

**SKRIPSI**

**ANALISIS TITIK TETAP BERSAMA DI RUANG METRIK-B  
BERNILAI KOMPLEKS DAN PENERAPANNYA**

**Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat  
Sarjana Ilmu Komputer atau Sarjana Sains Ilmu Matematika**



**RIYANA YUNI SULISTYAWATI**

**NIM. 17106010019**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2021**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Riyana Yuni Sulistyawati

NIM : 17106010019

Judul Skripsi : Analisis Titik Tetap Bersama di Ruang Metrik-b Bernilai Kompleks dan Penerapannya

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Pembimbing I

Malahayati, S.Si., M.Sc.  
NIP. 19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 07 April 2021  
Pembimbing II

Aulia Khifah Futhora, M.Sc  
NIP. 19920605 201903 2 021



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-742/Un.02/DST/PP.00.9/05/2021

Tugas Akhir dengan judul : ANALISIS TITIK TETAP BERSAMA DI RUANG METRIK-B BERNILAI KOMPLEKS DAN PENERAPANNYA

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : RIYANA YUNI SULISTYAWATI  
Nomor Induk Mahasiswa : 17106010019  
Telah diujikan pada : Rabu, 28 April 2021  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang  
Malahayati, S.Si., M.Sc  
SIGNED

Valid ID: 6093719561f44



Penguji I  
Aulia Khifah Futhona, M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 6094baf330827



Penguji II  
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 60935ae797725



Yogyakarta, 28 April 2021  
UIN Sunan Kalijaga  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 6098a49aa8df2

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Riyana Yuni Sulistyawati  
NIM : 17106010019  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 16 April 2021



Riyana Yuni Sulistyawati

## MOTTO

*“Rencana Allah adalah yang terbaik untukku”*

“Jangan katakan tidak bisa sebelum mencoba”

*“Tetap berfikir positif. Lakukan yang bermanfaat dan jangan memaksa dirimu jadi apa yang orang lain mau.”*

“Jangan lupa berdoa, bersyukur, senyum dan bahagia”

*“Learn from yesterday, live for today, hope for tomorrow”*

*(Albert Einstein)*

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Skripsi ini saya persembahkan secara khusus untuk  
kedua orang tua saya tercinta dan adik-adik saya yang saya sayangi.  
Seluruh orang yang saya sayangi dan menyayangi saya  
dengan tulus dan tak henti-hentinya mendoakan saya.*

*Skripsi ini juga saya persembahkan  
untuk diri saya sendiri  
sebagai wujud rasa syukur karena telah berjuang  
hingga mampu mencapai titik ini.*

## PRAKATA

*Bismillahirrohmanirrohim.*

Alhamdulillah robbil'alamin, penulis mengucapkan segala puji dan syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta karunia-Nya kepada penulis sehingga penyusunan skripsi yang berjudul "*Analisis Titik Tetap Bersama di Ruang Metrik-b Bernilai Kompleks dan Penerapannya*" ini dapat terselesaikan dengan tepat waktu. Shalawat beserta salam tak lupa penulis panjatkan kepada Nabi Muhammad SAW yang kita harapkan syafaatnya di yaumul akhir nanti.

Skripsi ini disusun dengan maksud untuk memperoleh gelar Sarjana dalam bidang matematika (S.Mat). Penyusunan skripsi ini tentu melibatkan banyak orang yang telah memberikan bimbingan, dukungan, motivasi dan semangat untuk penulis sehingga penulis mampu untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Phil Al Makin, MA., selaku rektor UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Khurul Wardati, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc., dan Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penasehat Akademik mahasiswa matematika angkatan 2017 UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
5. Malahayati, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi I yang telah banyak membantu dan membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini.

6. Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi II yang telah banyak membantu dan membimbing penulis dalam menyusun skripsi ini.
7. Segenap dosen serta karyawan Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan studi di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
8. Bapak Tugiyono dan Ibu Sumini selaku orang tua penulis yang telah memberikan cinta dan kasih sayang kepada penulis serta selalu mendoakan penulis sehingga penulis mampu untuk menyelesaikan skripsi ini.
9. Adik-adik yang penulis sayangi, Yassintha Azzahra Anjelia Destin dan Yudha Radita Marselio Brillian yang telah memberikan semangat, dukungan dan selalu menghibur penulis dikala penulis menyusun skripsi ini.
10. Sahabat-sahabat penulis semasa kuliah, Julita Sari, Novia Amilatus, Anatansyah Ayomi, Nur Farida dan Fitriani Arifin yang telah memberikan dukungan dan semangat kepada penulis dalam menyusun skripsi ini.
11. Teman-teman satu bimbingan penulis sekaligus sahabat penulis, Julita Sari, Nur Faridah dan Tri Nur Khofifah yang telah memberikan motivasi, semangat dan bersedia mendengarkan keluh kesah penulis selama penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman matematika angkatan 2017 yang telah memberikan dukungan dan momen-momen indah selama perkuliahan di UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta kepada penulis.
13. Teman-teman KKN kelompok 100 Slogo, terimakasih telah memberikan momen-momen kekeluargaan yang begitu indah kepada penulis.
14. Pihak-pihak lainnya yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang turut memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan dan masih terdapat banyak kekurangan, untuk itu penulis mengharap segala kritik dan saran



