai 662 dengan lebih dari 20 jurnal (Fan *et al.*, 2004).

1.1 Hubungan Fisika dan Ekonomi

Selain menunjukkan bahwa gagasan-gagasannya banyak diilhami oleh fisika, karya Smith *The History of Astronomy* juga menunjukkan ada tumpang tindih yang tak terduga dengan Thomas Kuhn mengenai konsep paradigma (De Liso dan Filatrella, 2001, hlm. 5-8). Merujuk pada pendapat Skinner dan Loasby, Smith merupakan perintis konsep paradigma di ekonomi (De Liso dan Filatrella, 2001) sebagaimana Kuhn di fisika (Capra, 2001).

Ternyata tidak hanya Smith yang tertarik dengan metode-metode dalam fisika. Ada sederetan ekonom yang menyusul jejak Smith, seperti Jevons, Walras, Marshall, Stigler, Kim, Lux dan pemenang anugerah nobel ekonomi 1990 Harry Markowitz[2]. Marshall dengan adikaryanya *The Principle of Economics* 1890 telah mengubah ilmu ekonomi politik (*political economy*)[3] menjadi ekonomi (*economics*) dengan model-model

[2]Karyanya yang berjudul *Portfolio Selection* dianggap merupakan titik tonggak lahirnya teori portofolio modern. Karya ini pulalah yang mengantarkannya mendapat anugerah nobel ekonomi 1990.

[3]Ilmu ekonomi lahir ketika Adam Smith mengeluarkan karyanya, *Wealth of Nation* 1776. Generasi setelahnya menyebut Smith sebagai pendiri madzhab klasik dalam ekonomi. Saat itu ilmu ekonomi lahir sebagai *political economy* dan bukan *economics*. Ekonomi politik adalah

yang bersifat matematis. Adikarya Marshall ini dianggap sebagai tonggak kelahiran madzhab neo-klasik (Mubyarto, 1987). Sebelumnya, Jevons dan Walras telah mempeloporinya pada 1860-an. Penetrasi model-model matematis ke dalam ilmu ekonomi saat itu dilakukan melalui fisika dan menempatkan fisika sebagai *benchmark* (tolok ukur) (De Liso dan Filatrella, 2001). Sedangkan Stigler yang berasal dari Perguruan Ekonomi Chicago memaklumkan simulasi Monte Carlo yang diterapkan untuk menelisik pasar pada tahun 1964. Kim dan Markowitz mencoba membuat model kejatuhan Wall Street 1987 yang mirip dengan model yang digunakan fisikawan. Dan penelitian Lux berdasar pada hasil kerja para fisikawan, seperti misalnya Haken (Stauffer, 2000).

Ekonomi merupakan disiplin tentang perilaku manusia yang berhubungan dengan manajemen sumberdaya, keuangan, pendapatan, produksi dan konsumsi barang-barang dan jasa (Wang *et al.*, 2005). Sehingga ekonomi biasanya diidentikkan dengan ilmu sosial. Namun dalam beberapa hal, hukum-hukum ekonomi menunjukkan keserupaan dengan ilmu alam. Meskipun ekonomi berkepentingan dengan motivasi dan keputusan manusia, namun seringkali perilaku kolektif dapat diterangkan dengan proses yang tertentu, setidaknya dengan cara statistik. Dagun (1992, hlm. 265) menguatkan bahwa aktivitas bebas manusia tidak semata-mata merupakan akibat kehendak bebas tetapi muncul dari motif-motif. Maka, motif-motif inilah yang memungkinkan untuk diterapkannya statistik.

Mengingat ekonomi selama ini dimasukkan dalam ranah

suatu ilmu yang membahas hubungan antara proses-proses politik dan ekonomi (Mubyarto, 1987, hlm. 7).

ilmu sosial, maka ada baiknya jika menengok pendapat 'Abdulrahim. Dalam angapannya, 'Abdulrahim memandang bahwa sebenarnya ilmu sosial adalah juga ilmu pasti (eksakta). Menurutnya, dikotomi ilmu menjadi ilmu sosial dan ilmu eksakta adalah tidak tepat. Secara lengkap pendapat 'Abdulrahim dapat dilacak dalam kutipan berikut:

> "Biasanya para ahli ilmu sosial menganggap hukum-hukum yang berkenaan dengan manusia, baik sebagai individu maupun masyarakat tidak termasuk hukum yang pasti. Oleh karena itu mereka memisahkan ilmu sosial dari ilmu alam dan matematika (ilmu-ilmu eksakta). Mereka mengatakan ilmu sosial tidak pasti. Padahal sebenarnya hukum-hukum sosial itupun eksak, sebagaimana diterangkan dalam Al Quran itu. Namun variabelnya sangat banyak, sama banyaknya dengan jumlah manusia di dunia ini dikalikan dengan segala macam keinginan mereka, sehingga sangat sukar diperkirakan korelasi antara variabel yang satu dengan yang lain. Mereka yang mengatakan hukum-hukum sosial yang universal itu tidak eksak, pada dasarnya karena kegagalan mereka menemukan korelasi antara variabel yang sangat banyak ini. Tetapi dengan majunya ilmu statistik sesudah mendapat bantuan komputer sekarang ini, dapat dibuktikan betapa anggapan para pakar ilmu-ilmu sosial selama ini adalah salah." ('Abdulrahim, 1997, hlm. 95)

Pencantuman kutipan di atas dalam bagian dari pembahasan ini tidak berkepentingan terhadap perdebatan dikotomi ilmu sosial dan eksakta. Titik tekan yang hendak diajukan di sini ialah bahwa unit-unit yang berinteraksi dalam sistem ekonomi dapat didekati dengan cara pandang yang sama ketika fisikawan mengamati sistem fisis pada skala mikroskopik (Lux, 2000). Johnson (Jawa Pos, 23/09/2002) dari laboratorium Clarendon menunjukkan ada keterkaitan yang sangat kuat antara kegiatan keuangan dengan perilaku dari zarah, atom, dan molekul.

Tsallis, seperti yang ditulis oleh Kebamoto (2002), juga mempunyai kesimpulan yang paralel dengan Johnson. Menurutnya, dengan statistik termodinamika, manusia dapat dimodelkan sama dengan atom dalam segala hal kecuali masalah intelegensi dan budaya. Dengan kata lain, andaikan masalah intelegensi dan budaya ini untuk sementara diabaikan, maka kelakuan manusia dapat dipandang seperti kelakuan atom. Ringkasnya, sistem ekonomi sama dengan sistem fisika.

Paradigma ini semakin menemukan kekuatannya ketika merujuk pada hakikat manusia dan benda-benda nirnyawa. Atom adalah unsur pembentuk yang sama dalam manusia, batu, gunung, air, matahari, hewan dan tumbuhan. Ibnul Qayyim (2005) menyebutkan bahwa setiap makhluk bernyawa atau nirnyawa seluruhnya mempunyai roh. Pada aras ini, maka tidak ada lagi beda antara manusia atau atom. Penyebutan manusia bersamaan dengan matahari, tumbuhan dan hewan melata dalam Kitab Suci dapat dipahami dalam kerangka tersebut.

> "Apakah kamu tidak mengetahui, bahwa kepada Allah bersujud apa yang ada di langit, di bumi, matahari, bulan, bintang, gunung, pohon-pohonan,

> binatang-binatang yang melata dan sebagian besar daripada manusia?" (QS Al Hajj: 18)

Beberapa ayat lain yang semakna tentang masalah ini antara lain dapat ditemui dalam Al Isra': 44, Shaad: 18, dan An Nuur: 41.

Topik penelitian yang digarap oleh Amaral *et al.* (2003) memberi kejelasan terhadap masalah ini. Dalam kajiannya, Amaral *et al.* memusatkan pada 3 jejaring, yakni jejaring ekonomi dan teknologi, jejaring sosial dan terakhir adalah jejaring fisis dan biologis. Dalam jejaring pertama dimana diteliti jalur transmisi dan lalu lintas di bandara (penumpang dan pesawat) menunjukkan bahwa keduanya mematuhi hukum pangkat. Demikian pula dalam jejaring kedua dan ketiga yang juga mematahui hukum pangkat. Pada akhirnya, kesimpulan yang didapat Amaral *et al.* dari kajian itu adalah fenomena-fenomena tersebut dapat dikiaskan dengan teori fenomena kritis (*critical phenomena*). Kesimpulan yang sama juga didapat oleh Drăgulescu dan Yakovenko (2004) yang meneliti kelakuan uang, pendapatan dan kekayaan masyarakat dengan mekanika statistik sebagai pisau telisiknya. Sedangkan Stanley *et al.* (2002) berhasil menggunakan paradigma transisi fase dan fenomena kritis untuk menerangkan kemajemukan pengaturan diri dalam ekonomi dan keuangan.

Gagasan tentang pengaturan diri ini sebenarnya banyak ditemukan di sepanjang sejarah ilmu-ilmu sosial yang digunakan untuk mendeskripsikan proses pengaturan diri kehidupan sosial. 'Tangan gaib' dalam teori ekonomi Smith dapat dikategorikan di sini. Contoh lainnya ialah '*check and balance*' dalam Undang-Undang Amerika Serikat dan hubungan timbal balik tesis dan antitesis dalam dialektika Hegel dan Mark (Capra, 2001, hlm. 97).

Interaksi yang begitu erat antara fisika dan ekonomi ini membuat De Liso dan Filatrella (2001) dan Stauffer (2000) menyatakan dengan tegas bahwa ekonofisika bukanlah ranah keilmuan yang baru. Merujuk pada dua pendapat ini, maka anggapan Kebamoto (2002) dan Mart (2001) bahwa ekonofisika merupakan gagasan fisika yang baru atau bidang penelitian baru dalam fisika dapat dinilai sebagai anggapan yang kurang tepat. Pada aras ini pula, kecurigaan Mubyarto (2002) terhadap ekonofisika sehingga mengimbau LIPI dan AIPI untuk "membahas ekonofisika secara serius" dapat dilihat sebagai pendapat yang tidak mempunyai pijakan ilmiah.

1.2 Model Ekonofisika

Dalam konteks ekonomi, model merupakan sebuah bangunan teoritis yang menggambarkan proses ekonomi dengan seperangkat peubah (variabel) dan seperangkat hubungan kekerabatan logis dan kuantitatif antar peubah-peubah tersebut (Boediono, 1981; Wikipedia, 2005). Sebagaimana dalam ranah ilmu lainnya, maksud dari suatu model adalah menyederhanakan proses-proses yang majemuk (kompleks). Dalam pengertian yang sekarang, setiap model dalam ekonomi selalu dikaitkan dengan bentuk matematika (De Liso dan Filatrella, 2001, hlm. 10), meskipun ada juga model kualitatif seperti misalnya perencanaan skenario yang memungkinkan peristiwa-peristiwa mendatang dikerjakan dan analisis pohon keputusan non-numerik. Namun, model-model kualitatif bukanlah model yang cermat (Wikipedia, 2005).

Sebelumnya, Boediono (1981, hlm. 1-2) bahkan lebih tegas dengan menyatakan bahwa ekonom tidak lagi puas dengan jawaban bahwa "bila harga beras naik maka jumlah yang diminta akan turun". Ekonom menghendaki jawaban yang lebih rinci dan cermat, seperti "bila harga beras naik 10%, maka berapa persen penurunan jumlah yang diminta". Atau, berapa kenaikan maksimal jumlah uang yang beredar agar inflasi tidak melebihi suatu nilai tertentu.

Terkait dengan ekonofisika, sedikitnya ada 2 pendekatan (Baaquie *et al.*, 2002; Mart, 2001; Stauffer, 2000; Wang *et al.*, 2005) yang bisa digunakan untuk memodelkan dinamika perkembangan sektor-sektor ekonomi, yaitu model analisis data dan penggunaan model-model fisika sebagai model acuan. Mengacu pada pembagian fisika yang menjadi 2 kelompok: fisika teori dan fisika eksperimen (dengan fisika komputasi bisa bekerja pada keduanya), Stauffer (2000) menyebut pendekatan pertama sebagai ekonofisika eksperimen dan pendekatan kedua sebagai ekonofisika teori. Sedangkan Baaquie *et al.* (2002) menyebut pendekatan pertama sebagai pendekatan *bottom up* dan pendekatan kedua sebagai pendekatan *top down*.

1.2.1 Model Analisis Data

Di dalam fisika, metode statistik (lebih tepat disebut fisika statistik) digunakan ketika berhadapan dengan masalah interaksi antarsub-unit dengan jumlah sangat besar, sementara interaksi individual antarsub-unit itu sendiri sangat sulit untuk dijelaskan. Dengan demikian, metode ini memberikan prediksi sifat kolektif dari kumpulan sub-unit.

Kritik yang dilontarkan oleh ilmuwan pada metode ini menyangkut keabsahan penggunaan metode fisika pada masalah-

masalah sosial yang dikatakan memiliki jumlah sub-unit sangat terbatas.

Di dalam termodinamika, di mana fisika statistik sangat sukses untuk menjelaskan fenomena alam, jumlah sub-unit yang dibahas umumnya dapat mencapai 10^{20}. Meski demikian, simulasi-simulasi komputer untuk gas dan zat cair sudah menunjukkan hasil yang sangat memuaskan untuk sistem yang terdiri dari 20 hingga 30 atom saja, yang menunjukkan bahwa metode ini sudah dapat bekerja untuk sistem-sistem kecil.

Kritik lain adalah lagi-lagi menyangkut perbedaan antara manusia dan sistem zarah (elektron, nukleon, atom, atau molekul) yang dibahas fisika statistik, karena manusia dikatakan memiliki daya adaptasi terhadap fluktuasi-fluktuasi ekonomi, sedangkan kumpulan zarah akan terus patuh mengikuti hukum alam jika terjadi fluktuasi pada keadaan di sekitarnya.

Kritik ini ternyata tidak sepenuhnya benar, karena penelitian dengan metode fisika statistik ternyata cukup sukses jika diterapkan pada masalah non-coding DNA, inflasi paru-paru manusia, interval denyut jantung, bahkan pada masalah perkembangan kota dan beberapa sifat hewan, yang tentu saja memiliki daya adaptasi tersendiri untuk mengantisipasi perubahan yang terjadi dengan lingkungannya (Amaral *et al.*, 1999). Model ekonofisika dengan analisis data ini misalnya dapat dijumpai dalam pustaka Drăgulescu dan Yakovenko (2004), Amaral *et al.* (2003), dan Stanley *et al.* (2002).

1.2.2 Model acuan

Dalam model ini, model-model yang telah jamak dikenal dalam fisika dimanfaatkan sebagai acuan untuk memodelkan sistem maupun gejala ekonomi. Wang *et al.* (2005) menyebutkan bahwa model spin telah digunakan oleh Krawiecki *et al.* untuk menerangkan pengambilan keputusan pemain pasar modal dan Wu *et al.* menggunakannya untuk menerangkan kelakuan manusia dalam aktivitas ekonomi yang lain. Dalam model tersebut, status agen merupakan salah satu dari $\{1, 0, -1\}$ yang ditafsirkan sebagai membeli, menunggu dan menjual atau hanya salah satu dari $\{1, -1\}$. Sehingga keadaan status dari sistem keseluruhan dengan N agen adalah $\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_N\}$. Keuntungan setiap agen ditentukan oleh fungsi hasil $E\left(\vec{S}, \vec{J}, IEs\right)$, dengan $\vec{J}$ adalah interaksi terus-menerus dari seluruh transaksi dan IEs merupakan peubah internal seperti harga saham atau informasi eksternal seperti lingkungan dan rekam jejak perusahaan. Karena setiap agen ingin memaksimalkan keuntungannya, maka

$$\omega_i \left(S_i(t) \to S_i(t+1)\right) \sim e^{\frac{\Delta E_i}{T}} \tag{1.1}$$

dengan T merupakan koefisien evaluasi rerata, yang berarti pengaruh sebuah keputusan untuk suatu keuntungan. Bentuk keputusan agen ini muncul dari distribusi ansambel dalam mekanika statistik.

Model gas ideal juga digunakan sebagai model acuan dalam ekonofisika (Drăgulescu dan Yakovenko, 2000). Model ini mencoba menerangkan persaingan dan perkawanan antar perusahaan atau antar individu atau agen. Di sini, pertukaran acak kekayaan satu dengan lainnya dipandang seperti pertukaran acak tenaga dalam gas ideal. Sehingga distribusi kesetimbangan akan berbentuk eksponensial.

Lux (2000) bahkan melakukan sebuah gebrakan dengan menghadapkan hipotesis pasar efisien *vis a vis* hipotesis pertukaran agen. Gagasannya terinspirasi dari hasil kajian fisika statistik, bahwa sistem fisis yang terdiri dari banyak zarah yang berinteraksi akan mematuhi hukum universal (*scaling law*) yang bebas dari detil mikroskopik. Ini dapat disepadankan dalam ekonomi keuangan dimana unit-unit yang berinteraksi adalah pemain pasar dan *scaling law* yang bekerja adalah kenyataan yang selalu mengikuti tren semisal klaster volatilitas. Hipotesis pasar efisien memegang peran kunci dalam teori keuangan. Hipotesis ini merupakan andaian penting dalam beberapa teori keuangan seperti teori struktur modal, model penentuan harga aset (*Capital Asset Pricing Model*/CAPM) dan model penentuan harga opsi (Sartono, 1996).

Model yang lain misalnya penggunaan persamaan difusi (Baaquie *et al.*, 2002) yang secara gemilang telah ditunjukkan oleh Black dan Scholes ketika mendesain model penentuan harga opsi. Selain persamaan difusi, model Black-Scholes juga menggunakan gerak Brown geometrik sebagai model acuannya. Model Black-Scholes merupakan salah satu contoh dari model ekonomi standard (Ilinski, 1999; Wikipedia, 2005). Bahkan, model ini berhasil memenangkan anugerah nobel ekonomi 1997. Maka, dapat dipahami jika Sembel dan Baruno (2002) menyebutnya sebagai sebuah teori besar.

1.3 Topik Ekonofisika

Dari uraian di muka, tampak bahwa ranah ekonofisika teramat luas untuk dikaji. Aneka topik ekonofisika yang tersedia tidak mungkin dikupas semua dalam kesempatan ini. Karenanya, buku kecil ini perlu membatasi dan menyempitkan topik yang akan dikaji.

Masalah yang akan menjadi topik ialah model penentuan harga opsi. Mengapa opsi? Opsi (*option*) merupakan produk derivat yang menyatakan hak seseorang (namun bukan kewajiban) untuk membeli saham atau aset lainnya dengan harga tertentu sebelum atau pada saat yang telah dijadwalkan.

Opsi merupakan surat berharga yang istimewa. Sebab, jika dibandingkan dengan aset keuangan yang lain, investasi dalam opsi membutuhkan modal yang jauh lebih kecil tetapi menjanjikan keuntungan yang jauh lebih besar. Andai pun mengalami kerugian, maka kerugian yang diderita karena investasi dalam bentuk opsi jauh lebih kecil dibanding jika berinvestasi pada aset keuangan lainnya. Selain itu, opsi juga bisa digunakan untuk mempertahankan portofolio investasi. Bahkan, Weston dan Copeland (1995) menulis bahwa seluruh kontrak keuangan dapat disederhanakan hanya menjadi 4 surat berharga saja, 2 diantaranya adalah opsi.

Namun, sebagai produk derivat yang sepenuhnya bergantung pada surat berharga acuan dan kesepakatan dalam kontrak, harga opsi selalu berubah-ubah terhadap waktu. Maka, pertanyaan mendasar yang lekat dengan opsi adalah *berapa harga yang pantas (adil) untuk dikeluarkan oleh pembeli opsi dan siasat investasi seperti apa yang harus dipasang oleh penjual opsi selama masa kontrak untuk meminimalkan risiko kerugian.* Pada gilirannya, jika harga opsi ini berhasil dirumuskan secara eksak maka model penentuan harga opsi akan menjadi semacam *lingua franca* bagi semua pemain di pasar saham.

Ada banyak opsi yang dikenal di pasar saham. Kita akan membatasi kajian pada jenis opsi Eropa dengan surat berharga acuan adalah saham. Opsi Eropa merupakan opsi yang hanya bisa dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja. Model ekonofisika yang akan dipakai adalah model kedua, yakni menggunakan model dalam fisika sebagai acuan untuk menurunkan model penentuan harga opsi.

Model penentuan harga opsi merupakan topik penting dalam manajemen keuangan dan investasi [4]. Kajian mengenai harga opsi dipelopori oleh Bachelier dalam disertasi doktornya di Universitas Sorbonne Perancis tahun 1900. Bachelier menghitung harga opsi secara analitik dengan menggunakan gerak Brown dan andaian pengembalian (*return*) saham yang memiliki distribusi normal.

Hakiman (2005) mengatakan bahwa persamaan Bachelier dapat ditulis sebagai berikut

$$C = SN\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) - KN\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma\sqrt{T-t}N\left(\frac{K-S}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{1.2}$$

dengan S : harga saham saat ini, K : harga laksana saat jatuh tempo dan N : kumulatif distribusi normal.

Namun, penemuan Bachelier ini menimbulkan masalah yang serius yaitu dimungkinkannya harga negatif baik pada harga saham maupun harga opsi. Meskipun begitu, pijakan yang diletakkan Bachelier merupakan andaian penting dalam

[4]Lihat kepustakaan Basuki *et al.* (1997); Berlianta (2005); Brigham dan Houston (2001); Fabozzi (2000); Hakiman (2005); Halim (2003); Hull (1989); Husnan (1995); Kamaruddin (1996); Keown *et al.* (2000); Rutterford (1993); Sartono (1996); Sharpe *et al.* (1999); Sundjaja (2003); Weston dan Copeland (1995); Yuliati *et al.* (1996)

perkembangan model penentuan harga opsi selanjutnya. Sejarah perkembangan model harga opsi sejak Bachelier dapat dilihat dalam pustaka Hakiman (2005) dan Hull (1989).

Perkembangan yang paling menonjol adalah ketika Black dan Scholes memaklumkan model penentuan harga opsinya pada tahun 1973. Bisa dikatakan model Black-Scholes inilah yang kemudian menjadi pijakan bagi model-model berikutnya. Model Black-Scholes kemudian dikembangkan oleh Merton, Ingersoll, Garman dan Kohlagen, Geske, Roll dan Whaley (Copeland dan Weston, 1988; Hakiman, 2005; Hull, 1989).

Sampai sekarang, hampir seluruh buku-buku teks manajemen keuangan dan investasi yang dirujuk sebagai pustaka dalam buku ini hanya menyebut ada 2 model penentuan harga opsi, yaitu model Black-Scholes dan model binomial yang dibangun oleh Cox dan Ross 3 tahun setelah Black-Scholes. Dibandingkan dengan model Black-Scholes, model binomial tidak mengalami perkembangan yang pesat. Bahkan, model Black-Scholes merupakan contoh yang baik dari model ekonomi (Wikipedia, 2005).

Selain itu, model Black-Scholes juga bisa didekati dengan beragam teknik dalam fisika. Ilinski, sebagaimana dikutip oleh Mart (2001), mengklaim bahwa persamaan model Black-Scholes bisa diturunkan dengan konsep kuantum. Untuk melompat dari dunia kuantum ke pasar saham Ilinski mengganti medan elektromagnetik yang mengatur interaksi antar zarah bermuatan dengan medan arbitrasi (*arbitrage*) yang menjelaskan perubahan harga opsi serta saham sebagai fungsi waktu.

Baaquie *et al.* (2002) menggunakan manipulasi matematika untuk mengubah persamaan Black-Scholes menjadi persamaan yang mirip dengan persamaan turunan Schrödinger yang merupakan persamaan dasar dalam mekanika kuantum non relativistik. Teknik yang dipakai Baaquie adalah dengan menggunakan integral lintasan Feynmann.

Dalam manajeman keuangan dan investasi, opsi mempunyai kedudukan yang sangat penting. Ini tercermin dalam ungkapan Weston dan Copeland (1995) yang menegaskan bahwa seluruh jenis kontrak keuangan pada dasarnya merupakan gabungan dari hanya 4 bentuk surat berharga, yaitu: saham, obligasi bebas risiko, opsi beli dan opsi jual. Atau, jika disempitkan hanya mejadi saham, obligasi dan opsi saja. Bahkan sebelum Weston dan Copeland (1995), Cox, Ross dan Rubinstein dalam *Journal of Financial Economics* (Copeland dan Weston, 1988, hlm. 240) telah mengemukakan bahwa model penentuan harga opsi dapat bekerja di hampir semua ranah keuangan. Hampir semua surat berharga perusahaan dapat ditafsiri dengan opsi beli dan opsi jual. Pernyataan-pernyataan ini pada akhirnya hanya membuat model penentuan harga opsi semakin bertenaga. Karenanya, pemahaman yang baik mengenai model penentuan harga opsi Black-Scholes merupakan jalan lurus untuk masuk ke ranah ekonofisika. Dari sini pemandangan ekonofisika akan segera terbentang.

2 — Teori Peluang

Istilah percobaan dalam matematika/fisika ialah sebuah usaha yang dilakukan untuk mendapatkan satu dari sekian banyak hasil keluaran yang mungkin. Salah satu contoh dari percobaan tersebut adalah usaha untuk mendapatkan hasil 'muka' dalam pelantunan sebuah koin. Usaha ini termasuk percobaan sebab dalam pelantunan sebuah koin ada dua hasil keluaran yang mungkin yaitu 'muka' dan 'belakang'. Demikian pula usaha untuk mendapatkan 'nilai 1' dalam pelantunan sebuah dadu juga merupakan percobaan, sebab nilai 1 merupakan salah satu dari hasil keluaran yang mungkin yaitu nilai 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Dalam percobaan pelantunan sebuah koin dan dadu di atas, munculnya 'muka' dan 'nilai 1' disebut sebagai hasil percobaan atau hasil keluaran (*outcome*). Jika semua hasil keluaran yang mungkin dari sebuah percobaan disatukan dalam sebuah himpunan, maka himpunan demikian disebut sebagai ruang sampel (*sample space*). Dalam percobaan di atas, maka ruang sampel bagi percobaan pelantunan sebuah koin adalah himpunan yang beranggotakan muka dan belakang. Ruang sampel dari percobaan pelantunan sebuah dadu beranggotakan nilai-nilai 1, 2, 3, 4, 5 dan 6.

Setiap percobaan selalu hanya memiliki satu ruang sampel. Jika dilakukan percobaan pelantunan dua buah koin, maka ruang sampel yang muncul adalah himpunan pasangan (muka, muka), (muka, belakang), (belakang, muka), dan (belakang, belakang). Ruang sampel ini jelas berbeda dengan ruang sampel percobaan pelantunan sebuah koin. Karena itu, terdapat perkawanan satu-satu antara percobaan dan ruang sampel:

$$\text{satu percobaan} \longleftrightarrow \text{satu ruang sampel.} \tag{2.1}$$

Setiap tepat satu anggota dari ruang sampel disebut titik sampel . Satu atau beberapa titik sampel yang termuat dalam sebuah himpunan ruang sampel disebut peristiwa atau kejadian (*event*). Jadi peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Kaitan ini menyiratkan bahwa ruang sampel sebenarnya juga merupakan peristiwa yaitu sebuah peristiwa yang memuat seluruh titik sampel yang ada. Peristiwa seperti ini disebut peristiwa pasti (*sure event*), sebab setiap keluaran yang muncul selalu merupakan anggota dari peristiwa itu. Sebaliknya, himpunan kosong yang juga merupakan himpunan bagian dari ruang sampel merupakan peristiwa mustahil (*imposible event*), sebab tidak mungkin sebuah percobaan tidak memiliki hasil keluaran apapun. Apabila sebuah peristiwa hanya memuat satu titik sampel saja maka peristiwa demikian disebut peristiwa unsuriah (*elementary event*) atau peristiwa keunsuran.

Setiap peristiwa mempunyai ukuran kecenderungan untuk terjadi yang berbeda-beda nilainya. Ukuran kecenderungan ini dinamakan peluang terjadinya peristiwa atau cukup disebut peluang saja.

2.1 Takrif Peluang

Ada beberapa cara untuk menguraikan takrif (*definition*) peluang sebuah peristiwa. Andaikan peristiwa A merupakan peristiwa yang memenuhi $A \neq$ peristiwa pasti dan $A \neq$ peristiwa mustahil, maka peluang terjadinya A dilambangkan dengan $\mathcal{P}(A)$ dan dapat ditakrifkan menurut beberapa cara.

Yang pertama adalah takrif klasik. Menurut takrif ini, peluang $\mathcal{P}(A)$ peristiwa A ditentukan secara *a priori* tanpa pelaksanaan percobaan yang sebenarnya. Takrif ini mempunyai pengandaian bahwa suatu percobaan selalu menghasilkan N hasil keluaran yang tidak mungkin terjadi bersama-sama dan masing-masing punya peluang yang sama untuk terjadi, maka:

$$\mathcal{P}(A) = \frac{N_A}{N} \tag{2.2}$$

dengan N_A menyatakan banyaknya hasil keluaran dalam A. Karena peristiwa A bukan peristiwa mustahil dan juga bukan peristiwa pasti atau $0 \leq N_A \leq N$, maka $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$. Meskipun takrif ini mudah dimengerti dan digunakan, tetapi persyaratan 'mempunyai peluang yang sama' dalam praktik mungkin sekali tidak masuk akal, disamping keterbatasan penggunaannya yang hanya untuk percobaan dengan ruang sampel berhingga.

Yang kedua adalah takrif empiris. Peluang A ditakrifkan sebagai kekerapan nisbi (*relative frequency*, frekuensi relatif) terjadinya peristiwa A, jika percobaan tersebut diulang sebanyak mungkin. Artinya

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}. \tag{2.3}$$

Dibandingkan dengan takrif klasik, takrif ini lebih masuk akal sebab tidak diperlukan persyaratan seperti takrif klasik. Hanya saja takrif ini mengharuskan percobaan dapat dilakukan sebanyak mungkin. Takrif ini disebut juga takrif kekerapan nisbi dan biasa digunakan sebagai penjelas dari takrif klasik atau bisa juga sebaliknya.

Yang ketiga adalah takrif subjektif. Nilai sebuah peluang dalam takrif ini lebih berdasar pada pertimbangan-pertimbangan perseorangan atau subjektif dan biasanya dilakukan apabila pengertian-pengertian objektif tidak dapat digunakan, misalnya dalam keadaan dimana percobaan belum atau bahkan tidak pernah dilakukan. Karena itu takrif ini hanya menunjukkan tingkat keyakinan terhadap peristiwa A dalam 2 pilihan: terjadi atau tidak terjadi.

Yang keempat adalah takrif aksiomatis. Sesuai dengan namanya, dalam takrif ini peluang diandaikan memenuhi sejumlah aksioma tertentu. Dalam takrif ini, andaikan Ω adalah ruang sampel suatu percobaan, A adalah himpunan peristiwa maka $\mathcal{P}(A)$ adalah peluang terjadinya peristiwa A jika memenuhi 3 aksioma berikut:

Aksioma 2.1. $\mathcal{P}(A) \geq 0$

Aksioma 2.2. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

Aksioma 2.3. Jika $A_1 \cap A_2 = \{\emptyset\}$, maka $\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2)$

Pendekatan secara aksiomatis dalam memberikan takrif terhadap peluang seperti di atas diperkenalkan oleh A. N. Kolmogorov pada tahun 1933. Dalam buku ini, pembahasan tentang teori peluang selanjutnya akan berangkat dari pendekatan aksiomatis ini.

2.2 Ruang Peluang

Syarat-syarat sebagaimana termaktub dalam aksioma (2.1), (2.2), dan (2.3) merupakan aksioma teori peluang atau juga dikenal sebagai aksioma Kolmogorov. Dalam perkembangan teori peluang, seluruh kesimpulan berdasar secara langsung maupun tidak langsung pada aksioma-aksioma di atas dan hanya pada aksioma-aksioma di atas. Berikut adalah akibat-akibat dari aksioma di atas:

1. Peluang peristiwa mustahil adalah nol, dapat ditulis $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$. Karena $A \cap \emptyset = \emptyset$ dan $A \cup \emptyset = A$, maka $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A \cup \emptyset) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(\emptyset)$.
2. Untuk sebarang peristiwa A, berlaku

$$\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A') \leq 1 \tag{2.4}$$

dengan A' merupakan imbangan atau pelengkap (*complement*) bagi A dalam ruang sampel Ω. Karena $A \cup A' =$

Ω dan $A \cap A' = \emptyset$, maka $1 = \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{P}(A \cup A') = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(A')$.

3. Untuk sebarang peristiwa A_1 dan A_2 berlaku

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) - \mathcal{P}(A_1 \cap A_2) \leq \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2). \tag{2.5}$$

Seperti telah disinggung di atas, peristiwa merupakan himpunan bagian dari ruang sampel Ω. Apabila A_1 dan A_2 keduanya merupakan peristiwa, maka $A_1 \cap A_2$ dan $A_1 \cup A_2$ juga merupakan peristiwa. Hal ini menyebabkan bahwa gabungan dan irisan berbagai peristiwa juga mempunyai nilai peluang yang dapat dihitung. Konsep yang membahas tentang hal ini dikenal sebagai **lapangan** (*field*).

Suatu lapangan $\mathcal{L}$ adalah himpunan yang beranggotakan himpunan-himpunan dan $\mathcal{L} \neq \emptyset$ sedemikian rupa sehingga

$$\text{jika } A \in \mathcal{L} \text{ maka } A' \in \mathcal{L} \tag{2.6}$$

dan

$$\text{jika } A_1 \in \mathcal{L} \text{ dan } A_2 \in \mathcal{L} \text{ maka } A_1 \cup A_2 \in \mathcal{L}. \tag{2.7}$$

Kedua sifat tersebut merupakan syarat minimal sebuah lapangan. Sifat-sifat lainnya adalah sebagai berikut:

$$\text{jika } A_1 \in \mathcal{L} \text{ dan } A_2 \in \mathcal{L} \text{ maka } A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L} \tag{2.8}$$

Dari persamaan (2.6) terlihat juga bahwa ${A_1}' \in \mathcal{L}$ dan ${A_2}' \in \mathcal{L}$. Dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.6) pada himpunan $A_1{}'$ dan $A_2{}'$, dapat disimpulkan bahwa

$$A_1{}' \cup A_2{}' \in \mathcal{L},\ (A_1{}' \cup A_2{}')' = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}.$$

Suatu lapangan juga memuat peristiwa pasti dan peristiwa mustahil: $\Omega \in \mathcal{L}$ dan $\emptyset \in \mathcal{L}$. Oleh karena $\mathcal{L}$ tidak kosong, maka $\mathcal{L}$ memuat paling sedikit satu anggota A, akibatnya (dengan menggunakan persamaan (2.6)) $\mathcal{L}$ juga harus memuat A'. Jadi,

$$A \cup A' = \Omega \in \mathcal{L} \quad \text{dan} \quad A \cap A' = \emptyset \in \mathcal{L}.$$

Jika sekarang diandaikan $A_1, A_2, \ldots$ adalah barisan tak hingga himpunan anggota $\mathcal{L}$ dan jika gabungan maupun irisan himpunan-himpunan tersebut juga ada dalam $\mathcal{L}$, maka $\mathcal{L}$ disebut **lapangan Borel** $\mathcal{B}$. Dengan demikian, pengertian peristiwa dapat disempurnakan menjadi sekumpulan himpunan-himpunan bagian dari Ω yang membentuk lapangan Borel. Akibat lanjutan dari pengertian ini adalah dapat ditentukannya peluang yang tidak hanya pada gabungan dan irisan berhingga peristiwa-peristiwa, namun juga pada limitnya. Dengan demikian jika peristiwa $A_1 \cap A_2 \cap \ldots = \emptyset$ maka

$$\mathcal{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathcal{P}(A_1) \cup \mathcal{P}(A_2) \cup \ldots. \tag{2.9}$$

Namun demikian, sebenarnya amat sulit untuk menentukan peluang keunsuran masing-masing peristiwa jika ruang sampel Ω memiliki jumlah anggota tak hingga. Misalkan Ω adalah himpunan seluruh bilangan riil. Himpunan-himpunan bagiannya dapat dipandang sebagai himpunan titik-titik pada garis riil. Untuk membangun ruang peluang pada garis riil, maka seluruh selang (*interval*) $x_1 \leq x \leq x_2$ dengan segenap gabungan dan irisannya dipandang sebagai peristiwa. Lebih rincinya dapat dilihat misalnya dalam pustaka (Rosyid, 2005) bab I. Peristiwa-peristiwa ini membentuk suatu lapangan $\mathcal{L}$ yang merupakan lapangan Borel terkecil yang memuat separuh garis $x \leq x_i$ untuk semua bilangan riil x_i. Untuk melengkapi ciri Ω, akan dicari peluang peristiwa $(x \leq x_i)$. Misalkan bahwa $\alpha(x)$ adalah fungsi sedemikian hingga

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x)\, dx = 1, \qquad \text{dan} \qquad \alpha(x) \geq 0. \tag{2.10}$$

Maka peluang peristiwa $(x \leq x_i)$ ditakrifkan dengan integral

$$\mathcal{P}(x \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \alpha(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Bangun persamaan (2.11) ini dapat digunakan untuk menentukan peluang seluruh peristiwa dalam Ω. Misalnya, sekarang dapat dihitung peluang $(x_1 < x \leq x_2)$ yang terdiri dari titik-titik pada selang $(x_1, x_2]$ dengan

$$\mathcal{P}(x_1 < x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) dapat dibuktikan dengan mengingat bahwa irisan antara $(x \leq x_1)$ dan $(x_1 < x \leq x_2)$ merupakan $\emptyset$ dan gabungan keduanya sama dengan $(x \leq x_2)$. Berdasarkan pada aksioma (2.3), didapat

$$\mathcal{P}(x \leq x_1) + \mathcal{P}(x_1 < x \leq x_2) = \mathcal{P}(x \leq x_2) \tag{2.13}$$

dan dengan menggunakan persamaan (2.11) dan (2.12) maka selanjutnya

$$\int_{-\infty}^{x_1} \alpha(x)\ dx + \int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)\ dx = \int_{-\infty}^{x_2} \alpha(x)\ dx. \tag{2.14}$$

Persamaan di atas merupakan bukti yang jelas bagi persamaan (2.12). Dengan demikian, jika Ω terdiri dari anggota tak hingga maka peluang peristiwa di dalamnya dapat ditentukan dengan memakai integral.

2.2.1 Peluang peristiwa bersyarat

Seandainya ada 2 peristiwa dimana peluang peristiwa kedua hanya bisa diketahui setelah ada pengetahuan yang cukup tentang peristiwa pertama, maka peluang peristiwa seperti ini disebut sebagai peluang bersyarat. Peluang bersyarat peristiwa B jika diketahui peristiwa A dilambangkan dengan $\mathcal{P}(B|A)$ dan ditakrifkan sebagai

$$\mathcal{P}(B|A) = \frac{\mathcal{P}(A \cap B)}{\mathcal{P}(A)} \tag{2.15}$$

dengan syarat bahwa nilai $\mathcal{P}(A)$ tidak sama dengan nol. Bilangan $\mathcal{P}(B|A)$ dapat dibaca 'peluang B jika A diketahui'. Persamaan (2.15) yang berbentuk nisbah dapat juga diubah dalam bentuk perkalian menjadi

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A). \tag{2.16}$$

Dengan menggunakan aturan rantai, persamaan (2.16) dapat diperluas untuk peristiwa yang lebih banyak. Seandainya ada 3 peristiwa yaitu A, B, dan C maka persamaan (2.16) akan menjadi

$$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A)\mathcal{P}(C|A \cap B). \tag{2.17}$$

Perampatan (*generalization*) terhadap sebarang peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Omega$ akan menghasilkan bentuk seperti berikut

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) &= \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2|A_1)\mathcal{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\ldots \\ &\quad \ldots \mathcal{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).\end{aligned} \tag{2.18}$$

2.2.2 Peluang peristiwa saling bebas

Seperti sudah disinggung sebelumnya bahwa peristiwa bersyarat $(B|A)$ didasarkan pada anggapan bahwa peristiwa B hanya dapat diketahui jika peristiwa A sudah diketahui sebelumnya. Dengan demikian terjadinya peristiwa B sangat tergantung pada peristiwa A dalam peristiwa bersyarat $(B|A)$. Artinya, kedua peristiwa tersebut tidak saling bebas sebab kehadiran salah satu peristiwa menjadi kebutuhan bagi peristiwa yang lain. Dua peristiwa A dan B akan disebut saling bebas (*independent*) jika dan hanya jika memenuhi dua persamaan berikut:

$$\mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B) \tag{2.19}$$

dan

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A). \tag{2.20}$$

Jika tidak memenuhi kaitan dalam 2 persamaan di atas, maka peristiwa A dan B dikatakan tidak saling bebas. Dengan mengaitkan persamaan (2.16) dapat juga ditentukan syarat agar peristiwa A dan B saling bebas, yakni

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B). \tag{2.21}$$

Untuk 3 peristiwa yaitu A, B, dan C yang saling bebas satu dari yang lain, persamaan (2.21) dapat ditulis kembali menjadi

$$\mathcal{P}(A \cap B \cap C) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B)\mathcal{P}(C) \tag{2.22}$$

sehingga perampatan terhadap kesalingbebasan sejumlah n peristiwa $A_1, A_2, \ldots, A_n$ akan menghasilkan bentuk berikut

$$\mathcal{P}(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n) = \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2) \ldots \mathcal{P}(A_n). \tag{2.23}$$

2.3 Peubah Acak

Andaikan Ω merupakan ruang sampel dari sebuah percobaan. Suatu fungsi yang mengaitkan setiap anggota ruang sampel dengan suatu bilangan riil disebut sebagai **peubah acak** (*random variable*). Dalam percobaan pelantunan sebuah koin di atas, seandainya hasil keluaran yang muncul adalah 'muka' kemudian diberi nilai 1 dan 'belakang' diberi nilai -1, maka kemunculan nilai 1 atau -1 sangat bergantung pada hasil keluaran 'muka' atau 'belakang' pada pelantunan yang dilakukan. Munculnya hasil keluaran 'muka' atau 'belakang' dalam percobaan tersebut tidak dapat dipastikan, semuanya serba berkemungkinan. Dengan demikian kemunculan nilai 1 dan -1 sebagai peubah dalam pelantunan tersebut juga berkemungkinan. Oleh karena kemunculan nilai 1 dan -1 tidak dapat dipastikan, kemunculannya dapat disebut terjadi secara acak. Inilah mengapa peubah yang bernilai 1 untuk hasil muka dan -1 untuk hasil belakang dalam percobaan di atas disebut sebagai peubah acak.

Suatu peubah acak dinyatakan dengan suatu huruf kapital dan nilainya dinotasikan dengan suatu huruf kecil. Jika X menyatakan suatu peubah acak, maka nilai dari X dinyatakan dengan x. Sehingga pernyataan $\{X \leq x\}$ menyatakan peristiwa peubah acak X bernilai kurang dari atau sama dengan x.

Dalam sebuah percobaan dengan ruang sampel Ω, lapangan Borel $\mathcal{B}$ yang beranggotakan himpunan-himpunan bagian dari Ω yang disebut peristiwa dan suatu peluang yang ditentukan pada peristiwa-peristiwa tersebut, sebuah peubah acak $X : \Omega \to \mathbb{R}$ merupakan suatu fungsi. Ini mengandung pengertian bahwa X adalah peubah acak dan untuk semua $-\infty < a < b < \infty$ dapat dinyatakan bahwa

$$X^{-1}((a,b)) := \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\} \in \mathcal{B}. \tag{2.24}$$

Lambang $X^{-1}((a,b))$ merupakan bayangan balikan (*inverse image*) dari (a,b).

Dengan demikian, suatu peubah acak riil pada ruang sampel Ω relatif terhadap lapangan Borel $\mathcal{B}$ adalah fungsi bernilai riil pada Ω sedemikian rupa sehingga bayangan balikannya merupakan anggota lapangan Borel $\mathcal{B}$.

Suatu peubah acak X, selain merupakan fungsi bernilai riil dapat juga merupakan himpunan $X(\Omega) = \{X(\omega)|\omega \in \Omega\}$, sehingga jika pada Ω terdefinisikan peubah acak $Y : \Omega \to \mathbb{R}$

dan tetapan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ maka kaitan antara peubah acak X, Y dan tetapan α, β dapat disajikan sebagai berikut:

$$(\alpha X + \beta Y)(\omega) := \alpha X(\omega) + \alpha Y(\omega), \tag{2.25}$$

$$(XY)(\omega) := X(\omega)Y(\omega), \tag{2.26}$$

$$\left(\frac{X}{Y}\right)(\omega) := \frac{X(\omega)}{Y(\omega)}, \quad Y \neq 0. \tag{2.27}$$

Peubah acak X dikatakan peubah acak tercacah jika semua nilai yang mungkin dari X membentuk suatu himpunan tercacah atau terbilang $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Peubah acak X dikatakan kontinyu jika semua nilai (*range*) dari X merupakan himpunan yang kontinyu atau tak tercacah.

2.3.1 Fungsi agihan

Dalam telaah peubah acak, peristiwa $(X \leq x)$ menyajikan himpuan bagian Ω yang beranggotakan semua ω sedemikian rupa sehingga $X(\omega) \leq x$. Jadi, peristiwa $(X \leq x)$ bukan merupakan himpunan bilangan, melainkan himpunan hasil percobaan. Peristiwa $(x_1 \leq X \leq x_2)$ adalah serupa. Peristiwa tersebut menyatakan himpunan bagian Ω yang terdiri dari hasil-hasil ω sedemikian rupa sehingga $x_1 \leq X(\omega) \leq x_2$ dengan x_1 dan x_2 merupakan dua bilangan yang diketahui. Demikian pula untuk peristiwa $(X = x)$ juga menyatakan himpunan bagian Ω yang beranggotakan semua ω sedemikian rupa sehingga $X(\omega) = x$. Jadi, apabila $\mathbb{I}$ himpunan bagian dari garis riil $\mathbb{R}$, maka $(X \in \mathbb{I})$ menyatakan himpunan bagian dari Ω yang beranggotakan semua ω sedemikian rupa sehingga $X(\omega) \in \mathbb{I}$.

Anggota-anggota himpunan Ω yang termuat dalam peristiwa $(X = x)$ akan berubah bila x memiliki berbagai nilai. Akibatnya nilai peluang dari peristiwa $(X = x)$ yaitu $\mathcal{P}(X = x)$, adalah bilangan yang bergantung pada nilai x. Bilangan ini diberikan oleh

$$\mathcal{P}(x) := \mathcal{P}(X^{-1}(x)) := \mathcal{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) \in x) \tag{2.28}$$

yang disebut sebagai hukum peubah acak X. Hukum ini dicirikan secara lengkap oleh fungsi agihannya (*distribution function*), yang merupakan fungsi

$$F(x) = \mathcal{P}(\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x) \tag{2.29}$$

untuk setiap x dari $-\infty$ sampai ∞. Jadi, $F(x)$ merupakan peluang munculnya nilai peubah acak X dalam selang $(-\infty, x]$, yakni peluang munculnya nilai X yang kurang atau sama dengan x.

Contoh 2.1. Andaikan pada pelantunan sebuah koin nilai peluang untuk hasil keluaran 'muka' sama dengan m dan peluang untuk 'belakang' sama dengan b, kemudian peubah acak X sedemikian rupa sehingga

$$X(m) = 1 \qquad X(b) = 0.$$

Bila $x \geq 1$, maka $X(m) = 1 \leq x$ dan $X(b) = 0 \leq x$. Karena itu,

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(\{m, b\}) = \mathcal{P}(\Omega) = 1 \qquad x \geq 1. \tag{2.30}$$

Bila $0 \leq x < 1$, maka $X(m) = 1 > x$ dan $X(b) = 0$. Karena itu,

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(\{b\}) \qquad 0 \leq x < 1. \tag{2.31}$$

Bila $x < 0$, maka $X(m) = 1 > x$ dan $X(b) = 0 > x$. Karena itu pula,

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0 \qquad x < 0. \tag{2.32}$$

Fungsi agihan mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. $F(+\infty) = 1$ dan $F(-\infty) = 0$.
2. $F(x)$ adalah fungsi yang tidak menurun: jika $x_1 < x_2$, maka $F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. Jika $F(x_0) = 0$, maka $F(x) = 0$ untuk setiap $x \leq x_0$.
4. $\mathcal{P}(X > x) = 1 - F(x)$.
5. Fungsi agihan $F(x)$ malar (*continue*) dari kanan pada setiap titik $x \in \mathbb{R}$.
6. $\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
7. $\mathcal{P}(X = x) = F(x) - \lim_{\epsilon \to 0} F(x - \epsilon)$ dengan $\epsilon > 0$.
8. $\mathcal{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - \lim_{\epsilon \to 0} F(x_1 - \epsilon)$ dengan $\epsilon > 0$.

Dari persamaan (2.29) dan aksioma teori peluang dapat diketahui bahwa peubah acak X mempunyai jenis-jenis tertentu dalam fungsi agihannya. Jenis ini baru bisa diketahui bila dapat dihitung dulu peluang $\mathcal{P}(X \in \Omega)$, yakni bahwa x ada dalam ruang sampel Ω dari sumbu x. Peubah acak X disebut berjenis malar jika fungsi agihannya $F(x)$ juga malar. Untuk keadaan ini, $\lim_{\epsilon \to 0} F(x - \epsilon) = F(x), \epsilon > 0$ sehingga $\mathcal{P}(X = x) = 0$. Peubah acak X disebut berjenis cacah atau diskrit (*discrete*) bila $F(x)$ berbentuk fungsi tangga atau $F(x_i) - \lim_{x_i \to \epsilon}(x_i - \epsilon) = \mathcal{P}(X = x_i) = p_i$.

Jika pada fungsi agihan dilakukan penurunan (*derivation*) yang ditunjukkan oleh persamaan

$$\rho(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \tag{2.33}$$

maka $\rho(x)$ disebut fungsi kerapatan (*probablity-mass function*) peubah acak X. Untuk peubah acak X berjenis cacah yang memiliki nilai-nilai x_i dengan peluang p_i, maka

$$\rho(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \qquad\qquad p_i = \mathcal{P}(X = x_i) \tag{2.34}$$

dengan $\delta(x)$ menyatakan dorongan (*impulsion*). Mengingat bahwa fungsi $F(x)$ yang tidak menurun, maka $\rho(x) \geq 0$. Pengintegralan $\rho(x)$ untuk selang $(-\infty, x]$ dan menggunakan sifat $F(-\infty) = 0$ akan didapat

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(\omega)\ d\omega. \tag{2.35}$$

Karena $F(\infty) = 1$ maka bentuk di atas menghasilkan persamaan $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\ dx = 1$ sehingga diperoleh $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \rho)(x)\ dx$ atau

$$\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\ dx. \tag{2.36}$$

Jika peubah acak X berjenis malar maka himpunan pada ruas kiri cukup diganti dengan $(x_1 \leq X \leq x_2)$.

Disamping itu, dalam fungsi agihan juga dijumpai adanya agihan bersyarat seperti saat membicarakan tentang peristiwa bersyarat dalam ruang peluang. Agihan bersyarat $F(x|A)$ dari peubah acak X dengan diketahui A merupakan peluang bersyarat untuk peristiwa $(X \leq x)$, yakni

$$F(x|A) = \mathcal{P}(X \leq x|A) = \frac{\mathcal{P}(X \leq x \ \cap A)}{\mathcal{P}(A)}. \tag{2.37}$$

Pada bentuk di atas, $(X \leq x \cap A)$ merupakan irisan peristiwa $(X \leq x)$ dan A yakni peristiwa yng terdiri dari semua hasil ω sedemikian hingga $X(\omega) \leq x$ dan $\omega \in A$.

Dalam telaah fungsi agihan di atas, fungsi agihan dapat juga dimaknai sebagai pola agihan dari sekelompok peubah acak. Dalam teori peluang, pola agihan yang sudah jamak dikenal secara luas adalah fungsi agihan binomial, Poison, Gauss, dan log-normal. Peubah acak X disebut mempunyai agihan binomial orde n bila X memiliki nilai-nilai $0, 1, \ldots, n$ dengan peluang

$$\mathcal{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad p + q = 1 \tag{2.38}$$

p menyatakan peluang peristiwa bercirikan tertentu (sukses) dan q menyatakan peluang peristiwa yang tak bercirikan tertentu itu (gagal) atau $q = 1 - p$. Fungsi agihan yang bersesuaian dalam selang $(0, n)$ diberikan oleh

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{2.39}$$

Bila $n \to \infty$, maka

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \qquad (2.40)\end{aligned}$$

yang kemudian dikenal sebagai agihan Poisson. Dalam fungsi agihan binomial dan Poison, peubah k hanya boleh bervariasi secara cacah dan positif. Fungsi agihan yang peubahnya bisa bervariasi secara malar dari $-\infty$ sampai ∞ adalah fungsi agihan normal atau Gaussan yang dijabarkan oleh Gauss dalam bentuk

$$N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \qquad (2.41)$$

dengan variansi σ dan rataan μ.

Untuk agihan normal di atas, jika $\mu \gg 1$ pada $x > 0$, maka

$$x = \ln y, \qquad \mu = \ln y_0, \qquad dx = \frac{dy}{y} \qquad (2.42)$$

sehingga bila dimasukkan dalam bentuk (2.41) akan menjadi

$$N(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(y/y_0)}{\sigma}\right)^2} \frac{dy}{y} \qquad (2.43)$$

yang merupakan agihan log-normal.

Dalam hubungan pola agihan dan peubah acak di atas, jika peubah acak yang terlibat berjumlah mendekati tak hingga maka pola agihannya akan selalu mengikuti fungsi agihan normal. Hal ini dapat ditunjukkan jika $E(X_1)\, \{= E(X_2) = \cdots\} =$

μ dan $\mathrm{Var}(X_1)\,\{= \mathrm{Var}(X_2) = \cdots\} = \sigma^2 > 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-u^2}{2}} du = N(x) \tag{2.44}$$

Ini dikenal sebagai dalil limit pusat (*the central limit theorem*). Dalil ini memberikan jaminan bahwa agihan peluang akan selalu normal jika sejumlah besar peubah acak yang saling bebas terpenuhi.

2.3.2 Nilai harap dan variansi

Salah satu cara untuk mencakup suatu agihan kemungkinan menjadi satu nilai ialah dengan mengganti agihan tersebut dengan nilai harap (*expectation*) rataan (*mean*) peubah acaknya. Nilai harap adalah suatu ukuran lokasi yang bisa memberi gambaran tentang nilai rerata hasil percobaan jika percobaan dilakukan secara berulang kali. Dengan demikian nilai harap merupakan ukuran kecenderungan peubah acak. Bila X peubah acak yang malar dengan fungsi kerapatan $\rho(x)$ maka nilai harapnya diberikan oleh persamaan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ \rho(x)\ dx. \tag{2.45}$$

Untuk peubah acak berjenis cacah integral pada persamaan di atas dapat ditulis sebagai jumlahan. Misalkan bahwa X menjalani berbagai nilai x_i dengan peluang p_i. Untuk keadaan ini

$$\rho(x) = \sum_i p_i \; \delta(x - x_i). \tag{2.46}$$

Dengan memasukkan bentuk di atas pada (2.45) dan menggunakan identitas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \; \delta(x - x_i) \; dx = x_i \tag{2.47}$$

akan didapat

$$E(X) = \sum_i p_i \; x_i, \qquad p_i = \mathcal{P}(X = x_i). \tag{2.48}$$

Untuk peubah acak yang bersyarat, maka tinggal dilakukan penggantian notasi dalam kedua persamaan (2.45) dan (2.48). Seandainya peubah acak X mensyaratkan diketahuinya A maka kedua persamaan tersebut akan menjadi

$$E(X|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x \; \rho(x|A) \; dx \tag{2.49}$$

untuk peubah acak malar dan

$$E(X|A) = \sum_i x_i \mathcal{P}(x = x_i|A) \tag{2.50}$$

untuk peubah acak cacah.

Jika nilai harap rataan memberi gambaran tentang suatu nilai rerata hasil percobaan, maka ukuran keruncingan dari grafik fungsi agihannya disajikan oleh apa yang disebut variansi. Semakin kecil nilai variansi semakin meyakinkan nilai harap rataannya. Jadi variansi merupakan ukuran simpangan atau penyebaran (*dispersion*) yang baik karena mencerminkan besarnya simpangan tiap-tiap peubah acak. Semakin besar nilai variansi suatu kelompok data semakin bervariasi kelompok data tersebut. Variansi peubah acak X diberikan oleh persamaan berikut

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \; \rho(x) \; dx \tag{2.51}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa σ^2 adalah juga nilai harap dari peubah acak $(X \; - \; E \; (X) \;)^2$. Dengan demikian dapat ditulis

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E\left((X - E(X))^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 \end{aligned} \tag{2.52}$$

sehingga

$$\sigma^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \,. \tag{2.53}$$

Variansi mempunyai kelemahan karena sifatnya yang kuadrat, padahal simpangan pada hakikatnya merupakan jarak sehingga linier. Maka untuk mengatasi hal ini, variansi ditarik akarnya yang positif sehingga diperoleh apa yang kemudian disebut dengan simpangan baku (*standard deviation*) dan dilambangkan σ. Simpangan baku lebih sering digunakan daripada variansi. Simpangan baku berguna untuk mengukur rerata jarak masing-masing individu terhadap nilai reratanya.

2.3.3 Kovariansi dan korelasi

Sebagaimana telah dijelaskan di atas, variansi digunakan untuk mengukur tingkat variasi, namun hanya untuk satu peubah acak saja, X saja atau Y saja. Untuk mengukur tingkat variasi dua peubah acak X dan Y secara bersama-sama (simultan) dapa digunakan kovariansi. Kovariansi dua peubah acak X dan Y adalah ukuran keeratan hubungan atau ukuran asosiasi antara kedua peubah acak X dan Y. Takrif kovariansi dua peubah acak X dan Y adalah

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y). \tag{2.54}$$

Kovariansi yang positif menunjukkan kenaikan X diikuti oleh kenaikan Y dan penurunan X diikuti penurunan Y. Persamaan kovariansi di atas menunjukkan kemiripan bentuk dengan persamaan variansi (2.53). Seandainya peubah acak Y diganti dengan peubah acak X maka kovariansi dua peubah acak X merupakan variansinya sendiri. Dengan menggunakan kaitan ini dan andaikan X dan Y merupakan peubah acak dengan rataan $E(X), E(Y)$ dan variansi σ_X^2, σ_Y^2, maka dari sini dapat dibentuk peubah acak baru yakni

$$X' = \frac{x - E(X)}{\sigma_X} \qquad Y' = \frac{y - E(Y)}{\sigma_Y}$$

yang dengan mudah dapat dicari nilai kovariansinya, yaitu

$$\mathrm{Cov}(X', Y') = E(X'Y') - E(X)E(Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}. \tag{2.55}$$

Nisbah antara $\mathrm{Cov}(X, Y)$ dan $\sigma_X\sigma_Y$ dalam persamaan di atas disebut koefisien korelasi, diberi lambang r, sehingga

$$r = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}. \tag{2.56}$$

Koefisien korelasi merupakan nilai untuk mengukur kuatnya hubungan (*corelation*) antara peubah acak X dan Y sekaligus arah hubungan itu. Spektrum nilainya membentang antara 0 dan ± 1. Nilai ini sebanding dengan tingkat keeratan hubungan. Tanda ($\pm$) hanya menunjukkan arah hubungan, yakni ($+$) menunjukkan hubungan yang searah dimana jika satu peubah naik maka akan diikuti kenaikan peubah yang lain, sedangkan tanda ($-$) menyatakan hubungan yang berlawanan arah. Saat nilai koefisien korelasi sama dengan nol, kedua peubah acak X dan Y disebut peubah acak yang tidak berkorelasi (tidak ada hubungan). Ini terjadi ketika $\mathrm{Cov}(XY)$ sama dengan nol atau peubah acak X, Y keduanya saling bebas. Namun, bila $r = 0$, hal ini tidak selalu menunjukkan bahwa peubah acak X, Y keduanya saling bebas.

Dengan demikian, untuk dua peubah acak X, Y yang tak berkorelasi berlaku persamaan

$$E(XY) = E(X)E(Y). \tag{2.57}$$

Dua peubah acak X, Y dapat saling tak berkorelasi tanpa keduanya harus bebas, tapi semua peubah acak bebas selalu tidak berkorelasi. Jadi ketiadaan korelasi merupakan sifat yang lebih lemah dari kebebasan.

3 — Proses Stokastik

Kata stokastik (*stochastic*) merupakan jargon untuk keacakan (Kim, 2005, hlm. 50). *Oxford dictionary* (1993) menakrifkan **proses stokastik** sebagai suatu barisan kejadian yang memenuhi hukum-hukum peluang. Hull (1989, hlm. 62) menyatakan bahwa setiap nilai yang berubah terhadap waktu dengan cara yang tidak tertentu (dalam ketidakpastian) dikatakan mengikuti proses stokastik. Dengan demikian, jika dari pengalaman yang lalu keadaan yang akan datang suatu barisan kejadian dapat diramalkan secara pasti, maka barisan kejadian itu dinamakan deterministik. Sebaliknya jika pengalaman yang lalu hanya dapat menyajikan struktur peluang keadaan yang akan datang, maka barisan kejadian yang demikian disebut stokastik.

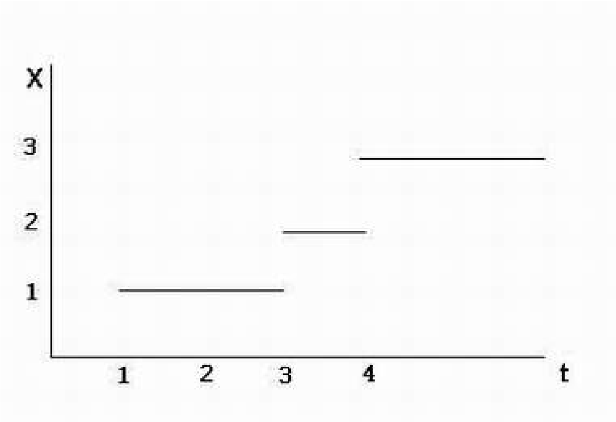
Proses stokastik banyak digunakan untuk memodelkan evolusi suatu sistem yang mengandung suatu ketidakpastian atau sistem yang dijalankan pada suatu lingkungan yang tak dapat diduga, dimana model deterministik tidak lagi cocok dipakai untuk menelisik (menganalisis) sistem.

Secara baku (formal), proses stokastik $\{X(t), t \in T\}$[1] ditakrifkan sebagai sebuah barisan peubah acak, yaitu untuk setiap $t \in T$ mempunyai peubah acak $X(t)$. Seringkali penjurus (*index*, indeks) t ditafsirkan sebagai waktu, karena banyak sekali proses stokastik yang terjadi pada suatu selang waktu. Nilai peubah acak $X(t)$ atau X_t disebut sebagai keadaan pada saat t. Himpunan T disebut ruang parameter atau ruang penjurus dari proses stokastik X dan himpunan semua nilai $X(t)$ yang mungkin disebut ruang keadaan dari X. Nilai himpunan penjurus T dapat berupa himpunan yang anggotanya tercacah ataupun malar. Jika T merupakan himpunan tercacah, misalnya N, maka proses stokastik dikatakan sebagai proses waktu tercacah *(discrete time process)* atau juga dikenal sebagai rantai *(chain)*. Jika T merupakan sub himpunan pada garis bilangan riil, baik dengan selang terbuka atau tertutup, maka proses stokastik yang demikian merupakan proses waktu kontinu *(continuous time process)*.

Setiap realisasi dari X dinamakan lintasan sampel (*sample path*) dari X. Sebagai contoh, jika peristiwa terjadi secara acak dalam waktu dan $X(t)$ mewakili jumlah peristiwa yang terjadi dalam $[0, t]$, maka gambar 3.1 menyajikan *sample path*

[1]Dalam buku ini, lambang peubah acak $X(t)$ seringkali ditulis juga sebagai X_t. Sedangkan lambang penjurus t, acapkali ditulis dengan huruf yang lain. Penggunaan lambang yang berbeda ini tidak akan mengakibatkan kesalahan yang serius dalam memahami proses stokastik dan keseluruhan buku ini.

X yang berhubungan terhadap peristiwa awal yang terjadi pada saat $t = 1$, peristiwa berikutnya pada saat $t = 3$ dan peristiwa ketiga pada saat $t = 4$.



Gambar 3.1: Sebuah lintasan dari $X(t)$ = jumlah peristiwa dalam $[0, t]$

Yang menjadi perhatian dari proses ini adalah kelakukan proses setelah proses tersebut berjalan lama. Mengingat proses tersebut memuat suatu ketidakpastian, maka secara matematis kelakuan dari proses tersebut dapat digambarkan oleh agihan peluang dari $X(t)$ atau fungsi dari $X(t)$, untuk $t \to \infty$. Dari agihan peluang ini akan didapat beberapa nilai harap dari beberapa besaran yang mungkin menjadi perhatian.

Proses-proses stokastik dapat dikelompokkan berdasarkan jenis ruang parameternya, ruang keadaannya, dan kaitan antara peubah-peubah acak yang membentuk proses stokastik tersebut.

Berdasarkan jenis ruang parameter dan ruang keadaannya, proses-proses stokastik dapat dibedakan menjadi:

1. Proses stokastik dengan ruang parameter tercacah dan ruang keadaan tercacah
   Contoh: stasiun televisi yang paling banyak ditonton di Indonesia atas survey bulanan, banyaknya sepatu yang dibeli dari sebuah toko per hari.
2. Proses stokastik dengan ruang parameter malar dan ruang keadaan tercacah
   Contoh: banyaknya kertas fotokopi yang dibutuhkan sebuah kantor dalam selang waktu tertentu, banyaknya tikus yang sudah terperangkap di suatu perangkap pada selang waktu t sebarang.
3. Proses stokastik dengan ruang parameter tercacah dan ruang keadaan malar
   Contoh: volume air di suatu bendungan yang diteliti tiap pukul 7 pagi, waktu untuk melayani mahasiswa ke-n yang datang untuk meminta pelayanan administrasi akademik.
4. Proses stokastik dengan ruang parameter malar dan ruang keadaan malar
   Contoh: volume air di suatu bendungan yang diteliti pada waktu t sebarang.

Berdasarkan kaitan antara peubah-peubah acak yang membentuknya, proses stokastik dapat dibedakan menjadi beberapa kelas seperti proses Levy, proses Bernoulli, proses Markov, proses martinggil, dan proses titik (*point process*). Dalam buku ini kelas proses stokastik yang hendak disajikan hanyalah proses martinggil dan proses Markov.

3.1 Proses Martinggil

Pada awalnya, martinggil (*martingale*) merujuk pada suatu siasat bertaruh yang masyhur di abad ke-18 di Perancis (Wikipedia, 2005). Dalam bahasa Perancis, kata *martingale* berarti sebuah desain siasat taruhan untuk mendapatkan uang secara pasti (kemenangan). Sebenarnya *martingale* berasal dari kata *martigues* yang merupakan nama sebuah kota di Provence Perancis (saat itu). Warga kota ini dikenal sangat suka untuk menggandakan taruhan sehabis setiap kali kalah dengan maksud untuk menutup kekalahannya yang lalu dengan harapan kemenangan berikutnya (LeRoy, 1989, hlm. 1588). Dalam kamus *Oxford dictionary* (1993), proses martinggil mengacu pada sistem perjudian dimana harapan kemenangan akhir merupakan keuntungan yang bersih (jujur). Konsep martinggil diperkenalkan dalam teori peluang oleh Paul Pierre Lévy dan kemudian dikembangkan secara serius oleh Joseph Leo Doob (Weisstein, 2005; Wikipedia, 2005).

Proses martinggil merupakan proses stokastik $\{X_n, n \geq 1\}$ yang memenuhi identitas

$$E\left(X_{n+1} | X_1, \ldots, X_n\right) = X_n, \tag{3.1}$$

yakni nilai harap bersyarat untuk pengamatan mendatang jika seluruh pengamatan yang lampau diketahui adalah pengamatan terakhir saja. Jika dilakukan perampatan terhadap identitas ini, maka sebuah barisan peubah acak $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ dikatakan merupakan sebuah martinggil yang mematuhi sebuah barisan peubah acak yang lain $X_1, X_2, X_3, \ldots$ apabila memenuhi identitas

$$E\left(Y_{n+1}|X_1, X_2, \ldots, X_n\right) = Y_n, \qquad \forall\ n. \tag{3.2}$$

Sebagaimana telah diterangkan di muka, konsep martinggil berasal dari meja judi. Dengan demikian, jika peubah X_n ditafsirkan sebagai keberuntungan penjudi setelah permainan ke$-n$ maka identitas martinggil menyatakan bahwa harapan keberuntungan setelah permainan ke$-(n+1)$ adalah sama dengan keberuntungan ke$-n$, tidak gayut dengan keberuntungan-keberuntungan sebelumnya. Atau, andaikan X_n merupakan keberuntungan penjudi setelah pelemparan ke$-n$ dari sebuah koin yang 'adil' —maksudnya jika koin itu dilempar, kedua belah sisi koin punya peluang yang seimbang untuk tampak—, dimana penjudi menang Rp 1 juta jika koin tampak muka dan kalah Rp 1 juta jika koin tampak belakang. Harapan keberuntungan bersyarat bagi penjudi untuk pelemparan mendatang adalah sama dengan keberuntungannya sekarang. Peristiwa yang demikian merupakan contoh sebuah martinggil. Peristiwa ini juga disebut sebagai sistem D'Alembert.

Konsep martinggil di atas sejalan dengan konsep permainan yang adil atau *fair game*. Dalam sebuah permainan, nilai adil ditentukan oleh apakah harapan keberuntungan setelah permainan ke$-n$ terpengaruh oleh keberuntungan permainan-permainan sebelumnya. Permainan akan disebut adil jika keberuntungan seluruh permainan sebelumnya tidak mempunyai pengaruh sama sekali terhadap harapan keberuntungan saat ini. Andaikan keberuntungan itu dilambangkan sebagai peubah acak X, maka sebuah barisan peubah acak

$\{X_n, n \geq 1\}$ disebut adil jika

$$E(X_1) = 0$$

dan

$$E(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n) = 0. \tag{3.3}$$

Serupa dengan permainan adil ini, jika diandaikan sebuah barisan peubah acak $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak yang saling bebas dengan nilai harap 0, dan $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, maka peristiwa $\{S_n, n \geq 1\}$ merupakan sebuah martinggil sebab

$$\begin{aligned} E\left(S_{n+1}|S_1, S_2, \ldots, S_n\right) &= E\left(S_n + X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n\right) \\ &= E\left(S_n|S_1, \ldots, S_n\right) \\ &\quad + E\left(X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n\right) \\ &= S_n + E\left(X_{n+1}\right) \\ &= S_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Submartinggil dan supermartinggil

Sebuah submartinggil adalah juga seperti martinggil, hanya saja nilai sekarang dari peubah acak adalah selalu 'lebih kecil atau sama dengan' nilai mendatang yang diharapkan. Secara baku, ini berarti

$$X_n \leq E\left(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n\right). \tag{3.5}$$

Mirip dengan submartinggil, dalam sebuah supermartinggil, nilai sekarang adalah selalu 'lebih besar atau sama dengan' nilai mendatang yang diharapkan. Pernyataan ini dapat ditulis sebagai

$$X_n \geq E\left(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n\right). \tag{3.6}$$

Oleh karena itu, setiap martinggil adalah juga submartinggil atau supermartinggil. Jika pengertian ini dibalik, maka setiap proses stokastik yang memenuhi keduanya secara serempak (submartinggil dan juga supermartinggil) adalah sebuah martinggil. Dengan menggunakan contoh permainan di atas lagi —dimana penjudi akan menang Rp 1 juta jika koin tampak muka dan kalah Rp 1 juta jika koin tampak belakang—, jika sekarang diandaikan koin yang digunakan tidak seimbang (tidak adil) dan peluang koin tampak muka adalah p maka

- jika $p = \frac{1}{2}$, secara seimbang penjudi bisa kalah atau menang dan harapan keberuntungan penjudi terhadap waktu adalah sebuah martinggil.
- jika $p < \frac{1}{2}$, kemungkinan besar penjudi akan menangguk kekalahan sehingga harapan keberuntungannya merupakan supermartinggil.
- jika $p > \frac{1}{2}$, kemungkinan besar penjudi akan menuai kemenangan sehingga harapan keuntungannya merupakan sebuah submartinggil.

3.2 Proses Markov

Proses Markov merupakan suatu proses stokastik yang menyatakan bahwa peluang keadaan dari proses pada waktu mendatang tidak dipengaruhi oleh keadaan pada waktu-waktu yang lampau, tetapi hanya kejadian yang langsung mendahuluinya saja. Atau dengan kata lain, proses Markov merupakan proses dimana masa depan tidak tergantung pada sejarah masa lalu tetapi hanya tergantung pada keadaan sekarang.

Dengan demikian, proses $\{X_t, t \geq 0\}$ merupakan suatu proses Markov jika untuk semua n dan untuk setiap $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$ berlaku kaitan berikut:

$$\mathcal{P}\left(X_{n+1} \left| X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1\right.\right) = \mathcal{P}\left(X_{n+1} \left| X_n\right.\right). \tag{3.7}$$

Karenanya, untuk dapat menghitung nilai peluang peristiwa (X_{n+1}, t_{n+}), harus diketahui terlebih dahulu keadaan sistem yang sekarang yakni (X_n, t_n). Dalam pengertian seperti ini, proses Markov juga bisa dikatakan sebagai proses yang tidak mempunyai ingatan atau rekaman *(memoryless)*. Pada aras ini, secara jelas proses Markov menegaskan bahwa sejarah tidak mempunyai pengaruh terhadap kelakuan masa depan.

Pada persamaan (3.7) di atas, andaikan $\{X_n, n \geq 0\}$ mempunyai ruang keadaan yang berupa himpunan berhingga atau tercacah, maka proses Markov di atas disebut sebagai rantai Markov. Contoh sederhana untuk rantai Markov ini adalah barisan bilangan bulat. Barisan peubah-peubah acak yang bernilai bilangan bulat yang saling bebas dan mempunyai distribusi peluang yang sama juga merupakan sebuah rantai Markov. Andaikan peubah-peubah acak itu adalah X_i dengan $i \geq 1$ adalah suatu barisan peubah acak bernilai bilangan bulat tak negatif yang saling bebas dan berdistribusi sama, maka suatu proses stokastik $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\}$ adalah juga rantai Markov. Nama lain untuk proses stokastik ini adalah jalan acak (*random walk*). Untuk kasus ini dapat ditunjukkan bahwa

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(S_{n+1} | S_1, \ldots, S_n\right) &= \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \middle| X_1, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i = S_{n+1} \middle| \sum_{i=1}^{n} X_i = S_n\right)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Masalah jalan acak di atas dapat diragamkan (variasi) menjadi sebuah kasus dimana zarah dapat berjalan ke kanan atau ke kiri dengan peluang yang sama. Andaikan waktu antar perpindahan dan panjang langkah dari proses ini relatif kecil. Andaikan pula $X(t)$ menyatakan posisi zarah pada waktu t. Jika waktu antar perpindahan dilambangkan dengan Δt dengan panjang langkah Δx, maka

$$X(t) = \Delta x \left(X_1 + \cdots + X_{[t/\Delta t]}\right), \tag{3.9}$$

dengan

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{jika zarah bergerak ke kanan pada langkah ke-}i, \\ -1 & \text{jika zarah bergerak ke kiri pada langkah ke-}i, \end{cases} \tag{3.10}$$

dan $\{X_i\}$ saling bebas dengan

$$\mathcal{P}(X_i = 1) = \mathcal{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}. \tag{3.11}$$

Karena $E(X_i) = 0$ dan $\mathrm{Var}(X_i) = 1$, maka

$$E\left(X(t)\right) = 0, \tag{3.12}$$

$$\mathrm{Var}(X(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right]. \tag{3.13}$$

Sekarang akan diandaikan Δx dan Δt menuju 0. Andaikan dipilih $\Delta x = \Delta t$ dan kemudian $\Delta t \to 0$ maka dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa nilai harap dan variansinya akan menuju 0 dan sehingga $X(t)$ akan sama dengan 0. Andaikan $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ untuk suatu tetapan positif c maka dari persamaan di atas pula dapat dilihiat ketika $\Delta t \to 0$, nilai harap dan variansinya menjadi

$$E[X(t)] = 0, \tag{3.14}$$

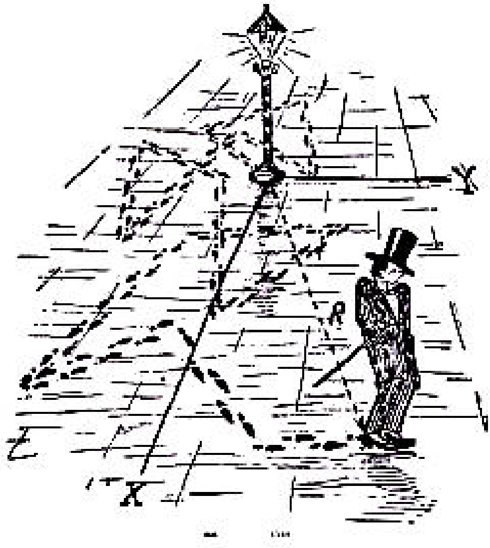
$$\mathrm{Var}[X(t)] \to c^2 t. \tag{3.15}$$

Dengan demikian didapat bahwa $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ adalah Δx yang sesuai. Proses jalan acak ini juga dinamakan proses gerak Brown (*Brownian motion*), sehingga sifat Markov dapat ditemukan pula pada gerak Brown.

4 — Jalan Acak

Peristiwa jalan acak (*random walk*) dapat dibayangkan laiknya orang yang sedang berjalan pada arah yang sebarang dengan syarat panjang setiap langkah adalah sama. Orang yang berjalan dengan cara seperti ini amat sulit untuk ditebak ke mana arahnya, mirip dengan kekhasan orang mabuk yang sedang berjalan. Karena itu, acapkali jalan acak juga disebut sebagai jalannya seorang pemabuk (*a drunkard's walk*) (Stewart, 2001). Sebutan ini mengacu pada judul fiksi sains karya Frederick Pohl di tahun 1960 (Wikipedia, 2005). Gambar 4.1 yang dibuat oleh George Gamow merupakan metafora dari sebutan *drunkard's walk* untuk jalan acak ini.

Menurut Baschnagel dan Paul (1999) dan Dimson dan Mussavian (2000), konsep jalan acak diperkenalkan sebagai sebuah ilmu oleh Karl Pearson dalam suratnya kepada *Na-*



Gambar 4.1: [Metafora]. Sebuah jalan acak (jalannya pemabuk). Sumber gambar: http://www.sos.siena.edu

ture tahun 1905. Dalam matematika dan fisika, jalan acak merupakan perumusan gagasan tentang langkah berturutan dengan arah yang acak pada setiap langkahnya. Jalan acak paling sederhana merupakan sebuah lintasan yang dibangun dengan aturan-aturan: ada titik awal (keberangkatan), jarak dari satu titik ke titik berikutnya adalah tetap dan setiap arah yang terpilih merupakan arah acak.

Berdasarkan hal di atas, andaikan $X_i, i \geq 1$ merupakan saling bebas dan berdistribusi sama dengan

$$\mathcal{P}(X_i = j) = a_j, \qquad j = 0, \pm 1, \cdots ,$$

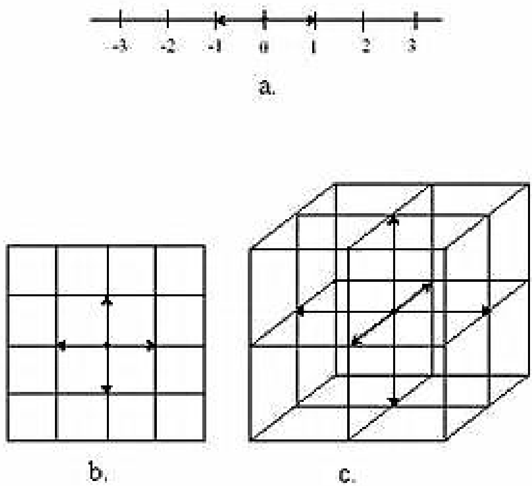
sehingga jika diambil

$$S_0 = 0 \qquad \text{dan} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

maka $\{S_n, n \geq 0\}$ disebut sebuah jalan acak. Jika tempat dari X_i adalah dalam $\mathbf{R}^m$, maka $\{S_n, n \geq 0\}$ dikatakan sebagai jalan acak dalam ruang $\mathbf{R}^m$.

Dalam tinjauan ini, barisan X_i adalah hasil keluaran dari percobaan yang saling bebas. Karena X_i adalah saling bebas, peluang setiap sejumlah barisan tertentu dari hasil keluaran dapat dihitung dengan mengalikan peluang setiap X_i. Peluang masing-masing X_i ini diberikan oleh distribusinya.

Ada beberapa cara untuk membayangkan sebuah jalan acak. Proses ini bisa dibayangkan melalui sebuah zarah yang ditempatkan pada titik asal dalam $\mathbb{R}^m$ pada waktu $n = 0$. Jumlahan S_n melambangkan posisi zarah pada akhir n detik. Sehingga, dalam rentang waktu $[n-1, n]$, zarah bergerak (atau melompat) dari posisi S_{n-1} ke S_n. Vektor yang melambangkan gerakan ini adalah $S_n - S_{n-1}$, yang juga sama dengan X_n. Hal ini mengisyaratkan bahwa dalam sebuah jalan acak, lompatan-lompatan adalah saling bebas dan berdistribusi sama. Jika $m = 1$, maka orang bisa membayangkan sebuah zarah pada garis riil berangkat dari titik asal, dan berakhir pada detik kapanpun, melompat satu satuan ke kanan atau kekiri, dengan peluang yang diberikan oleh distribusi X_i. Jika $m = 2$, seseorang dapat membayangkan sebuah proses yang terjadi di kota dengan bentuk-bentuk jalan yang persegi. Seseorang berangkat dari suatu sudut (yakni pada perpotongan 2 jalan) dan pergi mengambil 1 arah dari 4 kemungkinan sesuai



Gambar 4.2: (a) Jalan acak dengan $m = 1$. Pada jalan acak ini hanya ada 2 kemungkinan arah yaitu ke kanan atau ke kiri. (b) Jalan acak dengan $m = 2$, dengan 4 kemungkinan arah yaitu: ke selatan, utara, barat dan timur. (c) Jalan acak dengan $m = 3$, dengn 6 kemungkinan arah yaitu: ke selatan, utara, barat, timur, ke atas dan ke bawah

dengan distribusi X_i. Jika $m = 3$, seseorang bisa membayangkan berada di gedung olahraga, dimana seseorang bebas untuk bergerak dengan mengambil 1 arah dari 6 kemungkinan arah. Sekali lagi, peluang gerakan ini diberikan oleh distribusi dari X_i. Gagasan-gagasan ini bisa dilihat dalam gambar 4.2.

Model yang lain untuk menggambarkan jalan acak adalah percobaan pelantunan koin seperti yang disinggung dalam bab 2 (§2.3), dimana $X_i = 1$ untuk hasil keluaran 'muka' dan

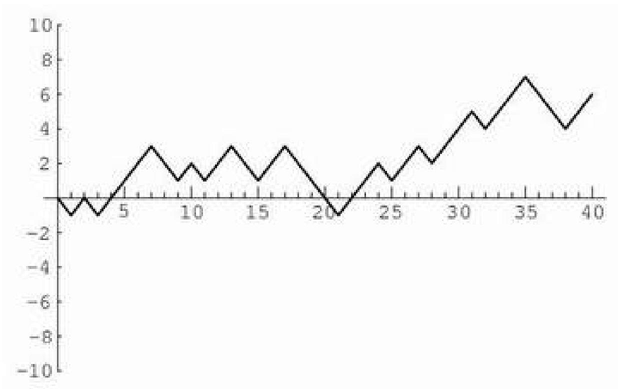
$X_i = -1$ untuk hasil keluaran 'belakang', juga merupakan sebuah jalan acak. Hal ini dapat ditunjukkan bahwa untuk $p,\ 0 < p < 1$,

$$\mathcal{P}(X_i = 1) = p, \tag{4.1}$$
$$\mathcal{P}(X_i = -1) = q = 1 - p \tag{4.2}$$

dan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{4.3}$$

Dalam jalan acak ini, proses selalu naik (berjalan ke kanan) satu langkah (dengan peluang p) atau turun (berjalan ke kiri) satu langkah (dengan peluang q).



Gambar 4.3: Sebuah lintasan jalan acak yang merekam perjalanan sampai 40 langkah dengan pelemparan koin. Jika koin tampak 'muka' maka naik 1 langkah dan jika koin tampak 'belakang' maka turun 1 langkah

4.1 Asas Dualitas

Peubah $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ mempunyai distribusi gabungan yang sama dengan $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$. Ini disebut dengan asas dualitas (*duality principle*, prinsip dualitas). Asas ini dengan mudah terbukti karena $X_i, i > 1$, merupakan saling bebas dan terdistribusi sama.

Andaikan $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak yang saling bebas dan terdistribusi/teragih sama dengan $E(X_i) > 0$. Jika $N = \min\left(n :\ X_1 + \cdots + X_n > 0\right)$, maka

$$
\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(N > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_1 \le 0,\ X_1 + X_2 \le 0,\ \ldots,\ X_1 + \cdots + X_n \le 0) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(X_n \le 0,\ X_n + X_{n-1} \le 0,\ \ldots,\ X_n + \cdots + X_1 \le 0),
\end{aligned}
$$

dimana persamaan terakhir muncul dari dualitas. Karena itu

$$E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}(S_n \le S_{n-1}, S_n \le S_{n-2}, \ldots, S_n \le 0) \quad (4.4)$$

sehingga

$$E(N) < \infty.$$

Persamaan terakhir ini menandakan bahwa jika $E(X) > 0$ maka jalan acak akan mempunyai harapan jumlah langkah yang berhingga.

Sekarang andaikan R_n sebagai jangkauan dari $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$

dan merupakan jumlahan nilai-nilai dari $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$. Dengan mengambil

$$I_k = \begin{cases} 1 & \text{jika } S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \ldots, S_k \neq S_0, \\ 0 & \text{untuk } S_k \text{ yang lain.} \end{cases}$$

maka

$$R_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} I_k,$$

dan sehingga

$$\begin{aligned} E(R_n) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(I_k = 1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(S_k \neq S_{k-1}, S_k \neq S_{k-2}, \ldots, S_k \neq 0) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(X_k \neq 0, X_k + X_{k-1} \neq 0, \ldots, \\ &\quad X_k + X_{k+1} + \cdots + X_1 \neq 0) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(X_1 \neq 0, X_1 + X_2 \neq 0, \ldots, \\ &\quad X_1 + \cdots + X_k \neq 0), \end{aligned} \tag{4.5}$$

dimana persamaan terakhir muncul dari dualitas. Oleh sebab itu

$$\begin{aligned} E(R_n) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_k \neq 0) && (4.6) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}(T > k), && (4.7) \end{aligned}$$

dimana T adalah waktu untuk kembali pertama ke 0. Sekarang, ketika $k \to \infty$,

$$\mathcal{P}(T > k) \to \mathcal{P}(T = \infty) = \mathcal{P}(\text{tidak kembali ke } 0),$$

dan sehingga dari persamaan (4.6) dapat dilihat bahwa

$$\frac{E(R_n)}{n} \to \mathcal{P}(\text{tidak kembali ke } 0).$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(R_n)}{n} = \mathcal{P}(\text{jalan acak tidak pernah kembali ke } 0) \qquad (4.8)$$

Dalam jalan acak dengan $\mathcal{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathcal{P}(X_i = -1)$, andaikan sekarang $p = \frac{1}{2}$ —disebut juga jalan acak setangkup (simetri)—, maka jalan acak merupakan *recurrent* sehingga

$$\mathcal{P}(\text{tidak kembali ke } 0) = 0 \qquad \text{ketika } p = \frac{1}{2}.$$

Oleh karena itu,

$$E(\frac{R_n}{n}) \to 0 \qquad \text{ketika } p = \frac{1}{2}.$$

Ketika $p = \frac{1}{2}$, andaikan $\alpha = \mathcal{P}(\text{kembali ke } 0|X_1 = 1)$. Karena $\mathcal{P}(\text{kembali ke } 0|X_1 = -1) = 1$ sehingga

$$\mathcal{P}(\text{kembali ke } 0) = \alpha p + 1 - p.$$

Dengan membuat keadaan pada X_2,

$$\alpha = \alpha^2 p + 1 - p,$$

atau sama saja dengan

$$(\alpha - 1)(\alpha p - 1 + p) = 0.$$

Karena $\alpha < 1$ dari transiensi, maka terlihat bahwa

$$\alpha = \frac{(1-p)}{p},$$

sehingga

$$E(\frac{R_n}{n}) \to 2p - 1 \qquad \text{ketika } p = \frac{1}{2}.$$

Dapat juga diubah menjadi,

$$E(\frac{R_n}{n}) \to 2(1-p) - 1 \qquad \text{ketika } p \leq \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Sekarang akan diselidiki jumlah harapan kunjungan ke keadaan k. Untuk $k > 0$ andaikan Y melambangkan jumlah kunjungan ke keadaan k sebelum kembali pertama kali ke titik asal. Dengan demikian Y dapat dinyatakan sebagai

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} I_n,$$

dengan

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{jika kunjungan ke keadaaan } k \text{ terjadi pada waktu } n \\ & \text{dan tidak kembali ke titik asal sebelum } n \\ 0 & \text{untuk kunjungan yang lain,} \end{cases}$$

atau I_k dapat juga dinyatakan

$$I_n = \begin{cases} 1 & \text{jika } S_n > 0, S_{n-1} > 0, \ldots, S_1 > 0, S_n = k \\ 0 & \text{sebaliknya,} \end{cases}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(S_n > 0, S_{n-1}, \ldots, S_1 > 0, S_n = k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(X_n + \cdots + X_1 > 0, X_{n-1} + \cdots + X_1 > 0, \\ &\qquad \ldots, X_1 > 0, X_n + \cdots + X_1 = k) \end{aligned}$$

karena asas dualitas maka

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{n=l}^{\infty} \mathcal{P}(X_1 + \cdots + X_n > 0, X_2 + \cdots + X_n > 0, \\
&\qquad \ldots, X_n > 0, X_1 + \cdots + X_n = k), \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(S_n > 0, S_n > S_1, \ldots, S_n > S_{n-1}, S_n = k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}(\text{ jalan acak simetri berada di } k \\
&\qquad \text{untuk pertama kalinya pada saat } n) \\
&= \mathcal{P}(\text{pernah berada di } k) \\
&= 1 \qquad \text{(dengan rekurensi)} \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

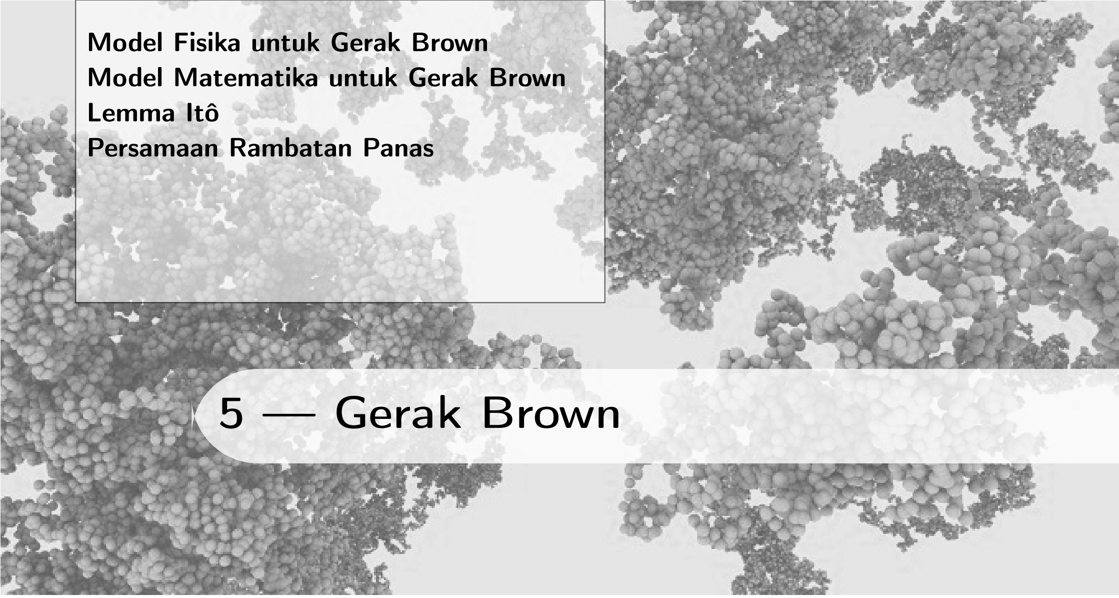
Oleh karena itu, dalam jalan acak simetri jumlah harapan kunjungan ke keadaan k sebelum kembali ke titik asal adalah sama dengan 1 untuk semua $k \neq 0$.

4.2 Sifat Martinggil

Andaikan peubah acak $X_1, X_2, \ldots$ merupakan peubah acak saling bebas dengan nilai harap 0, maka peristiwa jalan acak $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\, n \geq 1\}$ merupakan sebuah martinggil. Hal ini dapat dilihat dalam perhitungan berikut:

$$\begin{aligned}
E(S_{n+1}|S_1, S_2, \ldots, S_n) &= E(S_n + X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n) \\
&= E(S_n|S_1, \ldots, S_n) \\
&\quad + E(X_{n+1}|S_1, \ldots, S_n) \\
&= S_n + E(X_{n+1}) \\
&= S_n \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Selain sifat martinggil ini, jalan acak juga memiliki sifat Markov yang sudah dijabarkan dalam bab sebelumnya.



5 — Gerak Brown

Gerak Brown adalah gerak acak malar zarah zat padat mikroskopik (dengan garis tengah kira-kira 1 mikrometer) bila tercelup di dalam medium fluida (Isaacs, 1994, hlm. 43). Nama Brown dinisbatkan kepada Robert Brown (1773-1858). Ia menyebutkan bahwa penelitiannya tentang gerak acak ini berangkat dari temuan Leuwenhoek (1632–1723) (Nelson, 2001, hlm. 5). Pada tahun 1827 ketika sedang meneliti zarah tepung sari, Brown menemukan gejala serupa yaitu zarah-zarah kecil bergerak secara acak dengan cepat (*rapid oscillatory motion*). Pada awalnya, Brown mengira gerak ini merupakan perwujudan suatu bentuk kehidupan, namun ternyata zarah-zarah tak organik yang kecil juga menunjukkan perilaku yang serupa (Isaacs, 1994, hlm. 43). Sumbangan Brown dalam menerangkan gejala *rapid oscillatory motion* ini adalah memberikan pijakan yang kuat bahwa gerakan ini merupakan gejala yang penting dan membuktikan bahwa gerakan ini tidak hanya berlaku untuk zarah organik tetapi juga ditemui pada zarah tak organik (Nelson, 2001, hlm. 8).

Sejak Brown memaklumkan hasil temuannya dalam *Philosophical Magazine* tahun 1828, gerakan zarah secara acak itu kemudian lebih dikenal sebagai gerak Brown (mengacu pada namanya; Robert Brown). Banyak ilmuwan kemudian berusaha untuk memberikan penjelasan mengenai fenomena gerak Brown ini. Namun, Halliday dan Resnick (1992, hlm. 811) menyebutkan bahwa tidak ada keterangan kuantitatif mengenai fenomena ini sampai dikembangkannya teori kinetik. Karenanya, Nelson (2001, hlm. 10–1) menyatakan bahwa penelitian tentang gerak Brown yang patut dicatat pada masa itu adalah eksperimen Gouy. Kesimpulan dari penelitian Gouy dituangkan dalam 7 butir utama berikut :

1. Gerakan ini sangat tidak teratur, gabungan dari translasi dan rotasi dan lintasannya nampak tidak mempunyai garis singgung.
2. Dua zarah nampak bergerak secara saling bebas, bahkan ketika mereka mendekati satu sama lain dalam jarak yang lebih dekat dibanding diameter mereka.
3. Gerakan ini semakin cepat untuk zarah yang semakin kecil.
4. Gerakan ini tidak dipengaruhi oleh komposisi dan rapatan zarah.
5. Gerakan ini semakin cepat dalam fluida yang viskositasnya semakin kecil.
6. Gerakan ini semakin cepat pada suhu yang semakin tinggi.

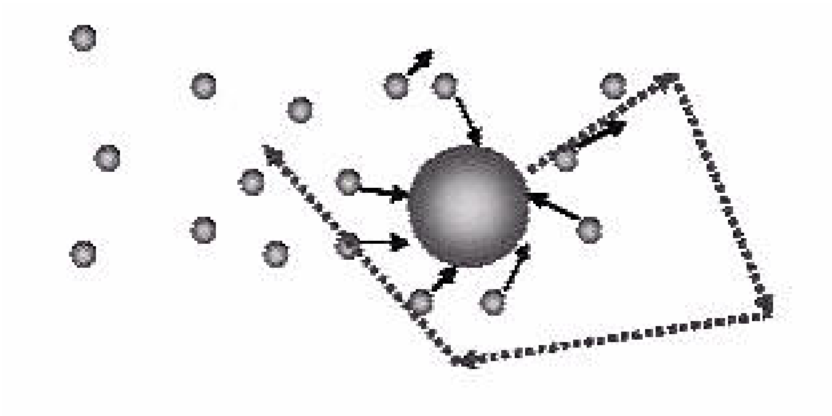
7. Gerakan ini tidak pernah berhenti.

Pada masa itu secara bersamaan terjadi perdebatan yang sengit tentang teori atom, apakah atom sebagai kenyataan ilmiah atau tidak. Sebagaimana tradisi dalam ilmu fisika, hakim dari setiap perdebatan adalah eksperimen. Halliday dan Resnick (1992, hlm. 810-11) menyatakan bahwa melalui telaah mengenai gerak Brown secara kuantitatif, kebenaran teori kinetik atom pada akhirnya teruji sehingga perdebatan itu menjadi padam. Titik pancang padamnya perdebatan ini adalah bermula dari karya Albert Einstein tentang gerak Brown dalam *Annalen der Physik* tahun 1905.

5.1 Model Fisika untuk Gerak Brown

Einstein mengandaikan bahwa zarah-zarah yang tergantung dalam suatu fluida secara bersama-sama menanggung gerak termal dari medium dan secara rata-rata tenaga kinetik translasi dari setiap zarah adalah $3/2\ kT$, sesuai dengan prinsip ekipartisi tenaga. Dalam pandangan ini, maka gerak Brown berasal dari tumbukan molekul-molekul fluida, dan zarah-zarah yang tergantung mendapatkan tenaga kinetik rata-rata yang sama seperti molekul-molekul fluida tersebut.

Zarah-zarah yang tergantung tersebut adalah sangat besar dibandingkan dengan molekul-molekul fluida dan semua sisinya ditembaki secara terus-menerus oleh molekul-molekul tersebut. Jika zarah-zarah cukup besar dan jumlah molekul cukup banyak, maka jumlah molekul yang sama akan menumbuk semua sisi zarah-zarah pada setiap saat. Untuk zarah-zarah yang lebih kecil dan jumlah molekul yang lebih sedikit maka jumlah molekul yang menumbuk berbagai sisi



Gambar 5.1: Zarah Brown yang tergantung dalam fluida 'menderita' gaya sebarang K

zarah pada setiap saat semata-mata hanyalah merupakan kemungkinan. Besar jumlah ini mungkin tidak sama, sehingga akan terjadi fluktuasi. Akibatnya, setiap saat zarah mengalami gaya tak seimbang yang pada gilirannya menyebabkan zarah tersebut bergerak dengan berbagai cara. Dengan demikian zarah-zarah bertindak persis seperti molekul-molekul yang sangat besar di dalam fluida, dan geraknya secara kualitatif haruslah sama seperti gerak molekul-molekul fluida. Kaitannya dengan bilangan Avogadro, seandainya bilangan Avogadro adalah tak berhingga maka tidak akan ada fluktuasi sehingga tidak ada gerak Brown. Sebailknya, seandainya bilangan Avogadro adalah sangat kecil, maka gerak Brown akan sangat besar. Oleh karena itu, bilangan Avogadro bisa ditentukan dengan gerak Brown ini.

Secara garis besar, argumen Einstein dalam menurunkan gerak Brown ini dapat dibagi menjadi 2 bagian. Dalam argumen bagian pertamanya, Einstein mengandaikan bahwa gerak Brown yang dimulai pada saat $X(0) = 0$ akan mempunyai rapat peluang pada waktu t yaitu $N(0, t)$. Rapat peluang sebuah zarah Brown berada pada x dan waktu t bernilai

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\,\pi\,D\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{4\,D\,t}}. \tag{5.1}$$

Maka, untuk menyelesaikan persamaan tersebut, Einstein menurunkannya ke dalam persamaan difusi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{5.2}$$

dengan D adalah tetapan positif koefisien difusi.

Argumen bagian kedua menghubungkan D dengan besaran fisis yang lain. Untuk itu, andaikan zarah-zarah Brown tergantung (tercelup) dalam fluida, berada dalam pengaruh gaya eksternal K dan dalam sistem kesetimbangan. Dalam tinjauan ini gaya K dianggap sebagai gaya sebarang.

Dalam kesetimbangan, gaya K diimbangi oleh tekanan osmotik,

$$K = kT\,\frac{\mathrm{grad}\,\upsilon}{\upsilon} = kT\,\frac{\nabla \upsilon}{\upsilon}. \tag{5.3}$$

Di sini grad merupakan singkatan dari gradien yang melambangkan laju variasi terhadap koordinat dan ∇ adalah lambang singkat dari grad atau disebut juga operator turunan nabla Laplace. Lambang υ merupakan jumlah zarah per satuan volume, T adalah suhu mutlak, dan k adalah tetapan Boltzman yang mempunyai dimensi energi per suhu sehingga besaran kT mempunyai dimensi energi ($k = 1,381.10^{-23}$ J/K). Pengetahuan tentang k sebenarnya adalah pengetahuan tentang bilangan Avogadro sebab k adalah perbandingan antara tetapan gas universal R ($= 8,31$ J/mol K) dan bilangan Avogadro itu sendiri, dan oleh karenanya, ini akan mengarah pada ukuran molekul. Ruas kanan persamaan (5.3) diturunkan dengan menganggap zarah-zarah Brown identik dengan molekul gas dalam teori kinetik.

Zarah-zarah Brown yang bergerak dalam fluida menyebabkan timbulnya gesekan sehingga gaya K memberi kecepatan pada setiap zarah sebesar

$$\frac{K}{m\,\beta}$$

dengan β merupakan tetapan berdimensi frekuensi (satuan: per waktu) dan m adalah massa zarah. Oleh karena itu, sebanyak $\frac{\upsilon\,K}{m\,\beta}$ zarah melewati satuan luas per satuan waktu sesuai dengan aksi gaya K. Dengan kata lain, jika hanya difusi yang bekerja saja, υ akan memenuhi persamaan difusi sehingga jumlah zarah yang melewati satuan luas per waktu adalah

$$D\;\nabla\upsilon.$$

Dengan demikian, didapatkan

$$\frac{\upsilon K}{m\beta} = D\nabla\upsilon. \tag{5.4}$$

Dengan menggunakan persamaan (5.3) dan (5.4), maka K

dan υ dapat dilenyapkan dan didapat

$$D = \frac{kT}{m\beta}. \tag{5.5}$$

Kaitan di atas biasa dikenal sebagai kaitan Einstein . Kaitan ini berlaku bahkan ketika tidak ada gaya dan ketika hanya ada satu zarah Brown.

Andaikan kedua ruas dalam persamaan (5.3) dibagi dengan $m\beta$ dan dengan menggunakan persamaan (5.4), maka akan didapat persamaan baru

$$\frac{K}{m\beta} = D\frac{\nabla \upsilon}{\upsilon}.$$

Karena rapat peluang ρ hanyalah rapatan jumlah υ dibagi dengan jumlah zarah, maka persamaan di atas dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{K}{m\beta} = D\frac{\nabla \rho}{\rho}.$$

Ruas kiri persamaan di atas merupakan kecepatan yang diperoleh zarah karena aksi gaya K, maka

$$D\frac{\nabla \upsilon}{\upsilon} \tag{5.6}$$

merupakan kecepatan yang dibutuhkan oleh zarah untuk melawan efek gaya K.

Jika zarah Brown adalah bola dengan jejari a, maka teori gesekan Stokes memberikan $m\beta = 6\pi\eta a$, dengan η adalah koefisien viskositas fluida, sehingga dalam kejadian ini tetapan difusi menjadi

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{5.7}$$

Suhu T dan koefisien viskositas η dapat diukur dan jejari zarah berbentuk bola dapat ditentukan, dan D dapat dicari dengan pengamatan statistik gerak Brown menggunakan persamaan (5.1). Dengan cara ini, tetapan Boltzman k (atau setara dengan bilangan Avogadro) dapat dihitung. Perhitungan ini dikerjakan oleh Perrin dan Chaudesaigues. Yang lebih menakjubkan, hasil perhitungan bilangan Avogadro yang didapat, yakni 6.10^{23} zarah/mol, hampir mendekati dengan nilai bilangan Avogadro yang sekarang ($N_A = 6,02.10^{23}$ /mol).

Perhitungan Einstein di atas hanya menentukan sifat alamiah gerakan dan nilai koefisien difusi yang berdasarkan pada andaian-andaian yang disusunnya. Secara terpisah, Smoluchowski mendapatkan persamaan (5.5) dengan faktor 32/27 pada ruas kanannya. Langevin memberikan penurunan yang lain terhadap persamaan (5.5) yang kemudian menjadi pijakan bagi karya Ornstein dan Uhlenbeck.

Karya Einstein ini sangat berpengaruh dalam fisika karena telah membuktikan dengan cara yang mudah dan konkret bahwa atom benar-benar ada. Namun demikian, Einstein tidak bisa memberikan bukti bahwa gerak Brown wujud (eksis) secara matematika (Ma, 1997, hlm. 49).

5.2 Model Matematika untuk Gerak Brown

Dalam beberapa pustaka, ada aneka lambang untuk menyebut gerak Brown. Lambang $B(t)$ diambil dari abjad pertama *Brownian motion* sekaligus untuk mengenang Robert Brown. Lambang $W(t)$ digunakan sebagai penghormatan terhadap Norbert Wiener yang telah membuktikan eksistensi gerak Brown secara matematis dalam disertasi doktornya tahun 1923, karena itu pula proses gerak Brown juga sering disebut dengan istilah proses Wiener. Sementara beberapa pustaka yang lain —misalnya Ross (1982)— menggunakan lambang yang berbeda yakni $Z(t)$ dan $z(t)$. Dalam buku ini, secara umum notasi $B(t)$ dipilih untuk melambangkan proses gerak Brown ini, meskipun di beberapa bagian menggunakan beberapa lambang yang berbeda.

Sebagaimana sudah disinggung ketika membahas proses Markov, gerak Brown merupakan pengembangan lebih lanjut dari jalan acak. Dari pembahasan itu dan mengingat kembali dalil limit pusat, maka peubah acak $X(t)$ merupakan peubah acak normal dengan nilai harap 0 dan variansi c^2t, kenaikannya merupakan kenaikan yang saling bebas, dan ketika perubahan nilai posisi jalan acak terhadap setiap selang waktu hanya bergantung pada selang itu sendiri maka kenaikannya adalah stasioner. Beberapa kesimpulan ini dapat diringkas sebagai takrif dari gerak Brown.

Secara lebih lengkap, sebuah proses stokastik $\{B(t),\ t \geq 0\}$ disebut proses gerak Brown jika memenuhi keadaan-keadaan berikut:

1. $B(0) = 0$,
2. proses $\{B(t),\ t \geq 0\}$ mempunyai kenaikan saling bebas

yang stasioner, yakni untuk $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ kenaikan dari $B(t_n) - B(t_{n-1})$, $B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \ldots, B(t_2) - B(t_1)$ merupakan peubah acak yang saling bebas,

3. untuk seluruh $t \geq 0$ dan $h > 0$, kenaikan $B(t+h) - B(t)$ terdistribusi secara normal dengan nilai harap $\mu\ h$ dan variansi $\sigma^2\ h$,
4. fungsi yang memetakan $t \mapsto B(t)$ merupakan fungsi kontinu.

Untuk nilai-nilai $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$, proses sering disebut sebagai gerak Brown standard (*standard Brownian motion*). Pandangan bahwa gerak Brown merupakan limit jalan acak menyajikan informasi bahwa $B(t)$ merupakan fungsi malar dari t namun berupa titik-titik sehingga tidak mulus dan karenanya fungsi ini tidak dapat diturunkan dimanapun juga. Andaian kenaikan yang saling bebas menyebabkan bahwa perubahan posisi antara waktu s dan $t+s$ —yakni $B(t+s) - B(s)$— merupakan saling bebas untuk seluruh nilai dalam proses sebelum waktu s. Karenanya, persamaan

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\left(B(t+s) \leq a \mid B(s) = x,\ B(u),\ 0 \leq u < s\right) \\
&= \mathcal{P}\left(B(t+s) - B(s) \leq a - x | B(s) = x,\right. \\
&\qquad \left. B(u), 0 \leq u < s\right) \qquad (5.8) \\
&= \mathcal{P}\left(B(t+s) - B(s) \leq a - x\right) \\
&= \mathcal{P}\left(B(t+s) \leq a | B(s) = x\right)
\end{aligned}$$

yang menyatakan bahwa peluang bersyarat untuk keadaan mendatang $B(t+s)$ hanya bergantung pada $B(s)$ sebagai keadaan sekarang. Sifat ini selaras dengan sifat proses Markov.

Gerak Brown yang dibahas di muka merupakan gerak Brown tanpa laju pertumbuhan (*drift*), nilai harap sama dengan 0. Sebuah gerak Brown $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown dengan laju pertumbuhan yang mempunyai koefisien laju pertumbuhan senilai μ jika memenuhi syarat-syarat:

1. $X(0) = 0$,
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ mempunyai kenaikan yang saling bebas dan stasioner,
3. $X(t)$ terdistribusi secara normal dengan nilai harap μt dan variansi t.

Dengan merujuk pada syarat-syarat di atas, jika $X(t)$ merupakan gerak Brown dengan laju pertumbuhan, maka $X(t)$ akan memenuhi persamaan

$$X(t) = B(t) + \mu t, \qquad B(t) \text{ merupakan gerak Brown standard.} \tag{5.9}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa sebuah gerak Brown dengan laju pertumbuhan merupakan sebuah proses yang cenderung untuk berolak (*drift off*) pada tingkat μ. Gerak Brown ini juga dapat didekati dengan jalan acak. Untuk memahami ini, andaikan bahwa untuk setiap Δt satuan waktu proses bergerak ke positif atau negatif dengan panjang langkah Δx dengan peluang p dan $1 - p$. Jika diandaikan bahwa

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{jika pada langkah ke-}i\text{ positif} \\ -1 & \text{untuk } i \text{ yang lain} \end{cases}$$

maka $X(t)$ yakni posisi pada waktu t adalah

$$X(t) = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{t/\Delta t}).$$

Pada proses ini nilai harap dan variansinya adalah

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \Delta x\,[t/\Delta t]\,(2p-1) \\ \mathrm{Var}[X(t)] &= (\Delta x)^2[t/\Delta t][1-(2p-1)^2]. \end{aligned}$$

Andaikan kemudian diambil nilai $\Delta x = \sqrt{\Delta y}$, $p = \frac{1}{2}(1+\mu\sqrt{t})$, dan $\Delta t \to 0$ maka

$$\begin{aligned} E[X(t)] &\to \mu t, \\ \mathrm{Var}[X(t)] &\to t, \end{aligned}$$

sehingga nampak jelas bahwa $\{X(t)\}$ merupakan gerak Brown dengan koefisien laju pertumbuhan μ.

Berdasarkan pembahasan dalam gerak Brown standard dan gerak Brown dengan laju pertumbuhan, jika gerak Brown $\{X(t),\, t \geq 0\}$ memiliki nilai harap μ dan variansi σ^2 maka persamaan gerak Brown secara umum akan menjadi

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t. \tag{5.10}$$

Dalam bentuk persamaan turunan, persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$dX(t) = \sigma dB(t) + \mu dt. \tag{5.11}$$

Sejauh ini, gerak Brown yang disinggung hanya merupakan peubah-peubah acak yang mengikuti gerak Brown tersebut.

Apabila logaritma dari suatu peubah acak mengikuti gerak Brown, maka proses ini juga merupakan gerak Brown. Andaikan $\{X(t),\, t \geq 0\}$ merupakan gerak Brown dengan laju pertumbuhan μ dan variansi σ^2, maka proses $\{Y(t),\, t \geq 0\}$ yang memenuhi takrif

$$Y(t) = e^{X(t)} = e^{\sigma B(t) + \mu t} \tag{5.12}$$

juga merupakan gerak Brown. Nama khusus untuk gerak Brown jenis ini adalah gerak Brown geometrik (*geometric Brownian motion*) —acapkali disebut gerak Brown eksponensial.

5.3 Lemma Itô

Salah satu perampatan gerak Brown yang sangat masyhur adalah proses Itô. Jika $X(t)$ mengikuti proses Itô, maka

$$dX(t) = a(X,t)\,dt + b(X,t)\,B(t) \tag{5.13}$$

dengan parameter a dan b merupakan fungsi dari nilai-nilai peubah acuan X dan t, sedangkan $dB(t)$ merupakan gerak Brown. Lemma Itô menunjukkan bahwa sebuah fungsi Y dari X dan t mengikuti proses

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial X} a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial Y}{\partial X}\, b\, dB(t). \tag{5.14}$$

Oleh karena itu, Y juga mengikuti proses Itô dengan laju pertumbuhan

$$\frac{\partial Y}{\partial X}a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}b^2 \tag{5.15}$$

dan variansi

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 b^2. \tag{5.16}$$

Bukti

Dengan deret Taylor dari ΔY yang merupakan fungsi dari X dan t, maka di dapat

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \frac{\partial Y}{\partial X}\Delta X + \frac{\partial Y}{\partial t}\Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}\Delta X^2 + 2\frac{\partial^2 Y}{\partial X \partial t}\Delta X \Delta t + \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}\Delta t^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(\Delta X \frac{\partial}{\partial X} + \Delta t \frac{\partial}{\partial t}\right)^3 Y + \cdots . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bentuk tercacah dari proses Itô (persamaan (5.13)) adalah

$$\Delta X = a(X,t)\Delta t + b(X,t)\sqrt{\Delta t}. \tag{5.18}$$

Dengan limit $\Delta t \to 0$, maka $\Delta X^2 \approx b^2(X,t)\sqrt{\Delta t}$. Penyisipan persamaan ini ke dalam persamaan (5.17) akan menghasilkan

$$\begin{aligned} dY &= \frac{\partial Y}{\partial X}dX + \frac{\partial Y}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}b^2(X,t)dt \\ &= \left(\frac{\partial Y}{\partial X}a + \frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}b^2\right)dt + \frac{\partial Y}{\partial X}\,b\,dB(t). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Penerapan untuk gerak Brown geometrik

Jika diandaikan bahwa $S = e^Z$ dengan Z merupakan gerak Brown menurut persamaan

$$dZ = \mu dt + \sigma dB \tag{5.20}$$

maka dengan menggunakan lemma Itô dan

$$\frac{\partial S}{\partial Z} = e^Z = S, \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial Z^2} = e^Z = S$$

akan didapat persamaan

$$\begin{aligned} dS &= S\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + S\sigma dB \\ \frac{dS}{S} &= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB \end{aligned} \tag{5.21}$$

5.4 Persamaan Rambatan Panas

Persamaan rambatan panas (*heat equation*) mempunyai kaitan yang erat dengan gerak Brown. Dengan mengetahui bahwa $B(t)$ mempunyai $N(0,t)$ untuk agihan $t > 0$ jika $B(t)$ adalah gerak Brown, maka rapat peluang $\rho(x,t)$ dapat ditulis

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\,e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

Dengan menghitung turunan sebagian dari $\rho(x,t)$ yakni

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\rho(x,t),\\
\frac{\partial\rho}{\partial x}(x,t) &= -\frac{x}{t}\rho(x,t),\\
\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}(x,t) &= \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right)\rho(x,t),
\end{aligned}$$

maka dapat ditunjukkan bahwa $\rho(x,t)$ memenuhi persamaan turunan sebagian yang disebut juga persamaan rambatan panas berikut

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}(x,t). \tag{5.22}$$

Sifat ini dapat dilacak dengan mengandaikan bahwa f mencukupi syarat-syarat sebagai sebuah fungsi. Jika $u(x,t) = E[f(B(t)+x)]$, maka dapat dilihat pada saat $t = 0$ fungsi $u(x,0)$ akan bernilai $u(x,0) = f(x)$. Untuk $t > 0$, akan didapat persamaan

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\rho(x-z,t)dz. \tag{5.23}$$

Penurunan kedua ruas persamaan di atas terhadap t dan x secara serentak akan menghasilkan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\frac{\partial \rho}{\partial t}(x-z,t)dz \tag{5.24}$$

dan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}(x-z,t)dz. \tag{5.25}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa u juga memenuhi persamaan rambatan panas.

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,t}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}}. \tag{5.26}$$

6 — Pasar Saham

Pasar merupakan tempat dimana penjual dan pembeli dapat bertemu untuk saling bertukar produk masing-masing atau melakukan transaksi. Sebuah pasar tidak selalu harus mempunyai tempat dalam arti fisik, misalnya pasar keuangan (*financial market*). Menurut takrif Brigham dan Houston (2001), pasar keuangan adalah tempat terjadinya penawaran dan permintaan dana serta investasi melalui transaksi bisnis secara langsung.

Ada dua macam pasar keuangan yang utama, yaitu pasar uang dan pasar modal. Pasar uang terbentuk karena adanya penawaran dan permintaan dana jangka pendek (jangka waktu kurang dari 1 tahun) dalam bentuk sekuritas (*security*) atau surat berharga[1], warkat komersial (*commercial paper*),

[1]Istilah-istilah sekuritas, surat berharga atau instrumen keuangan

dan sertifikat deposito. Sedangkan pasar modal terbentuk karena adanya penawaran dan permintaan dana jangka panjang (jangka waktu lebih dari 1 tahun), baik dalam bentuk modal sendiri (*stock*) maupun hutang (*bond*), baik yang diterbitkan oleh pemerintah (*public authorities*) maupun oleh perusahaan swasta (privat sectors). Surat berharga utama yang diperdagangkan adalah saham (*stock, share*), obligasi (*bond*) dan derivatif (*derivative*).

Dalam perdagangan surat berharga, dikenal ada 2 jenis pasar surat berharga, yaitu pasar perdana (*primary market*) dan pasar sekunder (*secondary market*). Seluruh surat berharga, baik di pasar uang maupun di pasar modal, diterbitkan pertama kali di pasar perdana. Dalam pasar ini penerbit (perusahaan yang *go public*, disebut juga emiten) langsung terlibat dalam transaksi dan bermaksud untuk mencari modal baru. Perdagangan surat berharga pertama kali terjadi di sini sebelum dicatatkan di bursa efek. Pada pasar perdana ini surat berharga untuk pertama kalinya ditawarkan kepada pemodal oleh pihak Penjamin Emisi (*Underwriter*) melalui Perantara Pedagang Efek (*Broker-Dealer*) yang bertindak sebagai Agen Penjual surat berharga. Proses ini biasa disebut dengan Penawaran Umum Perdana (*Initial Public Offering*/IPO). Jadi pasar perdana adalah tempat penjualan surat-surat berharga yang baru.

Selanjutnya perdagangan surat berharga yang telah dicatatkan di bursa efek akan berlangsung di pasar sekunder. Pasar sekunder memberi kesempatan kepada para pemodal untuk membeli atau menjual surat berharga yang tercatat di

---

mempunyai makna yang hampir sama. Selanjutnya dalam buku ini dipilih istilah surat berharga.

bursa setelah terlaksananya penawaran perdana. Di pasar sekunder ini, surat berharga diperdagangkan dari satu pemodal kepada pemodal lainnya. Dengan kata lain, pasar sekunder merupakan tempat perdagangan surat berharga yang telah beredar.

Organisasi yang menyediakan tempat dimana pasar sekunder dapat berlangsung disebut dengan bursa efek. Menurut UU No 8 tahun 1995, bursa efek (*stock exchange*) merupakan pihak yang menyelenggarakan dan menyediakan sistem dan atau sarana untuk mempertemukan penawaran jual dan beli efek kepada pihak-pihak lain dengan tujuan memperdagangkan efek. Sementara itu, efek merupakan surat berharga yang berupa pengakuan hutang, surat berharga komersial, saham, obligasi, tanda bukti utang, unit penyertaan kontrak kolektif, kontrak berjangka atas efek, dan setiap derivatif dari efek.

Bursa efek terdiri dari bursa yang terorganisir (*organized securities exchange*) dan bursa tidak terorganisir atau bursa tidak resmi (*over the counter exchange*, disingkat OTC). Bursa terorganisir merupakan organisasi nyata yang bertindak seperti pasar sekunder dimana surat-surat berharga yang beredar dijual kembali. Yang termasuk dalam contoh bursa terorganisir adalah *Jakarta Stock Exchange* (JSX), *New York Stock Exchange* (NYSE) dan *America Stock Exchange* (AMEX). Sedangkan OTC merupakan pasar tidak berwujud yang membeli dan menjual surat berharga yang tidak terdaftar di bursa yang terorganisir, sehingga di sini berkumpul para broker dan dealer dalam jumlah besar, yang dihubungkan dengan komputer dan telepon. NASDAQ di Amerika (*National Association of Securities Dealers Automated Quotation System*) dapat dikelompokkan dalam kategori ini.

Dari uraian di atas terlihat bahwa pasar modal hanyalah merupakan tempat bertemunya permintaan dan penawaran surat berharga jangka panjang. Untuk menentukan seberapa baik kualitas pasar modal, Reilly (Yuliati *et al.*, 1996) menyarankan untuk meninjaunya melalui empat penunjuk, yaitu ketersediaan informasi, likuiditas (*liquidity*), efisiensi internal (*internal efficiency*) dan efisiensi eksternal (*external efficiency*).

Ketersediaan informasi berkaitan erat dengan informasi di pasar modal itu sendiri, misalnya informasi mengenai fluktuasi harga surat berharga di masa lalu atau fluktuasi volume perdagangannya. Dalam hal ini, informasi dimengerti sebagai serangkaian pesan yang mungkin dapat digunakan oleh penerimanya untuk melakukan suatu tindakan yang bisa mengubah kesejahteraannya, meningkatkan kemampuan penerimanya untuk melakukan tindakan yang bersifat kritis dan memperoleh nilai tertentu dari perubahan pesan-pesannya. Informasi yang ada akan mempengaruhi proses terbentuknya harga jual dan beli suatu surat berharga. Semakin lengkap dan mudah akses terhadap informasinya, maka pasar modal akan semakin baik.

Likuiditas menunjukkan kemampuan untuk membeli atau menjual surat berharga tertentu secara cepat dan pada harga yang tidak terlalu berbeda dengan harga sebelumnya, dengan andaian tidak ada tambahan informasi baru sehingga likuiditas menunjukkan kemampuan perusahaan dalam memenuhi kewajiban keuangan berjangka pendek. Sementara efisiensi internal suatu pasar modal bergantung pada tinggi rendah biaya transaksi, biaya pajak dan biaya yang berkaitan dengan *financial distress* di pasar modal tersebut. Semakin rendah biaya transaksi maka semakin tinggi efisiensi internalnya. Dengan demikian efisiensi internal juga dapat disebut efisiensi operasional.

Faktor penunjuk terakhir, efisiensi eksternal, menjelaskan penyesuaian harga surat berharga terhadap informasi baru. Karena efisiensi eksternal berkaitan dengan pasokan informasi, maka efisiensi eksternal dikenal sebagai efisiensi informasi (*informational efficiency*). Pendapat-pendapat yang berusaha menjelaskan tentang hubungan pasokan informasi dan tingkat efisiensi pasar dikenal sebagai hipotesis pasar efisien dan akan diberikan penjelasan secara khusus pada bagian lain dalam bab ini.

6.1 Saham

Saham adalah sertifikat yang menunjukkan bukti kepemilikan suatu perusahaan, dan pemegang saham memiliki hak klaim atas penghasilan dan aktiva perusahaan. Wujud saham adalah selembar kertas yang menerangkan bahwa pemiliknya adalah pemilik perusahaan yang menerbitkan kertas tersebut. Bila seorang pemodal membeli saham, maka ia akan menerima kertas yang menjelaskan bahwa ia memiliki perusahaan penerbit saham tersebut.

Ada dua keuntungan bagi pemodal yang memiliki saham, yakni dividen dan laba modal (*capital gain*). Dividen merupakan keuntungan emiten yang dibagikan kepada para pemegang saham. Dividen diberikan setelah mendapatkan persetujuan dari para pemegang saham dalam RUPS (Rapat Umum Pemegang Saham). Jika seorang pemodal ingin mendapatkan dividen, maka pemodal tersebut harus memegang saham tersebut dalam kurun waktu yang relatif lama yaitu hingga kepemilikan saham tersebut berada dalam periode dimana diakui sebagai pemegang saham yang berhak mendapatkan dividen.

Umumnya dividen merupakan salah satu daya tarik bagi pemegang saham yang berorientasi jangka panjang, misalnya pemodal kelembagaan. Dividen yang dibagikan emiten dapat berupa uang tunai dalam jumlah rupiah tertentu untuk setiap saham atau dapat pula berupa sejumlah saham sehingga jumlah saham yang dimiliki seorang pemodal akan bertambah dengan adanya pembagian dividen saham tersebut.

Laba modal atau *capital gain* merupakan selisih harga beli dan harga jual saham. Laba modal terbentuk dengan adanya kegiatan perdagangan saham di pasar sekunder. Umumnya pemodal dengan orientasi jangka pendek mengejar keuntungan melalui laba modal ini. Misalnya seorang pemodal yang membeli saham pada pagi hari dan kemudian menjualnya di sore hari ketika harga saham mengalami kenaikan.

Saham dikenal dengan karakteristik *high risk-high return*. Artinya, saham merupakan surat berharga yang memberikan peluang keuntungan tinggi namun juga memiliki risiko tinggi. Saham memungkinkan pemodal untuk mendapatkan hasil pengembalian (*return*), dalam hal ini laba modal, dalam jumlah besar dalam waktu yang singkat. Namun, fluktuasi harga saham juga dapat membuat pemodal mengalami kerugian besar dalam waktu singkat.

Risiko tinggi karena berinvestasi dalam bentuk saham diantaranya adalah tidak adanya pembagian dividen, rugi modal (*capital loss*), risiko likuidasi, dan risiko penghapusan (*delisting*) dari bursa.

Risiko tidak adanya pembagian dividen dapat terjadi jika emiten tidak dapat membukukan laba pada tahun berjalan. Bisa juga disebabkan RUPS memutuskan untuk tidak membagikan dividen kepada pemegang saham karena laba yang diperoleh akan digunakan untuk perluasan usaha. Rugi modal dapat terjadi apabila harga beli saham lebih tinggi dari harga jualnya. Sedangkan jika emiten bangkrut atau dilikuidasi, para pemegang saham memiliki hak klaim terakhir terhadap aktiva perusahaan setelah seluruh kewajiban emiten dibayar. Yang terburuk adalah jika tak ada lagi aktiva yang tersisa, maka para pemegang saham tidak memperoleh apa-apa. Untuk risiko penghapusan dari bursa hanya akan terjadi karena beberapa alasan seperti dalam jangka waktu tertentu kinerja emiten dinilai buruk oleh pasar sehingga volume perdagangan saham cenderung menurun terus dalam waktu lama.

6.2 Obligasi

Obligasi adalah sertifikat yang berisi kontrak antara pemodal dan perusahaan yang menyatakan bahwa pemodal tersebut telah meminjamkan sejumlah uang kepada perusahaan. Maka, obligasi bisa pula disebut surat pengakuan hutang. Perusahaan yang menerbitkan obligasi mempunyai kewajiban untuk membayar bunga secara berkala sesuai dengan jangka waktu yang telah ditetapkan dan pada saat jatuh tempo perusahaan harus membayar pokok pinjamannya.

Nilai suatu obligasi bergerak berlawanan arah dengan perubahan suku bunga secara umum. Jika suku bunga secara umum cenderung turun, maka nilai atau harga obligasi akan meningkat, karena para pemodal cenderung untuk berinvestasi pada obligasi. Sebaliknya, jika suku bunga secara umum cenderung meningkat, maka nilai atau harga obligasi akan turun, karena para pemodal cenderung untuk menanamkan uangnya di bank.

Pemodal yang berinvestasi dalam bentuk obligasi akan memperoleh beberapa keuntungan, yaitu mendapatkan bunga, laba modal dan hak klaim pertama jika emiten bangkrut atau dilikuidasi. Bunga obligasi ditetapkan dalam persentase dari nilai nominal obligasi dan akan dibayarkan secara berkala sampai jatuh tempo. Sebagai contoh, untuk obligasi dengan kupon 10%, pemodal akan menerima Rp 10 setiap Rp 100 dari nilai nominal setiap tahun. Biasanya pembayaran bunga dilakukan setiap 3 atau 6 bulan sekali.

Selain itu, sebelum jatuh tempo biasanya obligasi diperdagangkan di pasar sekunder, sehingga pemodal mempunyai kesempatan untuk memperoleh laba modal. Laba modal juga dapat diperoleh jika pemodal membeli obligasi dengan diskon sehingga harga belinya lebih rendah dari nilai nominalnya, sedangkan pada saat jatuh tempo perusahaan akan membayar sesuai dengan nilai nominal obligasi.

Sebagaimana sifat investasi yang tidak hanya menjanjikan hasil pengembalian tetapi juga menyimpan risiko, berinvestasi dalam bentuk obligasi juga mengandung sifat demikian. Risiko-risiko itu antara lain, rugi modal, *default* atau gagal bayar (kegagalan emiten untuk memenuhi ketentuan yang ditetapkan dalam kontrak obligasi), dan *callability*. Risiko yang disebutkan terakhir hanya akan terjadi pada obligasi yang memang mencantumkannya sebagai salah satu kesepakatan dalam kontrak. Kesepakatan itu menjamin emiten untuk mempunyai hak membeli kembali obligasi sebelum jatuh tempo. Biasanya ini dilakukan pada saat suku bunga secara umum menunjukkan kecenderungan menurun. Sebagai gantinya, emiten akan memberikan premi kepada pemegang obligasi.

6.3 Derivatif

Derivatif merupakan surat berharga yang nilainya bergantung pada surat berharga yang mendasari atau surat berharga acuan (*underlying assets*). Ada beberapa macam surat berharga derivatif, seperti bukti right, waran (*warrant*), kontrak berjangka (*future*), dan opsi (*option*).

Derivatif merupakan surat berharga yang sangat berisiko jika tidak digunakan secara hati-hati (Bapepam, 2003, hlm.17). Meskipun demikian derivatif juga dapat digunakan untuk mengurangi risiko atau sebagai investasi spekulatif (Brigham dan Houston, 2001). Contoh penggunaan derivatif untuk mengurangi risiko dapat dilihat dari peristiwa berikut. Ketika rupiah melemah terhadap dolar, laba bersih seorang importir cenderung menurun. Importir ini dapat mengurangi risiko dengan membeli derivatif yang meningkatkan nilai labanya ketika nilai rupiah menurun. Tindakan importir seperti ini disebut operasi *hedging* (lindung nilai, pemagaran), tujuannya adalah untuk mengurangi risiko. Di sisi lain, spekulasi dengan harapan memperoleh hasil pengembalian yang tinggi dapat dilakukan dengan derivatif, namun risiko yang dihadapi juga tinggi. Brigham dan Houston (2001) menyebutkan bahwa perusahaan Procter and Gamble di Amerika pernah mengalami kerugian sebesar $150 juta karena investasi derivatif, bahkan perusahaan Orange Country di California jatuh bangkrut karena spekulasi derivatif.

Dari beberapa macam derivatif di atas, bentuk derivatif yang tergolong baru di Indonesia adalah surat berharga opsi yang baru diperkenalkan di bursa efek Jakarta pada paro kedua 2003 (Sinar Harapan, 2004). Dengan menggunakan opsi, seorang pemodal dapat meminimumkan batas kerugian dan memaksimumkan laba yang akan diperolehnya. Sehingga jika digunakan dengan cemat, opsi akan sangat berguna bagi perusahaan atau individu untuk mengurangi risiko keuangan yang membayangi. Karakteristik opsi yang bisa membatasi kerugian yang akan diperoleh pemodal dan membuat keuntungan yang tak terbatas nilainya ini sangat menarik untuk dikaji. Apalagi, sejumlah besar kontrak sesuai dengan gambaran opsi (Weston dan Copeland, 1995, hlm. 514). Misalnya, dalam perusahaan yang menerbitkan hutang, seorang pemegang saham mempunyai hak (bukan kewajiban) untuk melunasi hutang tersebut dan berhak memiliki sisa nilai perusahaan pada saat hutang jatuh tempo. Dan tentu saja pemegang saham itu juga dapat menerima kebangkrutannya.

7 — Opsi Saham

Opsi adalah suatu hak yang dimiliki oleh pemegangnya, bukan kewajiban yang harus dilaksanakan pada waktu kontrak tersebut jatuh tempo. Secara lebih lengkap, opsi merupakan kontrak dengan penulis opsi (*option writer*) yang menjamin pembeli opsi (*option holder*) suatu hak untuk membeli atau menjual suatu surat berharga acuan (*underlying asset*) kepada penulis opsi pada harga tertentu dalam periode waktu tertentu. Penulis[1] opsi memberikan hak ini sebagai ganti dari pembayaran sejumlah uang yang diterimanya. Pembayaran ini disebut dengan premi opsi. Harga surat berharga acuan

[1] Istilah penulis opsi mempunyai arti yang sama dengan penjual atau penerbit opsi. Dalam buku ini, ketiga sebutan tadi kadang digunakan secara bergantian semata-mata demi menyesuaikan dengan suasana kalimat yang menyertainya. Demikian pula istilah pembeli atau pemegang opsi.

untuk dibeli atau dijual pada waktu yang akan datang disebut dengan harga laksana (*exercise price/strike price*).[2] Tanggal yang setelahnya opsi dinyatakan tidak berlaku lagi disebut tanggal jatuh tempo atau tanggal kadaluarsa (*exercise date*).

Diawal telah disinggung bahwa opsi merupakan suatu hak, sehingga pemegang opsi dapat mengggunakannya atau mengabaikannya. Pada saat jatuh tempo, jika pemegang opsi tidak menggunakan haknya, maka hak tersebut akan hilang dengan sendirinya. Dengan demikian, opsi menjadi tidak bernilai lagi.

Sebagai salah satu surat berharga derivatif, opsi bergantung pada surat berharga acuan. Saat pertama kali opsi diperdagangkan, yakni mulai 26 April 1973 (Sartono, 1996, hlm. 438) di The Chicago Board Option Exchange (CBOE), surat berharga acuan untuk perdagangan opsi masih terbatas pada saham, sehingga disebut opsi atas saham. Perkembangan perdagangan opsi mengalami peningkatan yang cukup pesat. Pada bulan Nopember 1982 di Montreal Exchange, untuk pertama kalinya opsi untuk valuta asing diperdagangkan (Berlianta, 2005, hlm. 189). Sekarang, surat berharga acuan yang mendasari opsi tidak lagi terbatas pada saham maupun valuta asing, tetapi juga indeks saham, suku bunga dan *future treasury bond* (Keown *et al.*, 2000, hlm. 821-823). Sehingga,

[2] Alih bahasa yang lebih dekat mungkin adalah harga eksekusi atau pelaksanaan. Namun, dalam beberapa situasi, penulis merasa istilah 'harga pelaksanaan' acapkali menimbulkan kerancuan dengan 'harga pada waktu pelaksanaan'. Padahal, makna sebenarnya adalah 'harga pelaksanaan sesuai yang dijanjikan dalam kontrak', nominalnya bisa beda atau sama dengan 'harga pada waktu pelaksanaan'. Karena itu, penulis cenderung untuk menggunakan terjemah 'harga laksana', agar nuansa yang dibangun bisa terasa berbeda

jika acuan yang mendasari opsi adalah saham, maka opsi itu disebut opsi atas saham, dan dalam pembahasan selanjutnya penyebutan opsi dimaksudkan sebagai opsi atas saham ini atau opsi saham. Seperti surat berharga yang lain, opsi juga diperdagangkan di bursa saham resmi maupun bursa saham tidak resmi. Di AS, perdagangan resmi opsi dilakukan di CBOE, NYSE, AMEX, dan Philadelphia Stock Exchange (Fabozzi, 2000, hlm. 445).

7.1 Jenis Opsi

Opsi dapat dibedakan berdasarkan jenis haknya dan waktu pelaksanaan hak tersebut. Berdasarkan waktu pelaksanaan haknya, opsi dibedakan menjadi opsi Eropa (*European option*) dan opsi Amerika (*America option*). Opsi Eropa hanya mengijinkan pemegang opsi untuk melaksanakan haknya hanya pada saat jatuh tempo. Sedangkan opsi yang mengijinkan pemegangnya untuk melaksanakan haknya sejak penandatanganan kontrak sampai jatuh tempo ialah opsi Amerika. Jadi, nama Eropa atau Amerika tidak mengacu pada wilayah dimana opsi diperdagangkan atau dilaksanakan, tetapi semata-mata mengacu terhadap waktu pelaksanaan opsi, apakah hanya bisa dilaksanakan pada saat jatuh tempo saja (opsi Eropa) atau bisa dilaksanakan dalam masa selama opsi masih berlaku (opsi Amerika). Hull (1989, hlm. 9) menyebutkan bahwa beberapa opsi yang diperdagangkan di Amerika Utara justru merupakan opsi Eropa.

Berdasarkan hak yang dimiliki oleh pemegangnya, opsi dapat dibedakan menjadi opsi beli (*call option*) dan opsi jual (*put option*). Opsi beli memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli surat berharga acuan pada saat jatuh tempo dengan harga laksana yang telah disepakati. Sedangkan pemegang opsi jual mempunyai hak untuk menjual surat berharga acuan pada saat jatuh tempo dengan harga laksana yang sebelumnya disepakati.

Dengan demikian ada 3 pihak yang secara umum terlibat dalam perdagangan opsi, yaitu:

1. Penjual opsi, menerima harga opsi (premi) untuk menjamin pembeli opsi melaksanakan haknya.
   (a) Penjual opsi beli, menerima premi dan berjanji akan menjual surat berharga acuan dengan harga laksana pada saat jatuh tempo sesuai kesepakatan jika pemegang opsi beli ingin melaksanakan haknya.
   (b) Penjual opsi jual, menerima premi dan berjanji untuk membeli surat berharga acuan dengan harga pada saat jatuh tempo sesuai kesepakatan jika pemegang opsi jual ingin melaksanakan haknya.
2. Pembeli opsi, membayar harga opsi kepada penjual agar penjual menulis opsi.
   (a) Pembeli opsi beli, memiliki hak untuk membeli surat berharga acuan dengan harga laksana pada saat jatuh tempo sesuai kesepakatan.
   (b) Pembeli opsi jual, memiliki hak untuk menjual surat berharga acuan dengan harga laksana pada saat jatuh tempo sesuai kesepakatan.
3. Pialang (broker), bertindak sebagai agen transaksi dan mendapatkan komisi. Komisi yang diberikan kepada pialang ini lebih dikenal sebagai biaya transaksi.

7.2 Sifat Opsi Beli

Untuk mengetahui bagaimana sifat opsi beli, misalkan harga saham Telkom di bursa saat ini adalah Rp 5.000 per saham. Jika seorang pemodal membeli opsi beli gaya Eropa untuk saham Telkom dengan harga laksana Rp 5.100 dengan jatuh tempo 3 bulan dari sekarang, maka 3 bulan lagi pemodal tersebut punya hak (bukan kewajiban) untuk membeli saham Telkom dari penjual opsinya seharga Rp 5.100 per saham. Misalkan harga beli opsi tersebut sebesar Rp 300 per lembar saham.

Seandainya 3 bulan berikutnya harga saham Telkom di bursa menjadi Rp 5.800 per saham, maka pemodal tersebut boleh menggunakan haknya (istilahnya melaksanakan opsinya, *to exercise his option*) untuk membeli saham Telkom hanya dengan harga Rp 5.100 per saham dari penjual opsi. Kemudian, kalau mau, pemodal bisa segera menjualnya di bursa dengan harga Rp 5.800 per saham, sehingga ia untung Rp 400 per lembar saham. Namun, jika ternyata harga saham Telkom setelah 3 bulan turun menjadi Rp 4.800, pemodal tidak perlu melaksanakan opsinya sebab ia bisa membeli saham dengan harga yang lebih murah di bursa.

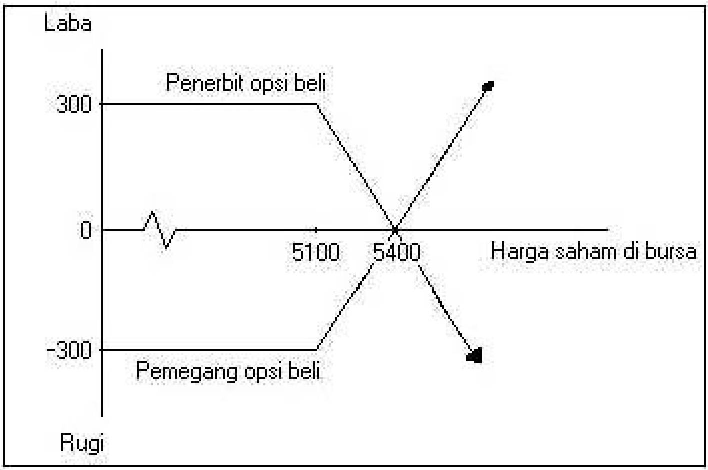
Dalam kasus terakhir, ketika harga saham di bursa lebih murah daripada harga laksananya, pemodal boleh membiarkan saja kontrak opsi berakhir sampai jatuh tempo. Dalam kejadian seperti ini, kerugian pemodal hanya sebesar harga yang ia bayar untuk membeli kontrak itu, yakni premi opsi sebesar Rp 300 per saham yang kemudian menjadi keuntungan penerbit opsi beli. Jadi, keputusan untuk melaksanakan atau tidak atas opsi beli akan ditentukan oleh harga saham acuan di bursa dan harga laksananya. Tabel 7.1 berikut akan memperjelas hal ini.

Tabel 7.1: Penghitungan laba/rugi opsi beli

Harga bursa (1)	Harga laksana (2)	Nilai opsi beli (3)	Premi opsi (4)	Nilai Laba/rugi (5)=(3) - (4)
4.600	5.100	0	300	-300
4.700	5.100	0	300	-300
4.800	5.100	0	300	-300
4.900	5.100	0	300	-300
5.000	5.100	0	300	-300
5.100	5.100	0	300	-300
5.200	5.100	100	300	-200
5.300	5.100	200	300	-100
5.400	5.100	300	300	0
5.500	5.100	400	300	100
5.600	5.100	500	300	200
5.700	5.100	600	300	300
5.800	5.100	700	300	400

Dengan demikian, kerugian pemodal pada saat harga saham Telkom di bursa lebih murah dibanding harga laksananya hanyalah sebesar premi opsi. Sedangkan potensi keuntungan yang akan diperolehnya bila harga saham Telkom di bursa lebih mahal adalah tak terbatas, bergantung pada jumlah lembar saham yang tertera dalam kontrak.

Uraian di atas dapat disajikan dalam Gambar 7.1. Dalam gambar tersebut tampak bahwa, apabila harga saham lebih kecil dari Rp 5.100 per lembar, maka pemegang opsi beli akan menderita kerugian sebesar premi opsi yaitu Rp 300. Ketika harga saham berada dalam selang Rp 5.100 sampai Rp 5.400,



Gambar 7.1: Laba/Rugi dari Opsi Beli Pada Saat Jatuh Tempo

kerugian pemegang opsi beli dibawah Rp 300. Pemegang opsi beli akan mulai menangguk keuntungan ketika harga saham melebihi Rp 5.400. Misalnya pada saat harga saham Rp 5.700 per lembar, maka pemegang opsi beli akan mendapatkan keuntungan Rp 300 per lembar.

Di lain pihak, keuntungan maksimal dari penerbit opsi beli adalah sebesar premi opsi. Keuntungan ini diperoleh apabila pemegang opsi beli tidak menggunakan haknya. Sementara itu, kerugian penerbit opsi beli akan semakin besar seiring dengan meningkatnya harga saham di bursa.

Yang perlu diperhatikan dalam sebuah opsi beli adalah jika harga dari saham acuan di bursa lebih rendah dari harga laksananya, maka akan lebih menguntungkan bagi pemegang opsi beli untuk membeli saham acuan di bursa daripada melaksanakan opsi beli tersebut. Untuk kejadian seperti ini nilai dari opsi tersebut atau nilai intrinsiknya sama dengan nol dan disebut dengan opsi yang tidak menghasilkan (*out of the money*). Sebaliknya, pada saat harga saham acuan di bursa lebih tinggi dari harga laksananya, nilai dari opsi beli tersebut akan positif sehingga opsi beli tersebut lebih menguntungkan untuk dilaksanakan. Opsi yang memiliki nilai intrinsik seperti ini disebut dengan opsi yang menghasilkan (*in the money*). Sedangkan ketika harga laksana saham acuan sama dengan harga di bursa, nilai intrinsik opsi juga nol sebab harga akan tetap sama baik menggunakan opsi atau tidak. Opsi yang demikian disebut opsi yang netral (*at the money*).

7.3 Sifat Opsi Jual

Sekarang, andaikan seorang pemodal melakukan pembelian opsi jual gaya Eropa untuk saham Barito. Misalkan harga laksana (*exercise price*) yang disepakati adalah Rp 4.800 dan saat ini harga saham Barito di bursa adalah Rp 5.000. Pemodal tersebut membeli opsi jual dengan premi sebesar Rp 300 per saham dengan jatuh tempo dua bulan mendatang.

Pada saat jatuh tempo, yakni dua bulan setelah kontrak ditandatangani, misalkan harga saham Barito di bursa menjadi Rp 4.600. Jika pemegang opsi jual melakukan penjualan saham Barito di bursa, berarti sahamnya akan dihargai Rp 4.600 per lembar. Tentu akan lebih menguntungkan jika ia melaksanakan opsi jualnya sehingga sahamnya akan dihargai sebesar Rp 4.800 per lembar. Pada saat demikian, penerbit opsi jual mempunyai kewajiban untuk membeli saham pemodal tersebut dengan harga Rp 4.800, lebih tinggi dua ratus rupiah daripada harga di bursa.

Sebaliknya, apabila pada saat jatuh tempo harga saham Barito di bursa adalah Rp 5.200, maka pemodal tidak perlu melaksanakan opsi jualnya sebab sahamnya hanya akan dihargai Rp 4.800 per lembar, akan lebih menguntungkan jika ia langsung menjual sahamnya di bursa dan membiarkan opsi jualnya kadaluarsa. Dalam keadaan yang demikian, penerbit opsi jual mempunyai keuntungan dari premi opsi yang dibayarkan oleh pemegang opsi jual pada saat membeli dua bulan yang lalu. Ini akan tampak lebih jelas dalam tabel 7.2 berikut.

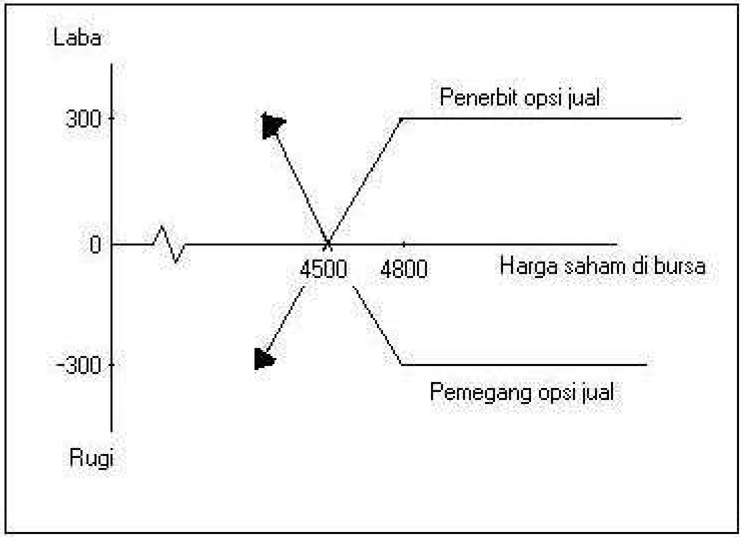
Tabel 7.2: Penghitungan laba/rugi opsi jual

Harga bursa (1)	Harga laksana (2)	Nilai opsi jual (3)	Premi opsi (4)	Nilai Laba/rugi (5)=(3) - (4)
4.200	4.800	600	300	300
4.300	4.800	500	300	200
4.400	4.800	400	300	100
4.500	4.800	300	300	0
4.600	4.800	200	300	-100
4.700	4.800	100	300	-200
4.800	4.800	0	300	-300
4.900	4.800	0	300	-300
5.000	4.800	0	300	-300
5.100	4.800	0	300	-300
5.200	4.800	0	300	-300
5.300	4.800	0	300	-300
5.400	4.800	0	300	-300

Dengan demikian, jika harga saham acuan di bursa lebih tinggi dari harga laksananya, akan lebih menguntungkan bagi pemegang opsi jual untuk menjual sahamnya langsung di bursa daripada melaksanakan opsi jualnya. Dalam keadaan seperti ini, nilai opsi tersebut sama dengan nol (*out of the money*). Sebaliknya, jika harga saham acuan di bursa lebih rendah dari harga laksananya, nilai opsi tersebut akan positif, sehingga opsi jual tersebut lebih menguntungkan jika dilaksanakan. Ini berarti nilai intrinsik opsi adalah menghasilkan (*in the money*). Seandainya opsi jual mempunyai harga laksana yang sama dengan harga saham acuan di bursa, maka opsi dikatakan memiliki nilai intrinsik yang netral atau *at the money*.

Tabel 7.2 memberikan informasi dengan jelas bahwa kerugian maksimum pemodal yang mempunyai opsi jual hanyalah sebesar harga premi opsi, sementara potensi keuntungan yang bisa didapat adalah tak terbatas. Sifat ini seperti sifat pada opsi beli yang sudah disinggung sebelumnya. Informasi ini dapat juga dibaca dalam gambar 7.2.

Dari kedua bentuk opsi beli dan opsi jual di atas, premi opsi menjadi hak penjual/penerbit opsi dan tidak tergantung terhadap keputusan apa yang diambil oleh pemegang opsi. Kemudian, jika pemegang opsi beli ingin melaksanakan haknya, maka ia hanya membayar sebesar harga laksana yang telah disepakati dan akan menerima sejumlah saham acuan. Begitu juga dengan opsi jual, jika pemegang opsi jual akan melaksanakan haknya, maka ia harus menyerahkan sejumlah saham acuan dan menerima pembayaran dengan harga laksana yang telah disepakati. Apabila pemegang opsi memilih untuk tidak melaksanakan haknya hingga lewat jatuh tempo, terlepas dari berapapun harga saham acuan di bursa saat itu, maka opsi tersebut kadaluarsa dengan sendirinya.



Gambar 7.2: Laba/Rugi dari Opsi Jual Pada Saat jatuh Tempo

7.4 Pentingnya Perdagangan Opsi

Pertama, beberapa pemodal melakukan perdagangan opsi untuk tujuan spekulasi terhadap perubahan harga saham atau surat berharga acuan. Pada umumnya harga opsi beli maupun opsi jual adalah lebih rendah daripada harga saham itu sendiri, dengan demikian hanya diperlukan sejumlah uang yang lebih sedikit untuk melakukan perdagangan opsi beli dan opsi jual. Selain itu, harga opsi relatif lebih berfluktuatif jika dibandingkan dengan harga saham itu sendiri, dengan demikian memungkinkan pemodal untuk memperoleh keuntungan lebih besar melalui investasi pada opsi.

Kedua, lembaga-lembaga investasi seperti reksa dana dapat menggunakan opsi sebagai alat untuk mempertahankan portofolio investasi mereka. Dengan perdagangan opsi memungkinkan untuk disesuaikannya risiko dan tingkat keuntungan untuk keseluruhan investasi. Apalagi komisi pialang untuk perdagangan opsi relatif jauh lebih rendah dibanding komisi untuk transaksi saham.

Ketiga, dalam pembelian opsi, besarnya kerugian maksimal adalah sebesar harga opsi sehingga secara tidak langsung pemodal telah membatasi risiko investasi. Pembatasan risiko tersebut tidak diikuti dengan penurunan tingkat keuntungan secara proporsional. Pemodal tetap memiliki kesempatan untuk memperoleh tingkat keuntungan yang tak terbatas. Dengan demikian, munculnya opsi sebagai salah satu kesempatan investasi telah memungkinkan pemodal untuk mengubah pola distribusi keuntungan portofolionya.

7.5 Faktor-faktor yang Mempengaruhi Harga Opsi

Sebagaimana telah disinggung dalam penakrifan tentang opsi, di dalam kontrak opsi terdapat kesepakatan tentang saham acuan, harga laksana dan tanggal jatuh tempo. Dalam transaksi opsi, ketiga hal ini mempunyai andil besar baik bagi pembeli atau penjual opsi untuk menentukan besarnya harga opsi yang akan diperdagangkan.

Secara umum, faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi dapat diringkas menjadi 3 kelompok besar. Kelompok pertama terdiri dari peubah yang berhubungan dengan harga saham acuan, yakni harga saat ini, kemeruapan (volatilitas, *volatility*) dan dividen kasnya. Kelompok kedua terdiri dari peubah yang berhubungan dengan kontrak opsi itu sendiri yaitu harga laksana dan jangka waktu jatuh temponya. Kelompok ketiga adalah peubah suku bunga bebas risiko (*risk-free interest rate*).

Harga saham acuan merupakan penentu harga opsi yang paling penting. Hal ini disebabkan jika harga saham adalah jauh di atas atau jauh di bawah harga laksananya, maka faktor yang lain menjadi tidak begitu penting. Pengaruh ini akan tampak semakin jelas pada saat tanggal jatuh temponya. Pada saat itu pemegang opsi berhak untuk melaksanakan atau mengabaikan opsinya. Pada saat jatuh tempo ini keputusan pemegang opsi hanya bergantung pada harga saham acuan dan harga laksana saja, sebab nilai opsi pada saat itu hanya ditentukan oleh dua faktor tersebut, sedangkan faktor lainnya tidak berarti sama sekali.

Harga opsi akan berubah seiring dengan perubahan harga saham acuan. Untuk opsi beli, peningkatan harga saham acuan akan menyebabkan peningkatan harga opsi karena nilai intrinsik juga meningkat. Hal yang berlawanan berlaku bagi opsi jual, peningkatan harga saham acuan akan menyebabkan penurunan harga opsi jual.

Faktor kedua adalah harga laksana yang bersifat tetap sepanjang usia opsi dan mempengaruhi antisipasi pembayaran pada saat opsi jatuh tempo. Pada opsi beli, pemegang opsi berharap harga saham acuan akan turun pada saat jatuh tempo sehingga jika harga laksana yang disepakati adalah lebih rendah daripada harga saham acuan saat ini, maka harga opsi beli semakin tinggi. Sedangkan pada opsi jual dimana pemegangnya berharap harga laksana pada saat jatuh tempo nanti masih lebih tinggi dibanding harga saham acuan saat itu, maka semakin tinggi harga laksana, semakin tinggi harga opsi.

Faktor berikutnya adalah kemeruapan yang menunjukkan fluktuasi pergerakan harga saham acuan. Semakin tinggi kemeruapan saham acuan, maka semakin besar kemungkinan harga saham bergerak ke arah yang diinginkan oleh pemegang opsi sehingga peluang untuk memperoleh harga yang lebih tinggi atau lebih rendah pada saat opsi jatuh tempo juga akan meningkat. Jadi, kemeruapan yang tinggi dengan sendirinya meningkatkan harga opsi karena semakin besar risiko bagi penjual opsi. Sebaliknya, jika harga saham relatif stabil (kemeruapan rendah), maka harga opsi cenderung rendah. Hal ini berlaku baik untuk opsi jual maupun opsi beli. Penjelasan terhadap hal ini sangat sederhana. Misalnya, pemegang opsi beli mengharapkan harga laksana saham acuan pada saat jatuh tempo kelak bisa lebih rendah dari harga bursa. Jika kemeruapan saham acuan sangat tinggi, maka harapan pemegang opsi beli mempunyai peluang besar untuk terjadi.

Faktor keempat, jangka waktu jatuh tempo menunjukkan bahwa semakin lama waktu yang tersisa, semakin besar tinggi harga opsi, baik opsi jual maupun opsi beli. Karena, bagi pemegang opsi beli mempunyai waktu tunggu yang cukup untuk melaksanakan opsinya dan berharap harga saham akan meningkat terus melebihi harga laksana. Begitu pula dengan pemegang opsi jual, semakin lama waktu yang tersisa hingga tanggal jatuh tempo, berarti memberikan keleluasaan yang cukup untuk melaksanakan opsinya dan berharap harga saham terus menurun. Sebaliknya, semakin pendek waktu yang tersisa hingga jatuh tempo, maka semakin rendah harga opsi tersebut.

Faktor kelima yaitu suku bunga bebas risiko. Faktor ini mudah dijelaskan dengan cara mengaitkannya dengan harga laksana dan jatuh tempo opsi. Jika jatuh tempo opsi adalah 6 bulan dari sekarang, maka harga laksana baru akan diterima oleh penerbit opsi beli 6 bulan lagi, padahal jumlah itu disepakati sekarang. Dalam konsep nilai waktu dari uang, untuk jumlah uang yang sama maka menerima uang sekarang jauh lebih disukai karena nilainya lebih tinggi daripada besok. Kenaikan suku bunga bebas risiko pada gilirannya akan menurunkan nilai tunai atau nilai sekarang (*present value*) dari harga laksana. Bagi pemegang opsi beli, ini berarti penurunan nilai jumlah yang harus dibayar jika opsi dilaksanakan atau bagi penerbit opsi beli, ini berarti nilai jumlah uang yang akan diterima saat opsi dilaksanakan menjadi berkurang. Jadi ada kecenderungan bahwa meningkatnya suku bunga bebas risiko akan meningkatkan harga opsi beli. Demikian pula pada opsi jual. Bagi pemegang opsi jual, kenaikan suku bunga bebas risiko berarti penurunan jumlah yang akan diterima jika opsi dilaksanakan. Sehingga ada kecenderungan bahwa naiknya suku bunga bebas risiko akan menurunkan harga opsi jual.

Faktor terakhir adalah dividen kas dari saham acuan. Dividen hanya akan mempengaruhi harga opsi bila selama berlakunya opsi saham acuan memberikan dividen kepada pemegang saham sehingga jika saham yang bersangkutan tidak memberikan dividen maka harga opsi hanya ditentukan oleh kelima faktor di atas. Dividen kas bisa dipandang sebagai likuidasi sebagian dari perusahaan pada tanggal pasca pembayaran dividen. Jadi dividen kas akan mengurangi harga saham sebesar jumlah dividen kas yang dibagikan sehingga akan menurunkan harga opsi beli dan meningkatkan harga opsi jual.

Sebagai contoh harga saham Telkom diandaikan relatif stabil yaitu sebesar Rp 5.000 per lembar saham dengan dividen per lembar saham adalah sebesar Rp 800 per tahun dan dibayarkan dua kali dalam satu tahun. Untuk saham seperti ini, calon pembeli opsi beli akan memperhitungkan bahwa enam bulan yang akan datang saham tersebut akan membayarkan dividen sebesar Rp 400. Jika opsi beli ditawarkan pada harga saham Rp 5.000 tujuh bulan lagi, maka bagi calon pembeli opsi beli harga tersebut seharusnya berkurang Rp 400, karena harga saham relatif stabil sehingga besar kemungkinan harga saham tidak akan naik setelah pembayaran dividen, padahal jika ia jadi memegang opsi beli ia tidak akan menerima pembayaran dividen.

8 — Hipotesis Pasar Efisien

Dalam bagian yang lalu telah sedikit disinggung bahwa kata efisien dalam hipotesis pasar efisien (HPE) mengacu pada efisien secara informasi. Sehingga dalam pengertian ini pasar yang efisien adalah suatu pasar dimana harga mencerminkan semua informasi yang diketahui (*known information*). Dengan kata lain, sebuah pasar yang efisien adalah pasar dimana harga surat berharga saat ini memberikan perkiraan (estimasi) terbaik tentang nilainya yang sebenarnya. Oleh karenanya, dalam pasar yang efisien tidak ada istilah *free lunch* (makan siang gratis) atau *expensive dinner* (makan malam yang mahal). Suatu pasar dapat efisien karena peserta pasar berusaha secara terus-menerus untuk memperoleh keuntungan abnormal (*abnormal return*) atau *excess return*, yaitu keuntungan yang melebihi harapan yang semestinya (sesuai dengan tingkat risiko suatu aset), sehingga persaingan ini pada akhirnya mengantarkan pada sebuah situasi dimana harga surat berharga telah mencerminkan baik informasi yang berdasarkan peristiwa yang sudah terjadi maupun harapan pasar tentang harga dimasa datang.

Dalam pasar modal yang efisien semua analis menerima dan mengevaluasi informasi baru yang berkaitan dengan setiap saham pada waktu yang hampir sama. Dengan demikian maka harga saham akan menyesuaikan dengan segera sebagai reaksi adanya informasi baru tersebut. Oleh karena itu secara umum hampir tidak mungkin untuk mendapatkan saham perusahaan besar yang menawarkan keuntungan abnormal.

Ada beberapa syarat kondisi yang harus dipenuhi agar suatu pasar dikatakan efisien secara informasi (Rodoni dan Yong, 2002; Sartono, 1996) yaitu:

1. Informasi harus dapat diperoleh tanpa biaya dan tersedia bagi semua partisipan pasar modal pada saat yang sama.
2. Informasi tersebut adalah dalam bentuk acak dan tidak bergantung satu sama lain.
3. Pemodal-pemodal bertindak cepat dan tepat terhadap informasi baru.
4. Tidak ada biaya transaksi, pajak, dan biaya-biaya yang lain.
5. Harga saham harus bebas dalam bergerak turun atau naik. Tidak ada seorangpun yang dapat mempengaruhi pergerakan harga saham.
6. Tidak ada monopoli dalam pasar. Ini berarti bahwa pemodal-pemodal bebas untuk masuk atau keluar pasar.
7. Semua partisipan pasar modal bersikap rasional yaitu

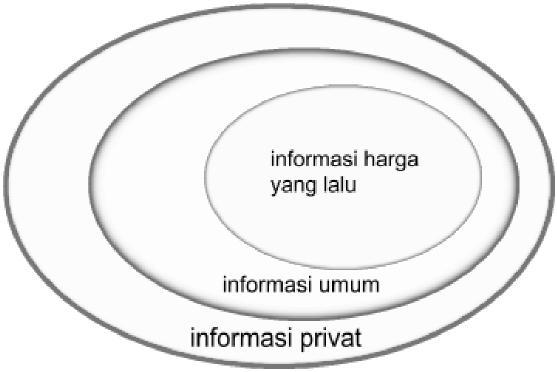
selalu ingin memaksimumkan harapan utilitas (*expected utility*).

8. Ada syarat yang diberikan kepada perusahaan dimana publik bisa mengakses informasi tentang perusahaan.

Jika sekiranya syarat-syarat tersebut *tidak terpenuhi* maka pasar tersebut dianggap *tidak efisien.*

Dalam kenyataannya beberapa persyaratan di atas sulit untuk dipenuhi karena diperlukan biaya untuk memperoleh informasi, beberapa partisipan memperoleh informasi pada saat yang berbeda, terdapat pajak dan biaya transaksi atau komisi pialang dan sebagainya. Karena kondisi semacam itu maka sangatlah perlu untuk membedakan antara pasar yang secara informasional efisien sempurna (*perfectly informationally efficient*) dengan pasar yang informasional secara ekonomikal (*economically informationally effocient*) (Sartono, 1996, hlm. xxi). Dalam *pasar efisien sempurna*, dimana persyaratan tersebut dipenuhi, harga saham selalu mencerminkan informasi yang dipublikasikan (*all published information*), harga saham akan menyesuaikan dengan setiap informasi baru secara spontan dan keuntungan abnormal hanya merupakan keberuntungan saja. Sementara itu dalam *pasar efisien ekonomikal*, harga saham mungkin tidak segera menyesuaikan dengan adanya informasi baru, tetapi keuntungan abnormal juga tidak dapat diperoleh setelah informasi dan biaya transaksi dibayar.

Pada prinsipnya, titik tekan hipotesis pasar efisien bukanlah pada gagasan apakah pasar itu efisien sepenuhnya atau tidak, tetapi menitikberatkan sejauh mana tingkat keefisienan pasar. Salah satu cara untuk mengukur keefisienan pasar adalah dengan melihat jenis informasi yang diserap ke dalam harga saham yaitu informasi tentang harga saham yang lalu, informasi umum atau yang dipublikasikan dan informasi privat atau belum dipublikasikan, dapat dilihat dalam gambar 8.1.



Gambar 8.1: Himpunan informasi untuk hipotesis pasar efisien

Oleh karena itu hipotesis pasar efisien membagi pasar modal dalam 3 tingkat keefisienan: pasar efisien bentuk lemah (*weak form efficiency*), pasar efisien bentuk setengah kuat (*semistrong form efficiency*) dan pasar efisien bentuk kuat (*strong form efficiency*).

Hipotesis pasar efisien bentuk lemah mengandaikan bahwa harga saham saat ini adalah mencerminkan perubahan harga saham pada waktu yang lalu (*past price movement*). Banyak kajian yang membuktikan kesahihan HPE bentuk lemah ini, seperti uji larian, uji simulasi, uji filter, uji distribusi normal, dan analisis spektral (Rodoni dan Yong, 2002, hlm. 66-76). Sartono (1996) menyarankan dua pengujian empiris dapat dilakukan untuk membuktikan kesahihannya yaitu pengujian korelasi perubahan selama beberapa waktu dan pengujian tentang profitabilitas berbagai pedoman teknis perdagangan atau analisis teknikal (*technical trading rules*). Para analis teknikal percaya bahwa pola harga masa lalu dapat digunakan untuk meramalkan harga dimasa mendatang. Andaian HPE bentuk lemah menolak kepercayaan ini sebab harga sekarang sudah mencerminkan pola harga masa lalu. Ini bisa diartikan bahwa harga saham yang lalu tidak mengandung arti apa-apa. Pola harga-harga yang lalu tidak berguna untuk meramalkan pergerakan harga dimasa mendatang.

HPE menyatakan bahwa harga hanya berubah sebagai reaksi atas adanya informasi baru dan karena informasi tersebut dapat berpengaruh positif atau negatif terhadap harga saham, maka perubahan harga saham harian dapat diharapkan akan mengikuti pola yang acak. Oleh karena itu banyak kajian telah dilakukan untuk menguji atau mengukur korelasi hasil keuntungan surat berharga selama beberapa periode.

Ada satu hal yang penting disini, jika harga saham mengikuti pola yang acak maka pola keuntungan/hasil pengembalian saham tidak akan konsisten. Kajian lain telah menunjukkan bahwa analisis teknikal tidak memberikan hasil pengembalian yang mencengangkan dibandingkan strategi yang sederhana. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa terdapat bukti yang kuat bahwa ada analis pasar yang berhasil secara sensasional dengan menggunakan data tren masa lalu untuk memprediksi kenaikan atau penurunan harga saham di masa datang, tetapi kesalahan yang spektakuler juga bisa terjadi dengan cara semacam ini. Dengan kata lain tidak mungkin mendapatkan keuntungan abnormal secara konsisten hanya dengan memperhatikan harga saham masa lalu.

Hipotesis kedua adalah pasar efisien bentuk setengah kuat, dimana harga saham dalam bentuk ini mencerminkan perubahan harga saham masa lalu dan informasi lain yang telah dipublikasikan (*other publicly available information*). Jika ini terjadi maka tidak ada manfaatnya menggunakan data laporan keuangan tahunan untuk memprediksi harga saham, karena informasi ini telah tercermin dalam harga saham saat ini sebelum kita bereaksi. Dalam pasar yang efisien sempurna maka harga saham akan mencerminkan semua informasi secara instant. Sebagai contoh satu perusahaan komputer mengumumkan penemuan baru dibidang microchip yang lebih sempurna dan dapat diproduksi dengan biaya yang lebih murah dari microchip saat ini, informasi ini dengan segera mengakibatkan harga saham akan naik. Sudah banyak kajian dilakukan untuk menguji pengaruh satu informasi penting terhadap harga saham yang sering disebut dengan *event studies*.

Kajian-kajian ini telah menganalisis misalnya pengaruh pemecahan saham (*stock split*), kenaikan pembayaran dividen, kenaikan laba perusahaan, merger, investasi baru, dan emisi saham baru. Bentuk pengujian yang lain terhadap pasar efisien bentuk setengah kuat adalah menguji apakah analis dan manajer portofolio dapat memperoleh keuntungan abnormal. Dalam pasar yang efisien sempurna tak seorangpun dapat memperoleh keuntungan abnormal secara konsisten (*no one will be able to consistently beat the market*). Beberapa kajian telah dilakukan untuk menguji bentuk kedua ini seperti yang dilakukan oleh Michael Jensen (Sartono, 1996, hlm. xxiii). Terdapat banyak bukti kuat yang mendukung konsep bentuk setengah kuat. Analis dan manajer portofolio memiliki akses hanya pada informasi yang dipublikasikan. Ada yang memperoleh keuntungan abnormal dan ada pula yang tidak, sehingga secara umum para analis dan manajer portofolio tidak mampu memperoleh keuntungan abnormal secara konsisten. Penelitian Ball dan Brown (Weston dan Copeland, 1995, hlm. 109-110; Rodoni dan Yong, 2002, hlm. 80) menunjukkan bahwa laporan pendapatan tahunan tidak berguna lagi untuk memperoleh keuntungan abnormal. Ini merupakan bukti bahwa HPE bentuk setengah kuat adalah sahih.

Terakhir adalah hipotesis pasar efisien bentuk kuat. Dalam pasar bentuk ini harga saham mencerminkan semua informasi, baik yang dipublikasikan maupun tidak. Jika ini terjadi maka *insider trading* (para manajer, pemegang saham utama) sekalipun tidak mungkin memperoleh keuntungan abnormal dengan informasi yang dimiliki. Namun demikian boleh dikatakan tidak ada bentuk efisien sempurna karena banyak *insider trading* yang dalam kenyataannya memperoleh keuntungan abnormal dengan menggunakan informasi yang belum dipublikasikan seperti misalnya adanya penawaran *take over* dari perusahaan lain, kegagalan program *research and development* dan adanya rencana merger dengan perusahaan lain.

HPE memiliki implikasi yang sangat penting baik bagi pemodal maupun manajer. Bagi pemodal konsep ini menyarankan bahwa strategi yang optimal adalah mencakup pemilihan tingkat risiko yang tepat, penciptaan portofolio yang sesuai dengan tingkat risiko yang diinginkan dan minimisasi biaya transaksi. Sedangkan bagi manajer, konsep ini menyarankan bahwa nilai perusahaan tidak ditentukan oleh transaksi pasar keuangan, karena jika transaksi di pasar keuangan memiliki *net present value* (NPV) sama dengan nol (Kamaruddin, 1996, hlm. 202), maka nilai perusahaan hanya dapat ditingkatkan melalui transaksi pasar barang. Sebagai contoh IBM dan Apple Computer menjadi pemimpin perusahaan komputer karena mereka unggul dibidang desain, manufaktur, pemasaran serta servis dan tidak semata-mata ditentukan oleh keputusan keuangan.

Implikasi yang lain adalah adanya proses penyesuaian harga saham sebagai akibat masuknya informasi baru. Apabila publik mengetahui suatu informasi baru, maka hal ini akan mempengaruhi permintaan dan penawaran saham. Selanjutnya pergeseran ini akan mempengaruhi keseimbangan harga saham. Harga saham akan berfluktuasi sebelum mencapai keseimbangan baru yang pada gilirannya juga berimplikasi terhadap analisis saham. Analis harus mempertimbangkan dampak munculnya informasi baru yang berkaitan dengan surat-surat berharga di pasar. Selain itu, fenomena di atas juga memberikan suatu pertanda kepada pemodal untuk memanfaatkan kesempatan berinvestasi dalam opsi. Dengan berinvestasi dalam opsi beli, maka pemodal dapat membatasi besarnya kerugian investasi, tetapi memiliki kesempatan untuk memperoleh tingkat keuntungan yang tidak terbatas.

9 — Perumusan Model Harga Opsi

9.1 Hipotesis Pasar Efisien

Hipotesis pasar efisien merupakan topik kajian dalam teori keuangan yang banyak diperdebatkan sejak digulirkan oleh Fama (1965). Silang pendapat ini dapat dilacak dalam banyak kepustakaan.[1] Wilayah perdebatan pada dasarnya hanya berkisar seputar proses stokastik apa yang cocok untuk menerangkan hipotesis pasar efisien.

Secara umum, persaingan dalam pasar modal akan menyebabkan adanya pengaruh informasi baru terhadap nilai intrinsik saham yang tercermin secara seketika (*instantane-*

[1]Lihat Fama (1969), Hagerman dan Richmond (1973), LeRoy (1989), Rutterford (1993), Weston dan Copeland (1995), Dimson dan Mussavian (2000), Beechey *et. al.* (2000), Mauboussin (2002), Rodoni dan Yong (2002), Damodaran (2005) dan Clarke *et.al.* (2005).

uously) pada harga sekarang. Efisiensi pasar terjadi jika harga-harga mencerminkan seluruh informasi yang tersedia. Mengingat bahwa informasi baru bersifat tidak pasti, maka pengaturan seketika mempunyai 2 akibat. Pertama, harga sekarang akan sering berubah selaras dengan perubahan informasi. Kedua, nilai-nilai intrinsik yang berturutan akan menjadi saling bebas. Ini menunjukkan perubahan harga saham secara berturutan juga saling bebas. Sebuah pasar dengan ciri demikian merupakan pasar jalan acak.

Jalan acak (*random walk*) menyatakan bahwa tidak ada perbedaan antara distribusi hasil pengembalian bersyarat (conditional) dan tidak bersyarat (unconditional) pada struktur informasi tertentu. Jalan acak adalah kondisi yang jauh lebih kuat daripada *fair game* atau martinggil untuk hipotesis pasar efisien. Perbedaan statistik antara *fair game* dan jalan acak adalah bahwa hipotesis jalan acak mensyaratkan bahwa seluruh penarikan diambil secara independen dari distribusi yang sama, sedangkan *fair game* tidak.

Seperti yang sudah dipahami dalam bab terdahulu pada saat membicarakan jalan acak, dalam konteks ini, jalan acak dipahami sebagai perubahan harga yang berturutan yang saling bebas satu sama lain. Dengan kata lain, perubahan harga besok tidak dapat diramalkan dengan melihat perubahan harga sekarang. Andaikan S adalah harga saham, maka $S_{t+1} - S_t$ adalah saling bebas terhadap $S_t - S_{t-1}$. Tidak ada tren dalam perubahan harga. Dengan cara yang sama seperti dalam jalan acak, maka penanda terbaik untuk harga saham besok adalah harga sekarang.

Fama (1965, hlm. 77) menyatakan bahwa uji korelasi data deret waktu yang dilakukan Cootner,Kendall, dan Moore dalam penelitian yang dilakukan masing-masing secara terpisah menghasilkan perhitungan perubahan harga berturutan yang sangat mendekati 0. Sebagaimana yang sudah dipahami dalam bab 2, saat koefisien korelasi bernilai 0 menunjukkan bahwa peubah-peubah yang bersangkutan tidak memiliki korelasi (tidak ada hubungan). Dengan kata lain, peubah-peubah tersebut saling bebas. Pada tahun yang sama dalam jurnal berbeda, Fama (1965) juga menelisik dengan hasil yang juga mendukung model jalan acak ini.

Dengan demikian,

$$\mathcal{P}(S_{t+1}|S_1, S_2, \ldots, S_t) = \mathcal{P}(S_{t+1}|S_t) \tag{9.1}$$

Persamaan di atas juga merupakan sifat dari proses Markov. Selain itu, karena jalan acak juga memiliki sifat martinggil, maka dalam pasar yang efisien juga berlaku bahwa nilai harap harga mendatang hanya bergantung harga sekarang,

$$E(S_{t+1}|S_t, S_{t-1}, S_{t-2}, \ldots, S_1) = E(S_{t+1}|S_t) \tag{9.2}$$

9.2 Karakteristik Harga Saham

Model perilaku

Untuk mendapatkan gagasan bagaimana memodelkan perilaku harga saham, di sini akan digunakan kias (analogi) deposito bank yang memberikan suku bunga bebas risiko. Andaikan bahwa $S(0)$ adalah nilai sekarang dari uang sebanyak $S(t)$ pada tahun yang akan datang. Bila suku bunga per tahun adalah r, maka bunga yang dapat diperoleh dari $S(0)$ adalah $r\ S(0)$. Setelah masa penyimpanan 1 tahun, maka jumlah uang akan menjadi

$$S(0) + S(0)\ r = S(0)\ (1 + r).$$

Karena $S(t)$ adalah nilai uang $S(0)$ pada t tahun mendatang, maka

$$S(1) = S(0)\ \ (1 + r)\,. \tag{9.3}$$

Setelah 2 tahun masa penyimpanan, jumlah uang akan menjadi

$$S(2) = S(1) + r\ S(1) = S(1)\ \ (1 + r) = S(0)\ \ (1 + r)^2\,. \tag{9.4}$$

Dengan cara yang sama, jumlah uang setelah 3 tahun masa penyimpanan akan menjadi

$$S(3) = S(0)\ \ (1 + r)^3\,.$$

Pada akhirnya, hasil dari perampatan persamaan suku bunga ini setelah masa penyimpanan t tahun ialah

$$S(t) = S(0)\,(1 + r)^t\,. \tag{9.5}$$

Ada banyak pilihan tenggang waktu untuk melakukan penghitungan suku bunga. Suku bunga dapat dihitung harian, pekanan, bulanan, kuartalan (4 bulanan), semesteran (6 bulanan) atau 1 tahun sekali. Dalam praktik sehari-hari, biasanya penghitungan suku bunga dilakukan lebih dari 1 kali dalam 1 periode atau 1 tahun. Jika panjang periode adalah t, maka setiap kali bank melakukan penghitungan suku bunga, besar suku bunga yang diterima adalah $\frac{r}{m}$, dengan m menyatakan kekerapan penghitungan bunga dalam 1 periode. Maka, nilai kemudian (*future value*) $S(t)$, yaitu

$$S(t) = S(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} \tag{9.6}$$

Bila kekerapan perhitungan bunga mendekati tak hingga maka dapat dilakukan limit terhadap persamaan di atas,

$$\begin{aligned} S(t) &= \lim_{m\to\infty} S(0)\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{tm} \\ &= S(0)\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{rt} \\ &= S(0)\left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{rt} \\ &= S(0)\, e^{rt}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan bunga majemuk berlanjut (*continuous compounding interest*), yaitu bunga majemuk yang memiliki periode tak terhingga dalam setahun atau bunga mejemuk yang dibungakan sesering mungkin.

Suku bunga deposito ini merupakan suku bunga bebas risiko karena setiap pemodal yang menanamkan uangnya ke dalam deposito tidak akan menanggung risiko. Artinya, bisa dipastikan bahwa pemodal akan selalu menerima pendapatan atau pengembalian sebesar bunga yang berlaku dalam setiap periode. Ini merupakan petunjuk bahwa proses bunga majemuk berlanjut merupakan deterministik (pengertian ini dapat dilihat kembali di bab 2 §3).

Dalam konteks saham, jika seorang pemodal membeli saham, pemodal tersebut berharap akan memperoleh dividen dari perusahaan dan atau laba modal bila saham tersebut dijual. Besar kecilnya dividen sangat bergantung pada besar kecilnya laba perusahaan dan *dividen payout ratio* (bagian laba perusahaan yang akan dibagikan dalam bentuk dividen). Sedangkan ancaman kerugian yang mungkin diderita pemodal adalah rugi modal apabila ternyata harga jual saham lebih rendah dibanding harga belinya. Ini merupakan petunjuk bahwa ada ketidakpastian pengembalian dalam investasi saham. Ketidakpastian ini menyebabkan pemodal menginginkan adanya *tingkat keuntungan yang cukup* sebagai kompensasi dari ketidakpastian tersebut. Kompensasi ini dikenal sebagai tingkat pengembalian yang diharapkan (disyaratkan). Dengan demikian, tingkat pengembalian ini merupakan laju pertumbuhan dalam investasi saham.

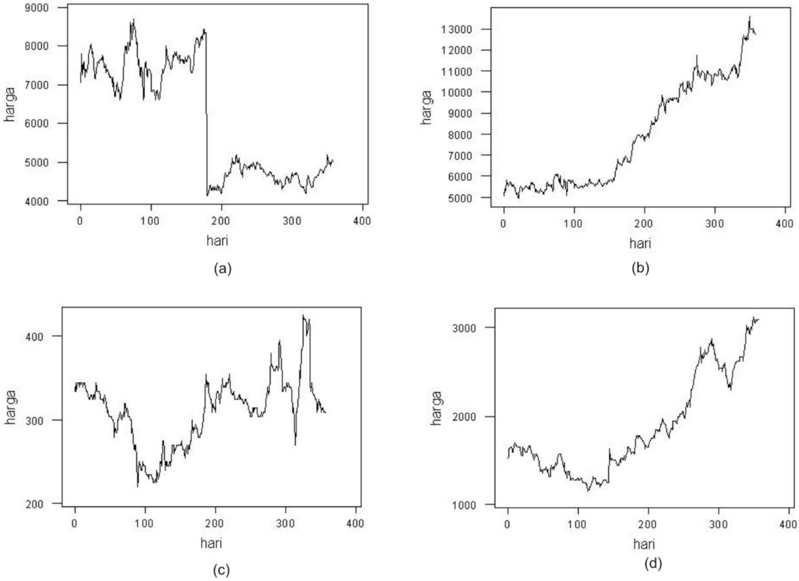
Laju pertumbuhan yang disyaratkan ini dapat dipandang seperti bunga dalam deposito. Oleh karenanya, jika S merupakan harga saham, maka laju pertumbuhan μ terhadap S adalah μS. Dengan demikian, dalam rentang waktu sempit Δt, laju pertumbuhan dari S adalah $\mu S \Delta t$. Jika tidak ada ancaman kerugian, maka

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(0) dt \\ \frac{dS(t)}{S(0)} &= \mu dt \end{aligned} \tag{9.8}$$

sehingga

$$S(t) = S(0)e^{\mu t} \tag{9.9}$$

dengan $S(0)$ merupakan harga saham pada saat awal. Persamaan ini menunjukkan bahwa ketika tidak ada ancaman kerugian, investasi dalam saham akan tumbuh seperti investasi dalam deposito. Dengan kata lain, harga saham identik dengan bunga deposito.

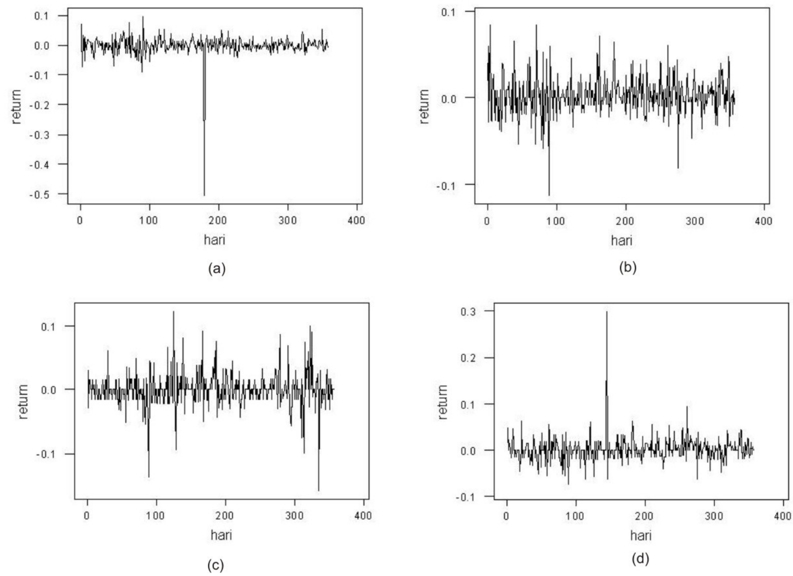


Gambar 9.1: Grafik pergerakan harga untuk beberapa saham periode Januari 2004 – Juni 2005: (a) saham Telkom; (b) saham Astra International; (c) saham Astra Graphia; dan (d) saham Astra Otoparts. Sumber data: Pusat Data Pasar Modal Fakultas Ekonomi UGM

Namun demikian, harga saham di pasar modal terbentuk melalui mekanisme permintaan dan penawaran. Adanya informasi-informasi baru yang hadir secara acak dan cepat seperti pembayaran dividen, laba perusahaan, penjualan saham baru atau pemecahan saham, akan menyebabkan harga saham naik turun. Pada gilirannya, hadirnya informasi-informasi tersebut menyebabkan harga saham memiliki fluktuasi pergerakan harga yang disebut kemeruapan (volatilitas). Dalam tinjauan hipotesis pasar efisien yang sudah dibahas di muka, pergerakan harga saham mengikuti proses stokastik. Sehingga, harga saham bukan hanya dapat digambarkan seperti deposito yang deterministik saja, namun juga sebagai aset yang lekat dengan gangguan fluktuasi stokastik. Karena itu, perubahan harga dS dalam rentang waktu sempit dt seharusnya terdiri dari 2 sumbangan, yaitu sumbangan deterministik dan sumbangan stokastik.

Sumbangan deterministik ditunjukkan oleh persamaan (9.9) yang juga sepadan dengan persamaan (9.7), hanya saja tetapan r diganti dengan tetapan μ yang menyatakan laju pertumbuhan.

Sumbangan kedua memodelkan perilaku stokastik dari pergerakan harga. Disini akan ditinjau bahwa dalam pandangan seorang pemodal, hasil pengembalian pada saat harga saham Rp 3.000 atau Rp 5.000 adalah sama-sama tidak pasti. Ketidakpastian hasil pengembalian (return) ini dapat dilihat dalam gambar 9.2. Oleh karena itu, perlu adanya parameter yang menyatakan ketidakpastian ini. Parameter ini bisa dipandang sebagai ukuran seberapa besar terjadinya perubahan hasil pengembalian yang berakibat langsung pada perilaku harga saham. Maka, ketidakpastian hasil pengembalian sebenarnya merupakan variansi dari harga saham itu sendiri atau besarnya fluktuasi harga saham, dan dilambangkan dengan σ^2. Dengan demikian, $\sigma^2\Delta t$ merupakan variansi harga saham dalam waktu Δt, sehingga $\sigma^2 S^2\Delta t$ merupakan variansi harga saham S selama Δt. Karenanya, variansi seketika (instan) dari harga saham adalah $\sigma^2 S^2$.



Gambar 9.2: Grafik fluktuasi return untuk beberapa saham periode Januari 2004 – Juni 2005: (a) saham Telkom; (b) saham Astra International; (c) saham Astra Graphia; dan (d) saham Astra Otoparts. Sumber data: Pusat Data Pasar Modal Fakultas Ekonomi UGM

Argumen-argumen ini menunjukkan bahwa S dapat diwakili dengan proses Itô yang mempunyai laju pertumbuhan μS dan variansi seketika $\sigma^2 S^2$. Ini dapat ditulis sebagai

$$dS = \mu S(t)\, dt + \sigma S(t)\, dB, \qquad (S(0) > 0 \tag{9.10}$$

atau

$$\frac{dS}{S} = \mu \; dt + \sigma \; dB. \tag{9.11}$$

Model perilaku harga saham yang telah dibangun dalam persamaan di atas serupa dengan persamaan gerak Brown geometrik. Bentuk waktu tercacahnya adalah

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\delta t}. \tag{9.12}$$

Peubah ΔS merupakan perubahan harga saham S dalam rentang waktu sempit Δt, dan ϵ merupakan sampel acak dari distribusi normal baku, yakni distribusi normal dengan rerata 0 dan simpangan baku 1. Parameter μ merupakan harapan pengembalian (laju pertumbuhan) dari saham tiap satuan waktu dan parameter σ adalah kemeruapan (volatilitas) harga saham. Kedua parameter ini, yakni μ dan σ diandaikan tetap.

Ruas kiri dalam persamaan (9.12) merupakan hasil pengembalian sepadan yang diberikan oleh saham dalam rentang waktu sempit Δt. Suku $\mu \Delta t$ adalah nilai harap untuk pengembalian ini, sedangkan suku $\sigma \epsilon \sqrt{\delta t}$ adalah komponen stokastik untuk pengembalian. Variansi komponen stokastik adalah $\sigma^2 \Delta t$.

Persamaan (9.12) juga menunjukkan bahwa $\Delta S / S$ terdistribusi normal dengan rerata $\mu \Delta t$ dan simpangan baku $\sigma \sqrt{\Delta t}$. Dengan kata lain

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi \left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t} \right) \tag{9.13}$$

dengan $\phi(m, s)$ melambangkan distribusi normal dengan rerata m dan simpangan baku s.

Gerak Brown geometrik

Gerak Brown geometrik merupakan kejadian khusus dari proses Itô yang disajikan dalam persamaan dibawah ini

$$dX = a\,(X,t)\,dt + b\,(X,t)\,dB, \tag{9.14}$$

dimana dB merupakan proses Wiener atau gerak Brown serta a dan b merupakan fungsi terhadap X dan t. Peubah X mempunyai laju pertumbuhan a dan variansi b^2. Lemma Itô menunjukkan bahwa fungsi G dalam X dan t menjalani proses

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial X}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial X}b\ dB \tag{9.15}$$

dengan dB merupakan proses Wiener yang sama dalam persamaan sebelumnya. Karena itu G juga memenuhi proses Itô sehingga mempunyai laju pertumbuhan

$$\frac{\partial G}{\partial X}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial X^2}b^2 \tag{9.16}$$

dan variansi

$$\left(\frac{\partial G}{\partial X}\right)^2 b^2. \tag{9.17}$$

Lemma Itô ini menunjukkan bahwa persamaan (9.10) dapat dibangun seperti bentuk persamaan (9.15) dengan fungsi G dalam S dan t yang dapat ditunjukkan dalam persamaan berikut

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S\ dB. \tag{9.18}$$

Sementara itu, persamaan (9.11) secara jelas menyatakan bahwa peubah yang sesuai bukanlah perubahan absolut $dS = S(t + dt) - S(t)$, melainkan hasil pengembalian dS/S dalam rentang waktu dt. Dari sisi keuangan ini sangat wajar. Perubahan absolut dS =Rp 100 dalam waktu dt adalah jauh lebih bernilai meskipun untuk modal awal yang hanya senilai $S(t)$ =Rp 1.000 daripada modal awal senilai $S(t) = Rp10.000$ tetapi tidak mengalami perkembangan sedikitpun. Hasil pengembalian dS/S secara jelas menyatakan perbedaan ini. Hal ini dapat dirujuk dalam konsep nilai waktu dari uang (*time value of money*) yang secara sederhana menyatakan bahwa satu rupiah yang dipegang sekarang jauh lebih bernilai daripada satu rupiah yang dipegang dimasa datang, sebab satu rupiah dimasa sekarang dapat diinvestasikan dan memberikan hasil pengembalian.

Tafsir (interpretasi) dS/S sebagai peubah yang sesuai menyarankan bahwa persamaan (9.11) sebaiknya ditulis ulang dalam bentuk $\ln S(t)$. Dengan menyatakan

$$G = \ln S \tag{9.19}$$

akan menghasilkan

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \tag{9.20}$$

dan jika dimasukkan ke dalam persamaan (9.18) memberikan hasil akhir

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB. \tag{9.21}$$

Nilai μ dan σ merupakan tetapan sehingga G merupakan proses Wiener yang mempunyai laju pertumbuhan tetap $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ dan variansi tetap σ^2. Berdasarkan pembahasan pada anak bab sebelum ini, hal ini menandakan bahwa perubahan dalam G antara waktu sekarang t dan waktu kemudian T, terdistribusi normal dengan rerata

$$E\left(dG\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt \tag{9.22}$$

dan variansi

$$\operatorname{Var}\left(dG\right) = \sigma^2 dt. \tag{9.23}$$

Nilai G pada saat t adalah $\ln S$ dan nilainya pada saat T adalah $\ln S(T)$, dengan $S(T)$ merupakan harga saham pada saat T. Sehingga perubahannya selama rentang waktu $T - t$ ialah

$$\ln S(T) - \ln S.$$

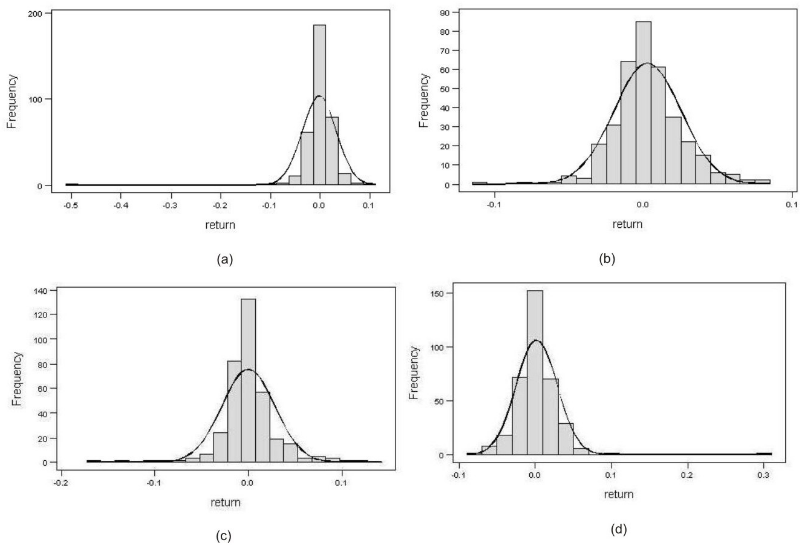
Perubahan ini serupa dengan persamaan (9.13) yaitu

$$\left(\ln S(T) - \ln S\right) \sim \phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(T - t\right), \sigma\sqrt{T - t}\right). \tag{9.24}$$

Sifat log-normal

Sebuah peubah mempunyai distribusi log-normal jika logaritma natural dari peubah terdistribusi normal. Persamaan (9.24) menunjukkan bahwa logaritma natural dari perubahan harga saham (return) mempunyai distribusi normal. Ini dapat ditunjukkan dalam gambar 9.3. Dengan demikian apabila return saham terdistribusi normal, maka harga saham mempunyai distribusi log-normal.

Andaian sifat distribusi log-normal untuk harga saham merupakan sifat yang baik. Sifat ini sesuai untuk harga saham, sebab seandainya harga saham diandaikan berdistribusi normal maka harga saham dapat bernilai negatif. Dengan memiliki distribusi log-normal, maka nilai harga saham dapat berapapun namun tetap dalam kisaran 0 sampai tak terhingga dan tidak negatif.



Gambar 9.3: Histogram data return dan kurva normal untuk beberapa saham periode Januari 2004 – Juni 2005: (a) saham Telkom; (b) saham Astra International; (c) saham Astra Graphia; dan (d) saham Astra Otoparts. Sumber data: Pusat Data Pasar Modal Fakultas Ekonomi UGM

9.3 Pencagaran Nilai

Gerak Brown geometrik yang menjadi model perilaku harga saham di atas menyuguhkan 2 parameter, μ dan σ. Parameter pertama menerangkan tingkat pengembalian yang diharapkan, sedangkan parameter kedua menjelaskan fluktuasi harga. Jika fluktuasi besar, saham akan sangat meruap (volatil, *volatile*) sehingga investasi menjadi sangat berisiko.

Risiko (*risk*) adalah tingkat kemungkinan terjadinya kerugian yang harus ditanggung dalam investasi. Dengan demikian, pengertian risiko digunakan dalam arti ketidakpastian dan dihubungkan dengan fluktuasi tingkat pengembalian. Misalnya, obligasi pemerintah sebesar Rp 18 juta yang menjamin pemegangnya akan memperoleh bunga sebesar Rp 200 ribu setelah 30 hari dikatakan tidak memiliki risiko karena tidak ada fluktuasi pengembalian. Sementara investasi sebesar Rp 18 juta dalam saham biasa suatu perusahaan, dimana para pemegang saham dengan periode yang sama akan memperoleh hasil berkisar antara Rp 0 - 400 ribu adalah sangat berisiko karena tingkat fluktuasi yang tinggi. Boleh jadi pemodal akan mendapat pengembalian Rp 400 ribu, tetapi sangat mungkin pula jika pemodal tidak mendapat apapun.

Andaian penting dalam pembicaraan risiko dan tingkat pengembalian yang diharapkan ini adalah setiap pemodal bersikap rasional dan tidak menyukai risiko (*risk averter*). Sikap tidak menyukai risiko ini tercermin dari sikap pemodal yang akan meminta tambahan keuntungan yang lebih besar untuk setiap kenaikan tingkat risiko yang dihadapi.

Dalam hal hubungan risiko dan surat berharga, ada 2 macam risiko yang melekat pada setiap surat berharga, yaitu risiko sistematik (*systematic risk*, ada juga yang menyebut *unique risk*) dan risiko tidak sistematik (*unsystematic risk*). Risiko sistematik adalah risiko yang terjadi karena faktor perubahan pasar secara keseluruhan, seperti misalnya perubahan tingkat suku bunga yang mengakibatkan meningkatnya tingkat keuntungan yang disyaratkan atas surat berharga secara keseluruhan, inflasi, resesi ekonomi, perubahan kebijakan ekonomi secara menyeluruh dan perubahan tingkat harapan pemodal terhadap perkembangan ekonomi. Risiko kedua, risiko tidak sistematik, yaitu risiko yang terjadi karena karakteristik perusahaan atau lembaga keuangan yang mengeluarkan surat berharga itu sendiri. Karakteristik itu misalnya mencakup kemampuan manajemen, kondisi dan lingkungan kerja serta kebijakan investasi. Oleh karenanya, risiko ini berbeda satu sama lain sehingga setiap surat berharga juga memiliki tingkat kepekaan yang berbeda terhadap setiap perubahan pasar. Sebagai contoh, kepekaan surat berharga yang dikeluarkan oleh perusahaan sektor agrokompleks akan berbeda dengan surat berharga yang dikeluarkan perusahaan sektor telekomunikasi.

Seorang pemodal yang hati-hati senantiasa ingin menghindari risiko dan melindungi investasinya dari kemungkinan kerugian. Untuk mencapai tujuan ini, pemodal dapat berinvestasi dengan tidak hanya pada satu surat berharga saja tetapi pada beberapa surat berharga yang berbeda sekaligus dalam satu portofolio.[2] Misal, pemodal memiliki portofolio yang terdiri dari saham perusahaan sektor agrokompleks dan perusahaan sektor telekomunikasi. Penanaman investasi pada berbagai macam surat berharga semacam ini disebut

[2]Portofolio merupakan kumpulan surat berharga

juga dengan diversifikasi (*diversification*, penganekaragaman). Gagasan dasar dari penganekaragaman adalah penurunan tingkat pengembalian salah satu surat berharga akan ditutup oleh tingkat pengembalian surat berharga yang lain. Hal ini juga dapat dibaca dalam ungkapan klasik, *don't put all your eggs in one basket* (jangan letakkan seluruh telurmu dalam keranjang).

Namun, cara penganekaragaman ini hanya mungkin untuk menyelesaikan risiko tak sistematik dan tidak bisa untuk mengatasi risiko sistematik sehingga cara ini masih menyisakan risiko sistematik yang diakibatkan oleh faktor pasar secara keseluruhan.

Untuk menanggulangi risiko sistematik ini, ada sebuah cara yang dikenal sebagai pencagaran nilai atau *hedging* (dapat juga diterjermahkan sebagai cegah risiko atau lindung nilai). Pencagaran nilai merupakan cara atau teknik untuk menghindari risiko yang timbul akibat adanya fluktuasi harga di pasar dalam kaitannya dengan transaksi jual beli komoditas, surat berharga, atau valuta. Misalnya, dalam perjanjian pinjam-meminjam dalam bentuk valuta asing diperjanjikan bahwa pembayaran kembali dilakukan dengan kurs yang disepakati. Apabila ternyata nilai kurs berubah pada saat hari pengembalian pinjaman, pembayaran tetap dilakukan dnegan menggunakan kurs yang telah diperjanjikan.

Dengan demikian, teknik pencagaran nilai ini memungkinkan seorang pemodal untuk menyusun sebuah portofolio yang bebas risiko secara sempurna. Pada umumnya instrumen keuangan yang dapat digunakan untuk pencagaran nilai adalah instrumen derivatif. Pada titik inilah opsi sebagai salah satu derivatif memainkan peran penting dalam manajemen investasi.

9.4 Batas-batas Harga Opsi

Dalam takrif opsi yang telah diberikan dalam bab 6, suatu opsi mengandung unsur-unsur pembentuk yaitu harga laksana K, waktu jatuh tempo pelaksanaan T, harga surat berharga acuan S dan harga opsi itu sendiri (premi) O. Selanjutnya, karena berdasarkan haknya opsi dibagi menjadi 2, yaitu opsi beli dan opsi jual, maka secara khusus harga opsi beli dilambangkan dengan C dan harga opsi jual dilambangkan dengan P.

Sebagaimana telah diterangkan juga dalam bab yang sama, opsi merupakan instrumen derivatif sehingga sangat bergantung pada surat berharga acuan. Maka harga opsi atas saham haruslah merupakan fungsi dari nilai sekarang S dan waktu t, dapat ditulis $O = O(S, t)$. Kemudian, harga opsi ini bergantung pada parameter-parameter K dan T. Pada waktu jatuh tempo T, harga opsi menjadi $O = O(S, T)$.

Sekarang, ditinjau suatu opsi merupakan opsi beli. Pada saat $S(T) < K$, pemegang opsi beli tidak akan melaksanakan opsinya karena bisa mendapatkan harga yang lebih murah di pasar. Karenanya, pada saat jatuh tempo harga dari opsi beli adalah

$$C(S, T) = 0. \tag{9.25}$$

Sebaliknya ketika $S(T) > K$, bagaimanapun lebih menguntungkan bagi pemegang opsi beli untuk melaksanakan opsinya. Dengan membayar sejumlah K, pemegang opsi akan menerima harga saham acuan $S(T)$ yang memberinya keuntungan sebesar $S(T)-K$ jika dibandingkan dengan membeli di pasar. Dengan kata lain, penulis opsi beli membutuhkan setidaknya $C(S,T) = S(T)-K$ karena harus membeli saham acuan seharga $S(T)$ di pasar dan hanya menerima pembayaran sejumlah K. Oleh karena itu, harga opsi yang wajar adalah

$$C(S,T) = S(T) - K. \tag{9.26}$$

Dengan melihat kejadian pada saat $S(T) < 0$ dimana $C(S,T) = 0$ dan $S(T) > K$ dimana $C(S,T) = S(T) - K$ secara bersama-sama, maka harga dari opsi beli pada saat jatuh tempo ($t = T$), disebut juga *payoff*, pasti memenuhi

$$C(S,T) = \max\left(S(T) - K, 0\right). \tag{9.27}$$

Sekarang akan ditinjau untuk opsi jual. Pemegang opsi jual hanya akan menggunakan haknya jika dipandang menguntungkan yaitu bila dapat menjual saham acuan dengan harga yang lebih mahal dibandingkan jika menjual saham acuan ke pasar. Hal ini akan terpenuhi apabila $K > S(T)$. Pada saat jatuh tempo ini pemegang opsi jual menerima keuntungan sebesar $K - S(T)$, sehingga harga opsi jual pada saat jatuh tempo adalah

$$P(S,T) = K - S(T). \tag{9.28}$$

Sebaliknya, apabila $K < S(T)$, maka dipastikan pemegang opsi jual lebih memilih untuk membiarkan opsinya kadaluarsa dan menjual saham acuan ke pasar. Pada saat jatuh tempo yang demikian, harga opsi jual adalah 0,

$$P(S,T) = 0. \tag{9.29}$$

Penjelasan ini menyimpulkan bahwa harga opsi jual pada saat jatuh tempo ($t = T$) adalah

$$P(S,T) = \max\left(K - S(T), 0\right). \tag{9.30}$$

Uraian tentang harga-harga batas dari opsi beli dan opsi jual di atas yang terangkum dalam persamaan (9.27) dan (9.30) pada akhirnya mengerucut pada sebuah pertanyaan, yaitu berapa harga opsi yang wajar atau adil ketika penandatanganan kontrak ($t < T$) dilangsungkan dimana pada saat itu penulis opsi memberikan hak kepada pemegang opsi untuk menjual atau membeli saham acuan dengan harga laksana K pada saat jatuh tempo ($t = T$).

9.5 Andaian-andaian

Untuk menyusun model tentang penentuan harga opsi sebagai jawaban atas pertanyaan di atas diperlukan adanya andaian-andaian. Andaian-andaian ini dimaksudkan untuk lebih menyederhanakan permasalahan sehingga model penentuan harga opsi mudah untuk dibangun.

Andaian 9.1. Pasar memenuhi hipotesis pasar efisien.

Ini mengimplikasikan bahwa semua informasi yang dibutuhkan tersedia dan tercermin pada harga sekarang. Informasi-informasi ini pada gilirannya akan 'menggempur' harga saham dari berbagai sektor. Gempuran informasi yang datang secara tidak pasti menyebabkan ada 'perilaku khusus' dalam pergerakan harga saham.

Andaian 9.2. Pergerakan harga saham mengikuti pola acak.

Andaian ini menafikan para analis teknikal yang percaya bahwa pergerakan harga saham mempunyai pola-pola tertentu sehigga bisa diramalkan perubahan yang bagaimana yang kira-kira akan terjadi mendatang. Andaian ini secara tidak langsung merupakan turunan dari andaian pertama.

Andaian 9.3. Tidak ada risiko kredit yang ada hanya risiko pasar.

Risiko kredit merupakan risiko yang timbul dalam hal pihak debitur gagal memenuhi kewajiban untuk membayar angsuran pokok ataupun bunga sebagaimana telah disepakati dalam perjanjian kredit. Di sini diandaikan bahwa emiten[3] tidak memiliki risiko kredit sehingga harga opsi dan saham hanya dipengaruhi oleh fluktuasi pasar dari surat berharga acuan.

Andaian 9.4. Pasar bebas dari arbitrasi.[4]

Arbitrasi merupakan pemerolehan keuntungan dengan pembelian surat berharga, mata uang, atau komoditas pada harga yang rendah di suatu pasar dan seketika itu juga menjual pada pasar yang lain dengan harga yang lebih tinggi. Arbitrasi juga dikenal sebagai *free lunch* dalam jargon keuangan.

[3] Perusahaan yang mengeluarkan saham.

[4] Istilah arbitrasi (*arbitrage*) sama sekali berbeda dengan arbitrase (*arbitration*). Arbitrase mempunyai makna penyelesaian perselisihan di luar pengadilan oleh pihak ketiga sebagai penengah (arbiter/arbitrator) yang ditunjuk oleh pihak yang berselisih.

Andaian 9.5. Suku bunga bebas risiko r dan kemeruapan (volatilitas) σ tetap dan dapat diketahui.

Suku bunga bebas risiko selalu berubah terhadap waktu. Demikian pula volatilitas sebagai besaran yang menerangkan fluktuasi harga saham juga selalu berubah terhadap waktu. Dalam membangun model penentuan harga opsi ini, keduanya diandaikan tetap sehingga bisa lebih menyederhanakan masalah.

Andaian 9.6. Opsi hanya dapat dilaksanakan pada saat jatuh tempo atau opsi Eropa.

Sebagaimana sudah disinggung, bahwa berdasarkan hak pelaksanaannya, opsi dibagi menjadi 2 yaitu opsi yang bisa dilaksanakan kapan saja selama masa kontrak opsi (opsi Amerika) dan opsi yang hanya bisa dilaksanakan ketika jatuh tempo saja (opsi Eropa). Dalam model yang akan dibangun, opsi yang diteliti adalah opsi Eropa.

Andaian 9.7. Surat berharga acuan (*underlying asset*) adalah saham yang tidak membayarkan dividen selama masa kontrak opsi berlangsung.

Dengan tidak membayarkan dividen sampai masa jatuh tempo, maka pemodal akan lebih menyukai untuk bertransaksi opsi.

Andaian 9.8. Biaya transaksi (komisi untuk pialang) relatif kecil dan dapat diabaikan.

Setiap transaksi di pasar modal selalu melibatkan pialang. Transaksi opsi selalu nilainya lebih kecil dibanding transaksi saham. Sehingga biaya jasa pialang (biaya transaksi) untuk transaksi opsi juga selalu lebih kecil dibanding biaya jasa pialang untuk transaksi saham.

9.6 Persamaan Turunan Utama

Andaian-andaian di atas akan digunakan untuk menurunkan persamaan harga opsi. Dalam andaian 9.2 dinyatakan bahwa pergerakan harga mengikuti pola acak. Andaian ini secara tidak langsung menyatakan bahwa persamaan (9.10) tentang pergerakan harga saham acuan yang mengikuti proses Wiener berlaku di sini. Persamaan (9.10) itu ialah

$$dS = \mu S\left(t\right)dt + \sigma S\left(t\right)dB.$$

Seperti telah dijelaskan di muka bahwa opsi merupakan surat berharga derivatif sehingga harga opsi O bergantung pada saham acuan S. Hal ini menunjukkan bahwa peubah harga opsi O pasti merupakan fungsi dalam S dan t. Akibat selanjutnya, persamaan (9.18) juga berlaku untuk O, atau dengan kata lain harga opsi O juga memenuhi proses Itô. Persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$dO = \left(\frac{\partial O}{\partial S}\mu S + \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial O}{\partial S}\sigma S\, dB. \quad (9.31)$$

Lambang dS dan dO merupakan perubahan O dan S dalam rentang waktu sempit dt. Proses Wiener yang mendasari O dan S adalah sama. Dengan kata lain dB dalam persamaan (9.10) dan (9.31) adalah sama. Hal ini menunjukkan bahwa dengan memilih portofolio yang terdiri dari saham dan opsi dengan komposisi yang sesuai, proses Wiener dapat dilenyapkan dari persamaan.

Andaikan portofolio itu adalah komposisi dari satu opsi bernilai O dan sejumlah Δ (baca: delta) saham acuan dengan nilai Δ belum ditentukan. Nilai Δ akan negatif jika saham dijual dan akan positif jika saham dibeli. Andaikan nilai portofolio itu adalah Φ, maka

$$\Phi = O + \Delta S. \tag{9.32}$$

Pada rentang waktu dt tingkat pengembalian portofolio adalah

$$d\Phi = dO + \Delta\,(dS)\,. \tag{9.33}$$

Dengan mengganti dS dengan persamaan (9.10) dan dO dengan persamaan (9.31), persamaan di atas akan menjadi

$$\begin{aligned} d\Phi = \quad & \left(\frac{\partial O}{\partial S}\mu S + \frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt + \frac{\partial O}{\partial S}\sigma S\; dB \\ & + \Delta\,(\mu\; S\; dt + \sigma\; S\; dB) \end{aligned} \tag{9.34}$$

Karena pasar diandaikan bebas dari arbitrasi (andaian 9.4) dan biaya transaksi bisa diabaikan (andaian 9.8), maka tingkat pengembalian portofolio ini harus sama dengan tingkat pengembalian setiap surat berharga bebas risiko. Dengan kata lain, kedua andaian ini menegaskan bahwa tingkat pengembalian portofolio merupakan deterministik. Akibatnya, suku stokastik (dB) dalam persamaan di atas harus lenyap. Ini hanya dapat diraih jika nilai $\Delta = -\frac{\partial 0}{\partial S}$, sehingga suku yang tersisa dari persamaan di atas adalah

$$d\Phi = \left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt. \tag{9.35}$$

Sementara itu, karena tingkat pengembalian portofolio sama dengan surat berharga bebas risiko, maka nilai dari tingkat pengembalian portofolio dapat dituliskan sebagai

$$d\Phi = r\Phi dt. \tag{9.36}$$

dengan r merupakan suku bunga bebas risiko. Penggantian $d\Phi$ dengan persamaan (9.34) dan Φ dengan persamaan (9.32) untuk persamaan di atas akan menghasilkan

$$\left(\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right) dt = r\left(O - \frac{dO}{dS}\right) dt$$

sehingga didapat

$$\frac{\partial O}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 O}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{dO}{dS} - rO = 0. \tag{9.37}$$

Persamaan ini merupakan persamaan turunan utama harga opsi. Persamaan ini bebas dari parameter laju pertumbuhan μ dan sahih untuk setiap derivatif yang memenuhi andaian-andaian di atas, khususnya untuk opsi beli dan opsi jual. Perbedaan antara opsi beli dan jual hanya terletak pada kondisi batas yang digunakan. Untuk opsi beli tipe Eropa mempunyai kunci kondisi batas

$$O = \max\left(S(T) - K, 0\right) \qquad \text{ketika } t = T \tag{9.38}$$

dan kondisi batas untuk opsi jual tipe Eropa ialah

$$O = \max\left(K - S(T), 0\right) \qquad \text{ketika } t = T. \tag{9.39}$$

9.7 Keseimbangan Opsi Jual dan Opsi Beli

Weston dan Copeland (1995, hlm. 516) menyatakan semua jenis kontrak keuangan (*financial contract*) pada dasarnya merupakan gabungan dari hanya 4 bentuk surat berharga, yaitu: saham, obligasi bebas risiko, opsi beli, opsi jual. Mengacu pada pendapat ini, maka pembelian selembar saham seharga S dan satu opsi jual dengan harga laksana K akan memberikan hasil yang tepat sama dengan selembar obligasi seharga B dan satu opsi beli dengan harga laksana K, sehingga berlaku persamaan berikut

$$S + P = B + C. \tag{9.40}$$

Dengan demikian, jika portofolio pertama tersusun dari selembar saham dan opsi jual, maka portofolio ini mempunyai nilai yang sama dengan portofolio kedua yang terdiri dari obligasi bebas risiko dan opsi beli.

Sekarang akan ditinjau kasus berikut, dimana seorang pemodal memiliki kedua portofilo tersebut secara bersamaan. Diandaikan harga saham acuan di pasar sekarang adalah S, sedangkan nilai obligasi, opsi beli, opsi jual dan saham acuan adalah masing-masing K dengan tanggal jatuh tempo yang sama.

Pada saat jatuh tempo, dimana harga saham acuan di pasar lebih mahal daripada harga laksana, yaitu $S > X$, maka opsi beli akan sangat menguntungkan jika dilaksanakan sebab pemodal akan meraup keuntungan sebesar $S - X$. Sebaliknya, opsi jual tidak mungkin dilaksanakan sebab lebih menguntungkan untuk menjual saham di pasar dibanding ke penulis opsi, sehingga nilai opsi jual adalah nol. Keadaan ini dapat dilihat sebagai

$$\begin{aligned} B &= S + P - C \\ K &= S + 0 - (S - K) = K. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Pada saat harga saham acuan sekarang di pasar sama dengan harga laksana, yakni $S = K$, opsi beli dan opsi jual keduanya tidak mempunyai pengaruh sedikitpun sehingga tidak menjadi masalah kedua opsi tersebut dilaksanakan atau tidak. Pada keadaan ini, kedua opsi dikatakan bernilai 0, sehingga

$$\begin{aligned} B &= S + P - C \\ K &= K + 0 - 0 = K. \end{aligned} \tag{9.42}$$

Kemudian, jika harga saham acuan di pasar lebih murah daripada harga laksana, yakni saat $S < K$, maka pemodal tetap bisa menjual sahamnya dengan harga yang lebih mahal daripada harga pasar, yaitu sebesar K, sehingga pemodal akan meraih keuntungan sebesar $K - S$. Dengan demikian, pada saat seperti ini opsi jual akan dilaksanakan dan opsi beli tidak mungkin dilaksanakan sebab pemodal bisa mendapatkan harga yang lebih murah di pasar sehingga nilai opsi beli adalah nol. Keadaan ini dengan sangat jelas tercermin dalam persamaan

$$\begin{aligned} B &= S + P - C \\ K &= S + (K - S) - 0 = K. \end{aligned} \tag{9.43}$$

Dari ketiga keadaan di atas, apapun keadaan yang terjadi saat jatuh tempo, portofolio pemodal selalu mempunyai nilai

K, yakni sama dengan nilai obligasi bebas risiko. Dengan demikian hasil yang diperoleh dari portofolio adalah benar-benar bebas risiko, dan nilainya bisa didiskontokan pada tingkat suku bunga bebas risiko. Disini, obligasi bebas risiko berarti bahwa obligasi akan menghasilkan sebesar nilai nominalnya dalam keadaan apapun, sehingga dengan menggunakan pendiskontoan majemuk berlanjut nilai sekarang obligasi adalah

$$B = Ke^{-r(T-t)} \tag{9.44}$$

Dengan demikian persamaan (9.40) dapat ditulis ulang dengan memasukkan persamaan (9.44) dan akan didapatkan persamaan baru

$$S + P - C = Ke^{-r(T-t)} \tag{9.45}$$

atau

$$P = C - S + Ke^{-r(T-t)}. \tag{9.46}$$

Persamaan terakhir ini dikenal sebagai persamaan keseimbangan opsi jual dan opsi beli (*put-cal parity*). Persamaan ini sangat penting karena begitu harga opsi beli dapat ditentukan maka pada saat itu pula harga opsi jual dapat dihitung. Hubungan ini memperlihatkan bahwa ada hubungan yang lestari antara harga dari opsi jual dan opsi beli dengan syarat memiliki kesamaan dalam surat berharga acuan, tanggal jatuh tempo dan harga laksana.

9.8 Penyelesaian Persamaan Turunan Utama

Adanya hubungan keseimbangan opsi jual dan opsi beli membuat penyelesaian persamaan turunan utama menjadi lebih sederhana, penyelesaian tidak harus meninjau kedua jenis opsi beli dan jual secara serempak, tetapi penyelesaian dapat dilakukan dengan hanya meninjau salah satu jenis opsi saja. Kaitan keseimbangan opsi beli dan jual yang sederhana juga menunjukkan bahwa urutan pemilihan jenis opsi dalam menyelesaikan persamaan turunan utama tidak berpengaruh sama sekali. Di sini akan ditinjau opsi beli. Harga opsi beli $C(S,t)$ merupakan penyelesaian persamaan (9.37) dengan mengganti harga opsi O dengan C sehingga persamaan turunan utama untuk opsi beli adalah

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0, \tag{9.47}$$

yang mempunyai kondisi batas

$$C(S,T) = \max\left(S(T) - K, 0\right) \text{ ketika } t = T. \tag{9.48}$$

Untuk menyelesaikan persamaan di atas, maka harus dicari skala yang cocok sedemikian sehingga persamaan menjadi tak berdimensi kemudian menyederhanakannya dengan permainan (manipulasi) peubah-peubah.

Sesuai dengan pembahasan pada bab sebelumnya tentang faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi, pada waktu jatuh tempo harga opsi bisa dikatakan hanya bergantung pada harga laksana dan harga saham acuan. Jadi, skala untuk harga opsi dapat dipilih salah satu dari keduanya. Namun, struktur persamaan dari karakteristik harga saham menyarankan bahwa $\ln S$ merupakan peubah yang lebih baik daripada S sebab peubah $\ln S$ menghilangkan ketergantungan koefisien pada harga saham acuan. Dengan demikian, skala harga opsi adalah harga laksana K. Sedangkan untuk waktu dapat dipilih salah satu dari $r, \sigma^2,$ atau T. Di sini dipilih kemeruapan, tetapi pilihan ini menyarankan untuk menghapus T dengan meletakkan dan menyusun t dengan arah yang berlawanan, dimulai pada saat jatuh tempo. Transformasi kondisi batas ini mengakibatkan waktu pada saat $t = T$ menjadi kondisi awal. Gagasan-gagasan ini tersaji dalam kaitan berikut:

$$C = Kf\left(x, \tau\right), \qquad S = Ke^x, \qquad t = T - \frac{\tau}{\left(\sigma^2/2\right)} \tag{9.49}$$

Oleh karena itu, persamaan (9.47) dan (9.48) bisa ditulis kembali sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\lambda - 1\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda f, \qquad \lambda = \frac{2r}{\sigma^2} \tag{9.50}$$

dengan

$$\tau = \ 0 \rightarrow f(x, 0) = \max\left(e^x - 1, 0\right). \tag{9.51}$$

Persamaan ini telah menunjukkan bahwa harga opsi hanya bergantung pada satu parameter tunggal saja, yakni λ. Parameter-parameter yang lain telah diserap dalam transformasi peubah.

Bangun persamaan (9.50) menyerupai dengan bangun persamaan difusi atau rambatan panas. Persamaan tersebut dapat menjadi persamaan difusi jika 2 suku yang memuat λ pada ruas kanan dapat dilenyapkan. Mengingat gejala difusi adalah gejala yang tidak stabil dengan dugaan kemerosotan semacam eksponensial, maka untuk mencapai bangun persamaan yang serupa dengan persamaan difusi dapat dilakukan dengan jalan menyisipkan

$$f(x,\tau) = \exp(ax + b\tau)\ g(x,\tau), \qquad a, b \text{ riil dan sebarang} \tag{9.52}$$

ke dalam persamaan (9.50) dan didapat persamaan baru

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + [2a + (\lambda - 1)]\,\frac{\partial g}{\partial x} + \left[a^2 + (\lambda - 1)\,a - \lambda - b\right] g. \tag{9.53}$$

Struktur persamaan baru ini sangat mudah untuk dijadikan persamaan difusi dengan cara menghitung tetapan a dan b sedemikian hingga suku-suku yang memuatnya (di ruas kanan) menjadi bernilai 0, kemudian juga dilakukan pengubahan kondisi batas dari persamaan. Hasil perhitungan yang sederhana menunjukkan bahwa suku-suku yang memuatnya akan menjadi 0 jika a dan b mempunyai nilai

$$\begin{aligned} a &:= -\tfrac{1}{2}(\lambda - 1) \\ b &:= a^2 + (\lambda - 1)a - \lambda = -\tfrac{1}{4}(\lambda + 1)^2 \end{aligned} \tag{9.54}$$

sehingga koefisien $\frac{\partial g}{\partial x}$ dan g lenyap, dan akhirnya didapatkan persamaan difusi

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \tag{9.55}$$

yang kondisi batasnya ditunjukkan dalam persamaan berikut

$$\tau = 0 \to g(x,0) = \max\left(\exp\left[(\lambda+1)\frac{x}{2}\right] - \exp\left[(\lambda-1)\frac{x}{2}\right], 0\right) \tag{9.56}$$

Persamaan difusi yang juga sering disebut persamaan rambatan panas merupakan persamaan yang sangat sering muncul dan sudah umum dalam sains dan bidang keteknikan (*engineering*). Dengan menggunakan metode standard untuk penyelesaian persamaan rambatan panas atau difusi, penyelesaian persamaan ini adalah

$$g(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, g(y,0) \exp\left(-\frac{1}{4\tau}(x-y)^2\right). \tag{9.57}$$

Integrasi dalam persamaan di atas dapat dipecah dalam 2 rentang batas integrasi, yaitu $-\infty \leq y \leq 0$ dan $0 \leq y \leq +\infty$. Untuk rentang batas pertama, fungsi maksimum mempunyai nilai negatif jika $y < 0$ dan bernilai 0 jika $y = 0$. Karenanya, pada rentang batas ini fungsi maksimum bernilai 0 sehingga dengan sendirinya nilai integrasi juga bernilai 0. Sedangkan untuk rentang batas kedua, nilai fungsi maksimum bernilai positif saat $y > 0$ dan bernilai 0 saat $y = 0$, sehingga nilai fungsi maksimum pada rentang ini adalah tidak nol. Dengan demikian, integrasi dalam persamaan (9.57) hanya menyisakan integrasi dengan rentang batas $0 \leq y \leq +\infty$ dan fungsi $g(y,0)$

bernilai bukan nol, dapat ditulis

$$\begin{aligned} g(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\tau\pi}}\int_0^{+\infty} dy \\ &\quad \left[\exp\left((\lambda+1)\frac{y}{2}\right) - \exp\left((\lambda-1)\frac{y}{2}\right)\right] \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{4\tau}(x-y)^2\right). \end{aligned} \tag{9.58}$$

Langkah yang perlu ditempuh untuk menyelesaikan persamaan di atas hanya memerlukan sedikit kepiawaian dalam permainan peubah-peubah. Dengan menggunakan kaitan sederhana $\xi = \frac{(y-x)^2}{2\tau}$, persamaan akan menjadi

$$\begin{aligned} g(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} \sqrt{2\tau}d\xi \left[\exp\left(\frac{1}{2}\left(x+\xi\sqrt{2\tau}\right)(\lambda+1)\right)\right] \\ &\quad \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} d\xi \exp\left[\frac{1}{2}\left(x+\xi\sqrt{2\tau}\right)(\lambda+1) - \frac{\xi^2}{2}\right] \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{2\tau}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{+\infty} d\xi \exp\left[\frac{1}{2}\left(x+\xi\sqrt{2\tau}\right)(\lambda-1) - \frac{\xi^2}{2}\right] \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned} \tag{9.59}$$

Selanjutnya dengan kaitan $\eta_1 = \xi - \frac{(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}{2}$, $\eta_2 = \xi - \frac{(\lambda-1)\sqrt{2\tau}}{2}$ untuk lambang-lambang I_1 dan I_2 secara berurutan akan menghasilkan

$$\begin{aligned} I_1 &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda+1)^2\right] \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\lambda+1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}{\eta_1}^2\right) d\eta_1 \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda+1)^2\right] N(d_1) \end{aligned} \tag{9.60}$$

dan

$$\begin{aligned} I_2 &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda-1)^2\right] \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(\lambda-1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}{\eta_2}^2\right) d\eta_2 \\ &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda-1)^2\right] N(d_2) \end{aligned} \tag{9.61}$$

dengan

$$\begin{array}{l} d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} \\ d_2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda-1)\sqrt{2\tau} \end{array} \tag{9.62}$$

dan

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} d\eta \ \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right). \tag{9.63}$$

Fungsi $N(d)$ adalah peluang bahwa peubah η yang mengambil nilai lebih kecil dari d teragih secara normal. Ini merupakan agihan peluang kumulatif untuk agihan Gaussan.

Dengan diketahuinya nilai I_1 dan I_2, maka persamaan

$g(x,\tau) = I_1 - I_2$ dapat dihitung yaitu

$$\begin{aligned} g(x,\tau) &= \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda+1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda+1)^2\right] N(d_1) \\ &\qquad - \exp\left[\frac{1}{2}(\lambda-1)x + \frac{\tau}{4}(\lambda-1)^2\right] N(d_2). \end{aligned} \tag{9.64}$$

Pada akhirnya, persamaan harga opsi beli C dapat dihitung dengan menggunakan kaitan-kaitan dalam persamaan (9.49), (9.52) dan (9.54) serta $\lambda = \frac{2r}{\sigma^2}$ untuk mengembalikan peubah-peubah asal ke dalam bangun persamaan. Perhitungan ini menunjukkan bahwa harga untuk opsi beli C yaitu

$$\begin{aligned} C &= K\exp\left[-\frac{1}{2}(\lambda-1)x - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau\right] g(x,\tau) \\ &= K\exp[x]N(d_1) - K\exp[-\tau\lambda]N(d_2) \end{aligned} \tag{9.65}$$

Dengan demikian, harga opsi beli $C(S,t)$ adalah

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{9.66}$$

dengan

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \tag{9.67}$$

dan

$$
\begin{aligned}
d_2 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(\lambda - 1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
&= d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}. \qquad (9.68)
\end{aligned}
$$

Dengan selesainya perhitungan untuk opsi beli ini, persamaan opsi jual dapat dihitung dengan mudah berdasarkan kaitan keseimbangan opsi beli dan opsi jual

$$P(S,t) = C(S,t) - S + Ke^{-r(T-t)}.$$

Perhitungan ini menunjukkan bahwa persamaan untuk opsi jual adalah

$$P(S,t) = -S\left[1 - N\left(d_1\right)\right] + Ke^{-r(T-t)}\left[1 - N\left(d_2\right)\right]. \qquad (9.69)$$

Dalam persamaan (9.66), (9.67), (9.68) dan (9.69), lambang S, K, P dinyatakan dalam satuan mata uang. Lambang σ, r dapat dinyatakan dalam persen atau bilangan desimal. Dan parameter $T-t$ dinyatakan dalam satuan waktu tahun. Artinya, jika diketahui masa jatuh tempo dalam bilangan hari, maka harus diubah dulu dalam orde tahun.

10 — Siasat Investasi

Model penentuan harga opsi yang tertera dalam persamaan (9.66) dan (9.69) memuat 5 parameter yaitu harga saham acuan, harga laksana, suku bunga bebas risiko, waktu jatuh tempo dan volatilitas saham acuan. Empat parameter pertama dapat ditentukan dengan mudah berdasarkan informasi yang tersedia di pasar. Parameter harga laksana dan jatuh tempo merupakan parameter yang tertera dalam kontrak itu sendiri. Suku bunga bebas risiko bisa didapatkan dengan mudah, misalnya dari koran. Untuk Indonesia, suku bunga bebas risiko mengacu pada suku bunga yang dikeluarkan oleh Bank Indonesia. Sedangkan parameter volatilitas saham acuan harus ditentukan dengan cara tersendiri.

10.1 Volatilitas Saham Acuan

Volatilitas saham acuan merupakan satu-satunya faktor yang nilainya tidak diketahui di dalam model penentuan harga opsi. Pemain pasar dapat memperkirakan volatilitas dengan 2 cara, yaitu volatilitas tersirat (*implied volatility*) atau volatilitas yang berdasarkan data perubahan harga saham harian (volatilitas historis, *historis volatility*).

Volatilitas tersirat

Dalam model penentuan harga opsi (9.66) dan (9.69) terlihat bahwa ada suatu jalinan 'tertentu' antara volatilitas dan harga opsi. Ini memberikan petunjuk bahwa jika harga opsi telah diketahui, maka volatilitas dapat dicari dengan model penentuan harga opsi tersebut. Volatilitas yang didapat dengan cara ini disebut volatilitas tersirat.

Selanjutnya, volatilitas tersirat ini dapat digunakan sebagai masukan dalam persamaan (9.66) dan (9.69) untuk menentukan harga opsi yang lain. Volatilitas tersirat dapat juga digunakan sebagai perbandingan terhadap volatilitas historis. Perbandingan ini sangat berguna untuk menilai apakah suatu opsi dapat disebut mahal atau murah. Misalnya, jika volatilitas historis lebih tinggi dibandingkan volatilitas tersirat, maka harga opsi tersebut dapat dikatakan tidak mahal, sebab semakin besar fluktuasi saham acuan maka harga opsi seharusnya semakin tinggi.

Volatilitas historis

Cara kedua untuk menentukan volatilitas adalah dengan menghitung simpangan baku perubahan harga harian atau return harian dari saham acuan. Ada perbedaan tentang jumlah hari yang sebaiknya digunakan untuk menghitung simpangan baku harian. Hull (1989, hlm. 88-90) menyarankan untuk menggunakan data 90–180 hari yang lalu, sedangkan menurut Fabozzi (2000, hlm. 492) cukup dengan data 10–100 hari saja. Karena volatilitas yang digunakan dalam persamaan merupakan volatilitas tahunan, maka simpangan baku tersebut harus dikalikan dengan akar kuadrat dari jumlah hari dalam setahun,

$$\text{simpangan baku } \times \sqrt{\text{jumlah hari dalam setahun}}. \quad (10.1)$$

Jumlah hari yang digunakan dalam persamaan di atas pun juga berbeda-beda. Fabozzi (2000, hlm. 492) menyatakan umumnya jumlah yang digunakan adalah 250, 260 atau 365 hari. Angka 250 dan 260 hari digunakan karena kedua angka tersebut mengacu pada jumlah hari perdagangan yang sebenarnya bagi opsi-opsi tertentu. Untuk angka ini, Hull (1989, hlm. 90) hanya menyebut 250 hari saja. Sedangkan di Indonesia, jumlah hari perdagangan selama setahun berdasarkan data harian harga saham hanyalah 241 hari.

Adanya perbedaan dalam memilih jumlah hari ini menyebabkan seorang manajer keuangan harus mengambil keputusan tersendiri tentang:

1. jumlah hari yang akan digunakan untuk menghitung simpangan baku return harian saham acuan,
2. jumlah hari dalam satu tahun yang digunakan untuk mengubah butir 1 menjadi volatilitas tahunan

Akibat adanya 2 pilihan di atas, perhitungan volatilitas historis dapat memberikan nilai yang berbeda-beda.

Dalam perhitungan volatilitas historis ini, simpangan baku dari s data return R_i diberikan oleh persamaan

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} {R_i}^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)^2}, \qquad (10.2)$$

dengan n adalah jumlah data harian yang digunakan. Berdasarkan persamaan (9.24), simpangan baku dari data R_i adalah $\sigma\sqrt{\tau}$, dengan τ merupakan 1 per jumlah hari perdagangan dalam setahun. Karenanya, peubah s merupakan perkiraan dari $\sigma\sqrt{\tau}$, sehingga

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{\tau}}. \qquad (10.3)$$

Penjelasan yang lebih lengkap tentang masalah ini dapat dilihat dalam pustaka (Hull, 1989).

10.2 Kontrak Opsi

Data harga saham Telkom pada tanggal 4 Mei 2005 adalah Rp. 4300. Jika kontrak opsi beli atas saham Telkom tersebut untuk jatuh tempo 3 bulan lagi harga laksananya Rp. 4000, maka akan muncul pertanyaan berapa harga opsi yang adil untuk kontrak ini. Harga yang adil untuk kontrak opsi ini sangat berguna bagi pemodal. Bagi pemodal yang ingin menjual atau membeli kontrak opsi beli, model harga opsi memberikan 'rambu atau patokan' harga yang sepantasnya ketika kontrak opsi akan diterbitkan di pasar.

Dalam kasus di atas, andaikan suku bunga bebas risiko adalah 8% per tahun, maka untuk mencari harga opsi harus dihitung volatilitasnya terlebih dahulu. Nilai s untuk data harga saham Telkom selama 90 hari sebelum tanggal 4 Mei 2005 adalah 0.0137. Dengan demikian data memberikan perkiraan volatilitas sebesar $0.0137\sqrt{250} = 0.2173$ atau 22% (pembulatan). Volatilitas ini merupakan volatilitas tahunan yang tetap (berdasarkan andaian 9.5).

10.3 Simulasi Kontrak Opsi

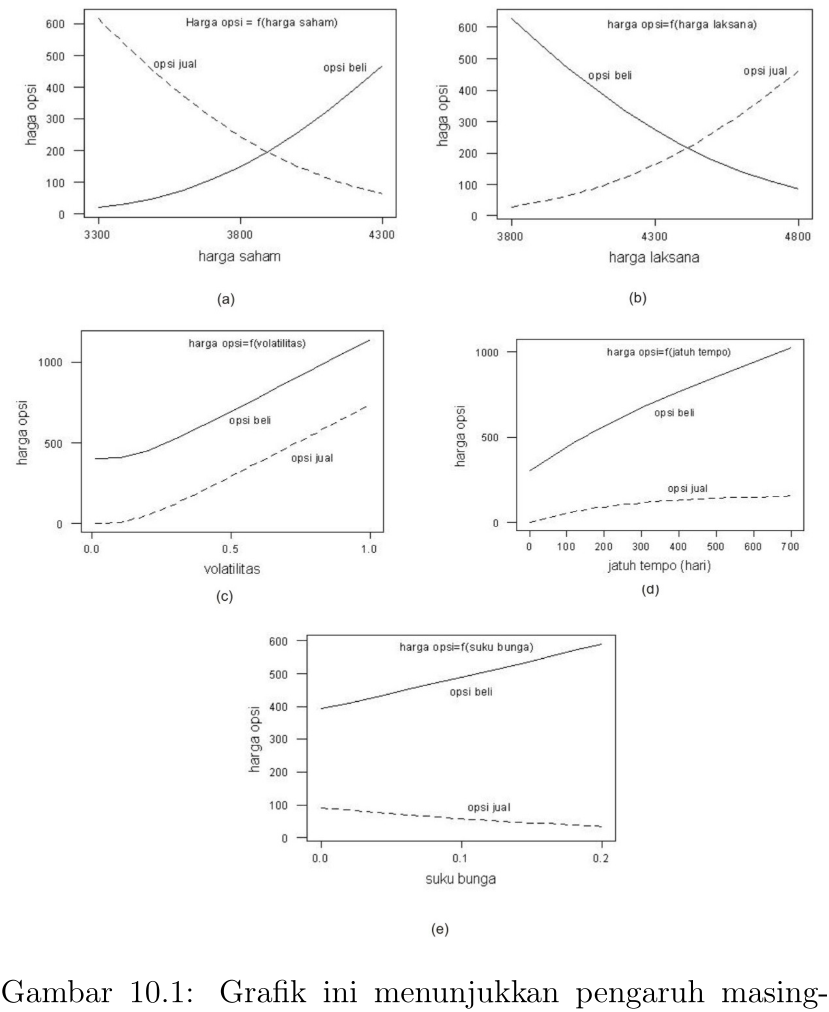
Dari pembahasan di atas, didapat parameter-parameter sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= 4300, \qquad K = 4000, \qquad T = 120 \text{ hari}, \\ r &= 0.08, \qquad \sigma = 0.22. \end{aligned}$$

Struktur persamaan dari model penentuan harga opsi (9.66) dan (9.69) menunjukkan bahwa model ini sangat mudah sekali untuk diubah dalam berbagai bahasa pemrograman. Mulai dari bahasa yang begitu masyhur di lingkungan sains dan teknik seperti Matlab sampai perangkat lunak yang biasanya digunakan di lingkungan akuntansi seperti Excel. Bahkan, persamaan tersebut juga memungkinkan untuk sebuah kalkulator sekalipun.

Berdasarkan simulasi yang telah dibuat dan dengan menggunakan hasil keluaran dari simulasi tersebut akan didapatkan grafik yang disajikan oleh gambar 10.1.

Seluruh grafik yang tersaji dalam gambar 10.1 menunjukkan kaitan antara harga opsi dengan 1 parameter saja dan 4 paramater yang lain dianggap tetap. Grafik tersebut juga dapat dibaca sebagai pembuktian atas pengaruh faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi. Secara ringkas, dengan me-



Gambar 10.1: Grafik ini menunjukkan pengaruh masing-masing parameter dalam persamaan harga opsi terhadap harga opsi dengan mengandaikan parameter-parameter yang lain tetap. Dalam grafik ini, harga opsi merupakan fungsi terhadap: (a) harga saham acuan; (b) harga laksana; (c) volatilitas; (d) jatuh tempo; dan (e) suku bunga bebas risiko

lihat grafik tersebut pengaruh paramater-parameter dalam persamaan harga opsi dapat disajikan pula dalam tabel 10.1.

Tabel 10.1: Ringkasan faktor-faktor yang mempengaruhi harga opsi

	Jika **faktor** meningkat maka...	
Faktor	**Harga opsi beli**	**Harga opsi jual**
Harga saham acuan	Meningkat	Menurun
Harga laksana	Menurun	Meningkat
Jatuh tempo	Meningkat	Meningkat
Volatilitas	Meningkat	Meningkat
Suku bunga bebas risiko	Meningkat	Menurun

Dengan demikian, parameter-parameter yang terkandung dalam model persamaan (9.66) dan (9.69) menunjukkan pengaruh yang serupa menurut pijakan teori keuangan.

10.4 Makna Harga Opsi

Perhitungan terhadap kontrak opsi di atas berdasarkan persamaan (9.66) dan (9.69) menunjukkan bahwa harga untuk opsi beli adalah Rp. 467,84 dan harga opsi jual adalah Rp. 64,00 .

Harga-harga tersebut merupakan harga yang adil (layak) berdasarkan model yang telah dibuat. Oleh karenanya, harga-harga ini berguna untuk menilai apakah suatu opsi yang dijual di pasar dapat disebut mahal atau tidak. Jika seorang pemodal menjual opsi beli atas saham Telkom dengan harga Rp. 500,00, maka berdasarkan hasil model, harga opsi tersebut adalah mahal. Pada gilirannya, jika ternyata kecenderungan pemain pasar adalah menjual opsi beli atas saham Telkom pada tingkat harga Rp. 500,00, maka seorang pemodal bisa mempertimbangkan untuk juga ikut menjual opsi beli pada tingkat harga Rp. 500,00. Sebaliknya jika harga opsi beli di pasar ternyata adalah Rp. 400,00, maka pemodal sebaiknya melakukan pembelian opsi beli.

Hal yang sama juga berlaku untuk opsi jual. Andaikan kecenderungan pemain pasar adalah menjual opsi jual pada tingkat harga Rp. 80,00, maka sebaiknya pemodal mengambil keputusan untuk ikut menjual opsi jual. Sebaliknya jika harga di pasar hanya Rp. 50,00 maka keputusan yang sebaiknya diambil ialah membeli opsi jual tersebut.

10.5 Siasat Bermain Opsi

Setelah harga opsi diketahui, maka sekarang terhampar beragam pilihan dalam bermain opsi. Untuk permainan yang sederhana, setidaknya ada 4 pilihan sesuai dengan jenis opsi yang ada, pegang opsi beli, lepas opsi beli, pegang opsi jual dan lepas opsi jual. Siasat dengan hanya memilih 1 dari 4 posisi tersebut dikenal sebagai siasat terbuka (*naked strategies*).

Langkah terpenting sebelum mengambil keputusan dalam siasat ini adalah mencermati sentimen pasar terhadap saham acuan. Langkah ini begitu penting sebab siasat ini tidak mengenal perimbangan atas risiko dan hasil.

Untuk saham acuan yang harganya cenderung meningkat, maka pemain pasar bisa mempertimbangkan 2 pilihan: pegang opsi beli atau lepas opsi jual. Dengan memegang opsi beli, mengingat harga saham cenderung meningkat, ada harapan besar bahwa ketika jatuh tempo harga saham acuan di pasar lebih tinggi dibanding harga laksana, sehingga keuntungannya sebesar selisih harga pasar dan harga laksana, kemudian dipotong harga opsi. Karenanya, untuk saham acuan yang cenderung sangat meningkat, pilihan siasat ini merupakan pilihan yang rasional. Apalagi, ancaman kerugian hanyalah sebesar harga opsi.

Namun, jika kecenderungan naiknya harga saham acuan tidak begitu berarti, pilihan yang rasional adalah menulis (menjual) opsi jual. Dalam siasat ini, jika ternyata pada saat jatuh tempo harga saham acuan melonjak tinggi, bisa dipastikan pemegang opsi jual lebih menyukai untuk menjual sahamnya di pasar sebab memiliki harga yang lebih tinggi.

Sebaliknya, untuk saham acuan yang harganya memperlihatkan kecenderungan menurun, siasat yang menguntungkan adalah menulis opsi beli dan memegang opsi jual. Menulis opsi beli dapat dipilih untuk saham-saham yang penurunannya tidak begitu berarti. Sebab, andaikan harga saham anjlok, maka harga di pasar tentu jauh lebih murah sehingga opsi beli akan diabaikan. Sedangkan memegang opsi jual menjadi pilihan tepat jika saham acuan menunjukkan penurunan yang sangat berarti. Dengan demikian, apabila pada saat jatuh tempo harga saham acuan benar-benar anjlok, pemegang opsi jual masih bisa menjualnya dengan harga yang relatif lebih tinggi kepada penulis opsi jual.

Empat macam siasat terbuka ini disimulasikan dalam tabel 10.2 yang kemudian dilukiskan dalam gambar 10.2. Empat grafik yang tersaji dengan jelas menunjukkan bahwa siasat terbuka merupakan siasat yang paling dasar karena hanya bertumpu pada 1 posisi dari 4 posisi opsi dan tidak ada penyeimbangan atas risiko yang membayangi. Akibatnya, siasat ini

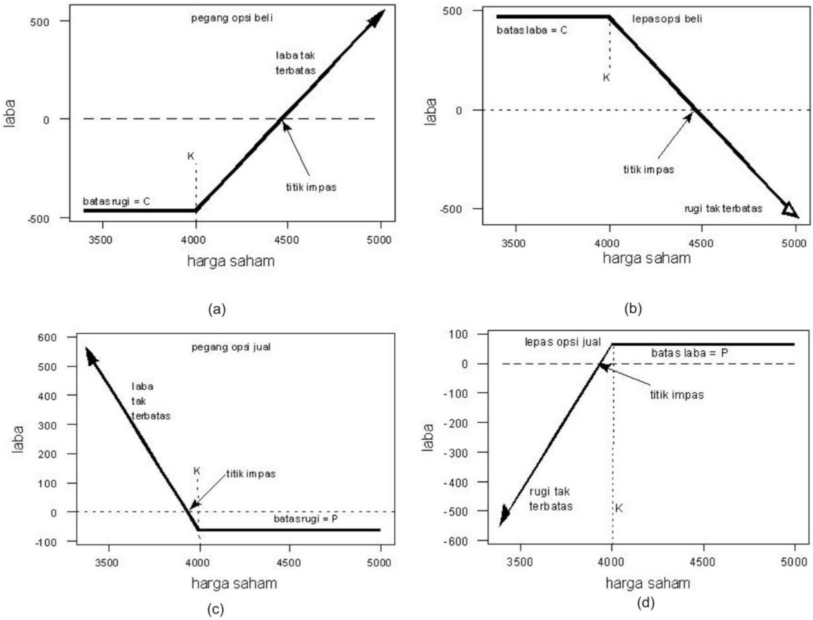
Tabel 10.2: Simulasi siasat terbuka dengan K=Rp. 4000, S=Rp. 4300, $r = 0.08$, $\sigma = 0.22$, dan $T - t$=120 hari

S	K	C	P	Pegang C	Lepas C	Pegang P	Lepas P
					Laba		
3400	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	536.00	-536.00
3500	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	436.00	-436.00
3600	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	336.00	-336.00
3700	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	236.00	-236.00
3800	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	136.00	-136.00
3900	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	36.00	-36.00
4000	4000	467.84	64.00	-467.84	467.84	-64.00	64.00
4100	4000	467.84	64.00	-367.84	367.84	-64.00	64.00
4200	4000	467.84	64.00	-267.84	267.84	-64.00	64.00
4300	4000	467.84	64.00	-167.84	167.84	-64.00	64.00
4400	4000	467.84	64.00	-67.84	67.84	-64.00	64.00
4500	4000	467.84	64.00	32.16	-32.16	-64.00	64.00
4600	4000	467.84	64.00	132.16	-132.16	-64.00	64.00
4700	4000	467.84	64.00	232.16	-232.16	-64.00	64.00
4800	4000	467.84	64.00	332.16	-332.16	-64.00	64.00
4900	4000	467.84	64.00	432.16	-432.16	-64.00	64.00
5000	4000	467.84	64.00	532.16	-532.16	-64.00	64.00

tidak mempunyai mekanisme bagaimana membendung risiko seperti tampak dalam gambar 10.2 (b) dan (d).

Gambar 10.2 secara jelas menyarankan bahwa siasat terbuka yang risikonya paling kecil adalah memegang opsi beli dan memegang opsi jual. Ancaman kerugian yang mungkin diderita keduanya hanya sebatas harga opsi. Namun, keuntungan yang mungkin dapat dituai besarnya bisa tak terbatas.

Potensi kerugian tak terbatas pada siasat terbuka bisa dibendung dengan melakukan kombinasi untuk menyeimbangkan risiko dan hasil. Salah satu cara untuk melakukan penyeimbangan ini adalah dengan melibatkan posisi saham acuan. Siasat ini dikenal sebagai siasat tertutup (*covered strategies*).



Gambar 10.2: Profil 4 macam siasat terbuka dalam investasi opsi. Dalam satu jenis opsi, misalnya opsi beli, keuntungan pemegang opsi beli merupakan kerugian penulis (penjual) opsi beli. Demikian pula untuk opsi jual. Dalam siasat ini, pemain pasar tidak memiliki penyeimbang untuk risiko dan hasil. Masing-masing grafik menunjukkan siasat terbuka:(a) memegang opsi beli; (b) menulis/melepas opsi beli; (c) memegang opsi jual; dan (d) menulis opsi jual

Dengan demikian, begitu kontrak disepakati maka penulis opsi segera membeli saham acuan di pasar dengan harga saat itu. Andaikan kontrak opsi tersebut adalah opsi beli untuk 100 ribu lembar saham acuan yang tidak membayar dividen sampai jatuh tempo. Jika harga saham acuan saat itu di pasar adalah Rp. 4300, maka dengan segera penulis opsi membeli saham acuan dengan harga Rp. 4300 per lembar sebanyak 100 ribu lembar. Investasi awal yang diperlukan adalah

$$\text{Rp.}430000000 - \text{Rp.}46784000 = \text{Rp.}383216000.$$

Jika 120 hari kemudian opsi ternyata *out-of-the-money* (sebagai contoh, harga saham acuan pada saat jatuh tempo Rp. 3800) maka portofolio penulis opsi bernilai Rp. 380000000. Kerugian penulis opsi adalah Rp. 3216000. Jika harga saham acuan ketika jatuh tempo adalah Rp. 5000 (*in-the-money*), portofolio penulis opsi saat itu sebesar Rp. 116484000. Karena masih membuka peluang munculnya kerugian, bisa dikatakan siasat tertutup tetap belum berdaya untuk membendung risiko dengan baik. Maka, siasat ini masih perlu diperbaiki.

10.6 Siasat Membendung Risiko

Dalam siasat tertutup, pelibatan saham acuan hanya dilakukan sekali saja ketika kontrak selesai ditandatangani. Sehingga, portofolio penulis opsi tersusun atas opsi dan saham acuan. Selebihnya, penulis opsi hanya pasif menunggu sampai jatuh tempo sambil berharap semoga opsi dalam keadaan *in-the-money* sehingga tidak merugi.

Selama masa jatuh tempo, sebenarnya penulis opsi bisa melakukan pencagaran nilai terhadap posisinya (melindungi nilainya) dengan segera membeli saham acuan pada saat harganya di atas K dan segera menjual kembali sebelum jatuh dibawah K. Pola ini menjamin bahwa penulis opsi memiliki saham acuan saat T jika opsi berakhir *in-the-money* dan tidak memiliki saham jika opsi berakhir *out-of-the-money*. Kerugian bisa ditekan dan biaya untuk melakukan ini hanya sebesar

$$Q = \max(S - K, 0) \tag{10.4}$$

dengan S merupakan harga saham acuan ketika opsi ditulis. Namun demikian, cara ini menyimpan 3 masalah:

1. bahwa sangat tidak mungkin untuk membeli dan menjual saham acuan tepat disekitar K,
2. aliran dana untuk pencagaran nilai ini terjadi untuk waktu-waktu yang berbeda sehingga pasti nilainya terdiskonto,
3. biaya transaksi opsi (komisi jasa pialang) belum dihitung.

10.7 Siasat Membangun Portofolio Bebas Risiko

Pada dasarnya, gagasan yang dipakai dalam siasat membendung risiko di atas setali tiga uang dengan gagasan siasat membangun portofolio yang bebas risiko. Jika andaian 9.1 – 9.8 yang digunakan untuk membangun persamaan turunan utama berlaku, maka membangun portofolio bebas risiko merupakan sebuah keniscayaan.

Ketika membangun persamaan turunan utama dalam bab 9 (§ 9.6) halaman 156, untuk melenyapkan ketidakpastian dalam investasi, maka suku stokastik harus dilenyapkan. Upaya pelenyapan ini dilakukan dengan membentuk suatu portofolio yang terdiri atas opsi dan sejumlah Δ (baca: delta) saham.

Dalam upaya yang telah dilakukan, portofolio Φ yang digunakan merupakan portofolio yang memiliki komposisi (persamaan (9.32))

$$\Phi = O + \Delta S.$$

Keberhasilan portofolio ini dalam melenyapkan suku stokastik dapat dimaknai bahwa portofolio ini merupakan portofolio bebas risiko. Perhitungan yang sudah dilakukan saat itu menunjukkan bahwa nilai Δ dalam persamaan di atas adalah $-\frac{\partial O}{\partial S}$ (lihat persamaan (9.34)). Ini mengandung pengertian bahwa portofolio Φ dapat disusun dengan membeli 1 opsi dan menjual sejumlah $\frac{\partial O}{\partial S}$ saham acuan.

Portofolio Φ dapat juga disusun dengan menjual 1 opsi dan membeli sejumlah $\frac{\partial O}{\partial S}$ saham acuan. Susunan portofolio ini dapat ditulis sebagai

$$\Phi = -O + \Delta S, \tag{10.5}$$

dengan $\Delta = \frac{\partial O}{\partial S}$. Susunan portofolio ini tetap menunjukkan bahwa portofolio Φ merupakan portofolio bebas risiko, sebab suku stokastik juga bisa dilenyapkan. Oleh karenanya, secara umum portofolio Φ dapat disusun dengan menggunakan kaitan

$$\Phi = \pm O \mp \Delta S, \tag{10.6}$$

tanda (+) menyatakan membeli dan tanda (−) menyatakan menjual.

Lambang Δ dalam portofolio ini disebut sebagai delta pencagaran nilai (*delta hedging*). Dengan demikian, delta dapat ditakrifkan sebagai nisbah antara perubahan harga opsi dengan perubahan harga saham acuan. Atau, jika diterjemahkan dalam 'bahasa' investasi, delta merupakan jumlah saham acuan yang sebaiknya dipegang untuk setiap penjualan opsi demi menjaga portofolio supaya tetap bebas risiko, dan sebaliknya.

Maka, berdasarkan persamaan (9.66) dan (9.69), masing-masing nilai delta untuk opsi beli dan opsi jual dapat dicari dengan mudah. Delta untuk opsi beli adalah

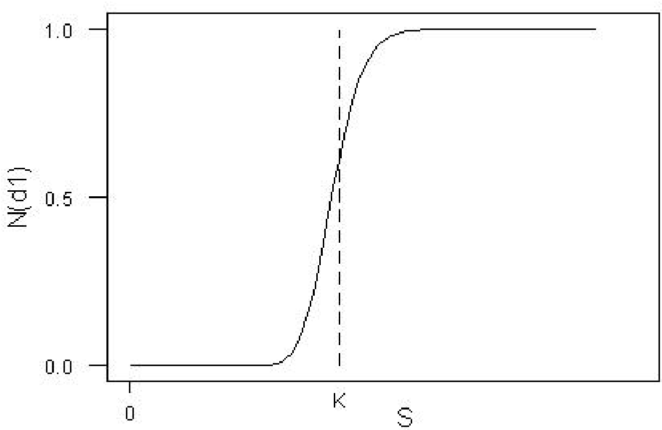
$$\begin{aligned}
\Delta_C &= N(d_1) + \frac{S}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-{d_1}^2/2}\, \frac{\partial d_1}{\partial S} - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-r(T-t)-d_1^2/2}\, \frac{\partial d_2}{\partial S} \\
&= N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \left[e^{-d_1^2/2} - e^{-(r(T-t)+\ln S/K)}\, e^{-d_2^2/2} \right] \\
&= N(d_1). \qquad (10.7)
\end{aligned}$$

Delta untuk opsi jual dapat dihitung dengan mudah berdasarkan kaitan keseimbangan opsi jual dan opsi beli,

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left(C + Ke^{-r(T-t)} - S\right) = N(d_1) - 1 \quad (10.8)$$

yang menunjukkan selalu negatif.

Delta untuk opsi beli selalu positif karena $0 \le N(d_1) \le 1$. Rentang nilai ini merupakan rentang peluang apakah opsi akan dilaksanakan atau diabaikan. Sebelumnya, gambar 10.1 (a) telah menjelaskan bahwa kenaikan harga saham acuan di pasar akan meningkatkan harga opsi beli. Secara tersirat gambar tersebut juga menyatakan bahwa kenaikan harga saham acuan sebanding dengan kemungkinan bahwa opsi beli akan *in-the-money* sehingga harganya juga naik. Ini semakin jelas dalam gambar 10.3. Gambar ini juga menunjukkan bahwa peluang opsi beli akan *at-the-money* ketika jatuh tempo adalah di sekitar 0.5.



Gambar 10.3: Perubahan delta terhadap harga saham acuan untuk opsi beli

Dengan demikian, semakin jelaslah bagaimana seorang penulis opsi beli bisa membangun portofolio bebas risiko selama masa jatuh tempo. Portofolio ini menjamin bahwa pada saat jatuh tempo penulis opsitidak mengalami kerugian. Bangunan portofolio ini dapat dibaca dalam persamaan

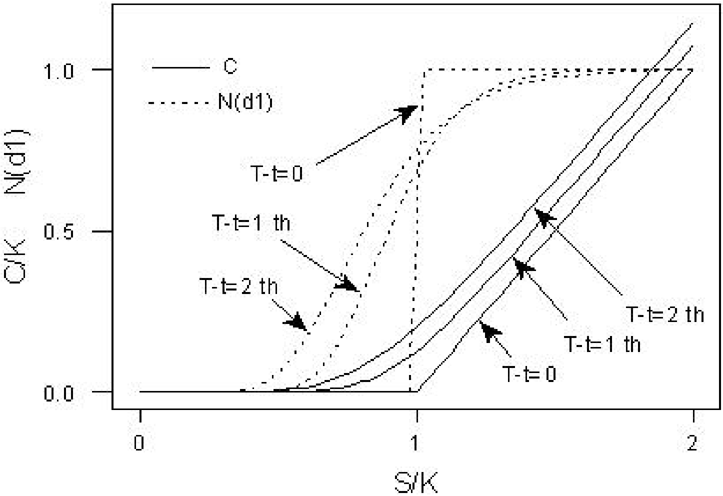
$$\Phi = -C + \Delta S = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S = -C + N(d_1) S. \quad (10.9)$$

Secara teoritis persamaan ini menyebutkan bahwa jika penulis opsi beli menjual opsi beli sejumlah C, maka sejumlah $N(d_1)S$ saham harus dibeli untuk menyeimbangkan risiko dalam portofolionya. Dengan kata lain, portofolio bebas risiko Φ dapat dengan mudah dibentuk hanya dengan memelihara jumlah $N(d_1)S$ saham acuan. Dengan sendirinya, pergerakan harga saham acuan harus diimbangi dengan pengaturan kembali (*rebalancing*) jumlah saham acuan yang disertakan dalam portofolio Φ. Ini akan semakin jelas dengan melihat gambar 10.4

Pada waktu jatuh tempo, opsi beli hanya akan bernilai $S > K$. Keadaan ini disebut *in-the-money* (opsi yang menghasilkan). Sebaliknya, jika $S < K$ opsi mengalami keadaan *out-of-the-money* (opsi tidak berguna). Dalam keadaan ini, opsi tidak mempunyai nilai sehingga tidak dibutuhkan saham acuan dalam portofolio Φ. Namun demikian, seiring pergerakan harga saham acuan terhadap waktu, opsi akan segera mencapai *at-the-money* (yakni $S = K$) atau bahkan *in-the-money.* Pada keadaan yang demikian, pemegang opsi beli dipastikan akan melaksanakan haknya. Pada gilirannya, penulis opsi beli wajib menyediakan saham acuan yang dijanjikan.

Selama belum jatuh tempo, harga opsi beli lebih mahal dan tidak nol, bahkan jika opsi masih *out-of-the-money.* Karenanya, delta pencagaran risiko harus menyeimbangkan sesegera mungkin untuk memelihara portofolio yang bebas risiko. Siasat dengan menggunakan portofolio bebas risiko ini lebih dikenal sebagai siasat delta pencagaran nilai (*delta hedging*).

Konsistensi logis dari adanya dinamika harga saham acuan



Gambar 10.4: Harga opsi beli C/K (*garis rapat*) dan delta pencagaran nilai $N(d_1)$ (*garis putus*) ditunjukkan sebagai fungsi S/K untuk 3 jatuh tempo yang berbeda: $T-t=0$, 1 tahun, 2 tahun. Seluruh kurva dibuat berdasarkan simulasi kontrak opsi yang sudah dibahas di muka, yakni dengan parameter $r = 0.08$ per tahun, dan volatilitas $\sigma = 0.22$ per tahun

menuntut penulis opsi untuk sesering mugkin melakukan penyeimbangan kembali atas portofolionya. Berubahnya harga saham acuan akan mempengaruhi harga opsi beli dan pada gilirannya juga berimbas pada nilai delta, sebab delta juga dapat dibaca sebagai gradien kurva opsi beli. Dengan demikian, semakin sering portofolio diseimbangkan maka akan memberikan hasil yang semakin baik sebab harga saham acuan berubah terhadap waktu.

Daftar Pustaka

'Abdulrahim, M.I., 1997, *Al Quran Merangsang Pengembangan Ilmu dan Teknologi* dalam Mukjizat Al Quran dan As Sunnah tentang Iptek, Gema Insani Press, Jakarta.

Achsien, I.H., 2000, *Investasi Syariah di Pasar Modal: Menggagas Konsep dan Praktek Manajemen Portofolio Syariah*, Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

Algifari, 1997, *Analisis Statistik untuk Bisnis dengan Regresi Linear, Korelasi dan Non Parametrik*, Edisi I, Cetakan I, BPFE-Jogjakarta.

Amaral, L.A.N., Cizeau, P., Gopikrishnan, P., Liu, Y., Meyer, M., Peng, C.K. dan Stanley, H.E., 1999, *Econophysics: Can Statistical Physics Contribute to the Science of Economics*, Computer Physics Communications 121-122 (1999).

Amaral, L.A.N., Scala, A., Barthelemy, M., dan Stanley, H.E., 2003, *Classes of Small-world Networks*, PNAS 200327197.

Baaquie, B.E., Coriano, C., dan Srikant, M., 2002, *Quantum Mechanics, Path Integrals and Option Pricing: Reducing the Complexity of Finance*, cond-mat/0208191 v2.

Baiquni, A., 1995, *Al Quran, Ilmu Pengetahuan dan Teknologi*, Ed. 1, Cet. 3, Dana Bhakti Wakaf, Jakarta.

Bapepam, 2003, *Panduan Investasi Di Pasar Modal Indonesia*, Badan Pengawas Pasar Modal bekerja sama dengan Japan International Cooperation Agency.

Baschnagel, J. & Paul, W., 1999, *Stochastic Processes from Physics to Finance*, Springer-Verlag, New York.

Basuki, Z.D. (Ketua Tim Penyusun), 1996/1997, *Pengkajian Hukum Tentang Masalah Hukum dalam Transaksi Derivatif Perdagangan Saham*, Badan Pembinaan Hukum Nasional Departemen Kehakiman RI, Jakarta.

Beechey, M., Gruen, D., dan Vickery, J., 2000, *The Efficient Market Hypothesis: A Survey*, Research Discussion Paper 2000-2001 Reserve Bank of Australia.

Berlianta, H.C., 2005, *Mengenal Valuta Asing*, Cetakan kedua, Gadjah Mada University Press, Jogjakarta.

Bhat, B.R., 1981, *Modern Probability Theory*, Halsted Press, New Delhi.

Brigham, E., & Houston, J.F., 2001, *Manajemen Keuangan Jilid 2*, Edisi 8, Erlangga, Jakarta.

Boediono, 1981, *Mengenal Beberapa Model Kuantitatif dalam Ilmu Ekonomi*, Bagian Penerbitan Fakultas Ekonomi UGM, Jogjakarta.

Capra, F., 2001, *Jaring-jaring Kehidupan: Visi Baru Epistemologi dan Kehidupan*, Cetakan pertama, Fajar Pustaka Baru, Jogjakarta.

Clarke, J., Jandik, T., dan Mandelker, G., *The Efficient Markets Hypothesis*, dapat diunduh di http://www.e-m-h.org/CIJM.pdf.

Copeland, T.E. dan Weston, J.F., 1988, *Financial Theory and Corporate Policy*, Third edition, Addison-Wesley, Canada.

Dagun, S.M., 1992, *Pengantar Filsafat Ekonomi*, Cetakan pertama, Rineka Cipta, Jakarta.

Damodaran, A., 2005, *Market Efficiency: definitions and Test*, dapat diunduh di http:/www.e-m-h.org/Damo.pdf.

De Liso, N. dan Filatrella, G., 2001, *Econophysics: The emergence of a new field?*, Facoltádi Giurisprudenza and Isufi, Universitá di Lecce, Italy.

Dimson, E. dan Mussavian, M., 2000, *Market Efficiency*, The Current State of Business Disciplines, Vol. 3, pp. 959-970.

Drăgulescu, A.A. dan Yakovenko, V.M., 2000, *Statistical Mechanics of Money*, Eur. phys. J. B **17**, 723-729 (2000).

Drăgulescu, A.A. dan Yakovenko, V.M., 2004, *Statistical Mechanics of Money, Income, and Wealth: A Short Survey*, AIP 128.111.9.235.

Fabozzi, F.J., 2000, *Manajemen Investasi Buku 2*, Edisi Pertama, Salemba Empat, Jakarta.

Fama, E.F., 1965, *The Behaviour of Stock-Market Prices*, Journal of Business, Vol 38, Issue 1 (Jan., 1965), 34-105.

Fama, E.F., 1965, *Random Walks in Stock Market Prices*, Financial Analysts Journal, September/October, 55-59. Reprint in January/February 1995, 75-80.

Fama, E.F., *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*, Journal of Finance, Vol. 25, Issue 2, 1969.

Fan, Y., Lui, M., Chen, J., Gao, L., Di, Z. dan Wu, J., 2004, *Network of Econophysics: a weighted network to investigate the development of Econophysics*, cond-mat/0401054 v1.

Hadianti, R., dan Indratno, S.W., 2003, *Proses Stokastik*, Penerbit ITB, Bandung.

Hagerman, R.L., dan Richmond, R.D., 1973, *Random Walks, Martingales and the OTC*, Journal of Finance, Vol 28, Issue 4, 897-909.

Hakiman, 2005, *Model Penentuan Harga IPO di Bursa Efek Jakarta dengan Menggunakan Metode Real Option*, Disertasi Doktor dalam ilmu Ekonomi Program Doktor Manajemen Bisnis Universitas Padjadjaran, Bandung.

Halim, A., 2003, *Analisis Investasi*, Edisi Pertama, Salemba Empat, Jakarta.

Halliday, D. dan Resnick, R., 1992, *Fisika*, Jilid 1, Edisi ketiga, Cetakan kedelapan, Erlangga, Jakarta.

Hull, J.C., 1989, *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, New Jersey.

Husnan, S., 1995, *Manajemen Keuangan Teori dan Penerapan*, Edisi Ketiga, Cetakan Ketiga, BPFE, Jogjakarta.

Ibnul Qayyim, 2005, *Roh*, Cetakan kelimabelas, Pustaka Al Kautsar, Jakarta.

Ilinski, K., 1999, *How to Account for Virtual Arbitrage in the Standard Derivative Pricing*, cond-mat/9902047 v1.

Isaacs, A., (Ed.), 1994, *Kamus Lengkap Fisika*, Edisi Baru,Penerbit Erlangga, Jakarta.

Phynance (Fisika Keuangan), Jawa Pos edisi 23 September 2002.

Kamaruddin, A., 1996, *Dasar-Dasar Manajemen Investasi* , Cetakan Pertama, PT Rineka Cipta, Jakarta.

Kebamoto, 2002, *Ekonofisika, Apa Itu?*, Sinar Harapan Edisi 30 Agustus 2002, dapat diunduh di http://www.fisika-net.lipi.go.id/utama.cgi?artikel&1030986000&10.

Keown, A.J., Scott, D.F., Martin, J.D., Petty, J.W., 2000, *Dasar-dasar Manajemen Keuangan Buku 2*, Edisi Pertama, Salemba Empat, Jakarta.

Kim, M.S., 2005, *Brownian Motion*, dapat diunduh (*download*) di http://www.am.qub.ac.uk/m̃.s.kim/chap4.pdf.

Konferensi Ekonofisika, Applications of Physics in Financial Analysis 4th, Warsawa, 13-15 Nopember 2003. Dapat diunduh di http://www.ekonofisika.com/.

LeRoy, S.F., 1989, *Efficient Capital Markets and Martingales*, Journal of Economic Literature, Vol. XXVII (December 1989), pp. 1583–1621.

Lux, T., 2000, *Microscopic Models of Financial Markets*, Lecture at the Second School on the Mathematics of Economics; Abdus Salam International Center for Theoretical Physics, Trieste, August 21 - September 1, 2000, dapat diunduh di http://www.bwl.uni-kiel.de/vwlinstitute/gwrp/german/team/lux.html.

Ma, J., 1997, *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*, Buletin of the American Mathematical Society (Book review), Volume 34, Number 1.

Mauboussin, M.J., *Revisiting Market Efficiency: The Stock Market as a Complex Adaptive System*, Journal of Applied Corporate Finance, Vol. 14 No. 4 2002.

Mart, T., 2001, *Ekonofisika, Ilmu Fisika untuk Bersaing di Pasar Saham*, Kompas edisi 5 Oktober 2001. Dapat diunduh di http://www.kompas.com/kompascetak/0110/05/iptek/ekon43.htm.

Milis Fisika Indonesia, 16 Nopember 2005, http://groups.yahoo.com/group/fisika_indonesia/message/4564.

Mubyarto, 1987, Moral Ekonomi Pancasila, LP3ES, Jogjakarta.

Mubyarto, 2002, *Ekonofisika atau Sosioekonomi, Mana yang Paling Dibutuhkan Indonesia?*, Kompas edisi 17 September 2002.

Muslich, M., 1997, *Manajemen Keuangan Modern*, Cetakan Pertama, Binarupa Aksara, Jakarta.

Nelson, E., 2001, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Second edition, Princeton University Press.

Oxford CompLex on CD-ROM, 1993, *Concise Oxford Dictionary, Oxford CompLex on CD-ROM*, Eighth Edition, Oxford University Press, United Kingdom.

Papoulis, A., 1992, *Probabilitas, Variabel Random, dan Proses Stokastik*, Edisi kedua, Gadjah Mada University Press, Jogjakarta.

Rodoni, A., & , Yong, O., 2002, *Analisis Investasi dan Teori Portofolio*, Edisi 1, Cetakan 1, Raja Grafindo Persada, Jakarta.

Ross, S.M., 1982, *Stochastic Processes*, Cetakan ke-10 , John Wiley & Sons, Canada.

Rosyid, M.F., 2005, *Mekanika Kuantum*, Laboratorium Fisika Atom Inti FMIPA UGM, Jogjakarta.

Rutterford, J., 1993, *Introduction to Stock Exchange Investment*, Second Edition, Macmilan, London.

Sartono, R.A., 1996, *Manajemen Keuangan Teori dan Aplikasi*, Edisi Ketiga, Cetakan Kedua, BPFE, Jogjakarta.

Sembel, R. dan Baruno, A., 2002, *Louis Bachelier, Pakar yang Hampir Terlupakan*, Kompas edisi 24 Agustus 2002.

Sharpe, W.F., Alexander, G.J., Bailey, J.V., 1999, *Investasi* , Jilid 2, Prenhallindo, Jakarta.

Simanungkalit, S., 2002, *Ekonofisika: Seberapa Barukah?*, Kompas edisi 27 Agustus 2002.

Sinar Harapan, 2004, *Alternatif Investasi Baru: Opsi yang Seksi*, http://www.sinarharapan.co.id/ekonomi/eureka/2004/0514/eur1.html.

Spreij, P., 2001, *Introduction to Stochastic Finance in Continuous Time*, Lectures note of "Hedging en Derivaten" at the Universiteit van Amsterdam in fall 2001.

Stanley, H.E., Amaral, L.A.N., Buldyrev, S.V., Gopikrishnan, P., Plerou, V. dan Salinger, M.A., 2002, *Self-organized Complexity in Economics and Finance*, PNAS Vol. 99 19 Februari 2002.

Stauffer, D., 2000, Econophysics – A New Area for Computational Statistical Physics?, International Journal of Modern Phyisics C, Vol. 11, No. 6, 1081-1087.

Stewart, I., 2001, *Where drunkards hang out*, Nature, Vol 413, 686-687.

Sundjaja, R.S., 2003, *Manajemen Keuangan Dua*, Edisi 4, Literata Lintas Media, Jakarta.

Supranto, J., 1992, *Statistik Pasar Modal* , Cetakan Pertama, Rineka Cipta, Jakarta.

Supratikno, H., 2002, *Ilmu Ekonomi dan Fisika, Sinergi atau Sterilisasi?* Kompas edisi 31 Oktober 2002.

Surya, Y., 2002, *Ekonofisika, Gabungan Ekonomi dan Fisika?*, Kompas edisi 2 September 2002.

Suryadi, P.A., 1990, *Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika*, Cetakan Keempat, Penerbit ITB, Bandung.

Usman, M., Riphat, S. dan Ika, S., 1997, *Pengetahuan Dasar Pasar Modal*, Jurnal Keuangan dan Moneter, Jakarta.

Wang, Y., Wu, J., dan Di, Z., 2005, *Physics of Econophysics*, cond-mat/0401025 v1.

Ware, T., 2005, *Financial derivatives - a brief introduction*, MITACS 6th Annual Conference – May 11 2005, dapat diunduh di http://finance.math.ucalgary.ca/papers/MitacsShortCourse2005.pdf.

Weisstein, E.W., 2005, *Martingale* From MathWorld–A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/Martingale.html.

Weston, J.F., & Copeland, T.E., 1995, *Manajemen Keuangan* , Edisi Kesembilan, Cetakan Pertama, Binarupa Aksara, Jakarta.

Wikipedia (The Free Encyclopedia), 2005, *Random Walk*, http://en.wikipedia.org/wiki/Random_walk.

Wikipedia (The Free Encyclopedia), 2005, *Martingale*, http://en.wikipedia.org/wiki/Martingale.

Wikipedia(The Free Encyclopedia), 2005, *Model (economics)*, http://en.wikipedia.org/wiki/Model_(economics).

Yuliati, S.H., Prasetyo, H., dan Tjiptono, F., 1996, *Manajemen Portofolio dan Analisis Investasi*, Edisi I, Cetakan I, Andi, Jogjakarta.

Sumber Gambar

Sampul bab daftar isi, 1 - https://www.adbusters.org
Sampul bab 2,3 - http://wallpoper.com
Sampul bab 4 - http://tamino.files.wordpress.com
Sampul bab 5 - http://toxiclibs.org
Sampul bab 6,7,8,9 - http://arbitration-blog.eu
Sampul bab 10 - http://www.newcanaanoutback.org
Sampul bab daftar pustaka, penjurus - http://leutikabooks.com

Untuk beberapa gambar yang menjadi ilustrasi dalam isi bab, dengan tidak mengurangi rasa hormat terhadap pemilik gambar, saya mohon maaf sebab sudah kehilangan jejak asal muasal gambar tersebut dari internet sehingga saya tidak dapat menampilkan sumber gambar tersebut.

Penjurus

Tentang Penulis

Rachmad Resmiyanto merupakan dosen Pendidikan Fisika Universitas Ahmad Dahlan (UAD) di Yogyakarta. Ia mulai mengajar di UAD sejak Maret 2007. Gelar sarjana fisika diraih dari UGM tahun 2006 dengan skripsi interdisipliner fisika dan manajemen keuangan, *Model Penentuan Harga Opsi atas Saham: Pendekatan Fisika untuk Kajian Modal*. Pada tahun 2013 ia meraih gelar pascasarjana M.Sc. dari UGM dengan tesis interdisipliner fisika dan ekonomi, *Model Moneter Gas Ideal: Keruntuhan Sistem Moneter Saat ini dan Jalan Keluarnya*.

Buku yang sudah ia tulis diantaranya *Teknologi Media Pembelajaran* (2011) dan bersama 3 penulis lainnya menulis *Kajian Konsep Fisika untuk SMA Jilid 1, 2, dan 3* (2007).

Saat ini ia mengampu matakuliah Sejarah Fisika, Filsafat Sains, Filsafat Pendidikan, Mekanika, Ilmu Alamiah Dasar dan Teknologi Media Pembelajaran.

Penulis tinggal di kampung halamannya Klaten dan dapat dihubungi lewat alamat `rachmadresmi@gmail.com`

Nalar Fisika di Pasar Saham

Pengantar Ekonofisika

Selama ini, banyak orang memahami bahwa fisika dan ekonomi merupakan dua disiplin ilmu yang tidak mungkin saling menjamah. Keduanya bahkan terkesan saling bertolak belakang. Pendapat ini lebih banyak didasarkan pada pandangan bahwa fisika tergolong dalam rumpun ilmu pasti (sains) sedangkan ekonomi bernaung dibawah rumpun ilmu sosial.

Buku ini menyuguhkan lompatan-lompatan nalar dari fisika ke pasar saham. Harapannya, buku ini akan turut melengkapi khazanah buku referensi ekonofisika di Indonesia yang masih sangat langka.

Bagi pembaca dari fisika yang merindukan medan kajian yang menantang, ekonofisika patut untuk dipertimbangkan. Bagi pembaca dari ekonomi yang merindukan cara pandang atau paradigma baru dalam melihat medan persoalan ekonomi, ekonofisika layak diperhitungkan kecanggihannya.

Melalui buku ini, penulis hendak menawarkan gagasan bahwa nalar fisika dapat dibawa ke ranah pasar saham. Pada gilirannya, nalar fisika bukan hanya dapat dibawa ke ranah pasar saham, melainkan juga ke ranah-ranah lainnya.

ISBN 978-602-7677-52-4
9 786027 677524 >

PENDIDIKAN FISIKA
UNIVERSITAS AHMAD DAHLAN
Perguruan Tinggi Muhammadiyah Yogyakarta

GRE publishing