yang bersifat membangun yang dapat digunakan untuk penelitian selanjutnya. Penulis juga berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi banyak orang terutama dalam dunia akademik dan ilmu pengetahuan. *Aamiin ya Rabbal Aalamiin.*

Yogyakarta, 17 Mei 2021

Penulis,  
Riyana Yuni Sulistyawati.

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL .....</b>	<b>i</b>
<b>HALAMAN PERSETUJUAN .....</b>	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN.....</b>	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN.....</b>	<b>iv</b>
<b>MOTTO .....</b>	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN .....</b>	<b>vi</b>
<b>PRAKATA .....</b>	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>x</b>
<b>DAFTAR LAMBANG .....</b>	<b>xii</b>
<b>INTISARI .....</b>	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>xiv</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Batasan Masalah.....	3
1.3 Rumusan Masalah .....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	4
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
1.6 Tinjauan Pustaka .....	5
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
1.8 Metode Penelitian.....	7
<b>BAB II DASAR TEORI.....</b>	<b>9</b>
2.1 Analisis Real .....	9
2.2 Analisis Kompleks .....	19
2.3 Ruang Metrik dan Ruang Metrik-b Bernilai Real.....	29
2.4 Ruang Metrik bernilai kompleks.....	33
2.5 Titik Tetap dan Titik Tetap Bersama .....	41
2.6 Matriks .....	42

2.7 Sistem Persamaan Linear .....	45
<b>BAB III ANALISIS TITIK TETAP BERSAMA DI RUANG METRIK-B BERNILAI KOMPLEKS DAN PENERAPANNYA .....</b>	<b>48</b>
3.1 Ruang Metrik-b Bernilai Kompleks.....	48
3.2 Fungsi Kompatibel dan Kontinu .....	55
3.3 Teorema Ketunggalan Titik Tetap Bersama di Ruang Metrik-b Bernilai Kompleks .....	60
3.4 Aplikasi Ketunggalan Titik Tetap Bersama pada Sistem Persamaan Linear .....	86
<b>BAB IV PENUTUP .....</b>	<b>89</b>
4.1 Kesimpulan .....	89
4.2 Saran.....	92
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>94</b>

## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Lambang	Keterangan
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli	$Im(z)$	Bagian imajiner dari $z$
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real	$i$	Imajiner
$\mathbb{C}$	Himpunan bilangan kompleks	$ z $	Modulus bilangan kompleks $z$
$\mathbb{R}^+$	Himpunan bilangan real non negatif	$\sqrt{a}$	Akar dari $a$
$ a $	Nilai mutlak bilangan real $a$	$e^{ip}$	$\cos p + i \sin p$
$\in$	Anggota	$\succeq$	Didahului atau sama dengan
$>$	Lebih dari	$\simeq$	Mendahului atau sama dengan
$<$	Kurang dari	$\succ$	Didahului
$\geq$	Lebih dari sama dengan	$\prec$	Mendahului
$\leq$	Kurang dari sama dengan	$\bar{z}$	Konjugat dari $z$
$=$	Sama dengan	$\varepsilon$	Epsilon
$\neq$	Tidak sama dengan	$\delta$	Delta
$\subset$	Subsets	$\infty$	Tak hingga
$\Rightarrow$	Syarat perlu	$X \times X$	$X$ cross $X$
$\Leftarrow$	Syarat cukup	$(X, d)$	Ruang metrik pada himpunan $X$ dengan metrik $d$
$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika	$[a, b]$	Himpunan tertutup $a$ hingga $b$
$\rightarrow$	Menuju	$\mathbb{C}^n$	Euclidean kompleks
$Re(z)$	Bagian real dari $z$	Maks	Maksimal
Sup	Supremum	■	Akhir dari suatu pembuktian
Inf	Infimum		

## INTISARI

### ANALISIS TITIK TETAP BERSAMA DI RUANG METRIK-B BERNILAI KOMPLEKS DAN PENERAPANNYA

Oleh  
Riyana Yuni Sulistyawati  
NIM. 17106010019

Ruang metrik-b bernilai kompleks pertama kali diperkenalkan tahun 2013 sebagai perluasan dari ruang metrik bernilai kompleks. Ruang metrik-b bernilai kompleks merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi fungsi bernilai kompleks dan memenuhi tiga aksioma yaitu positifitas dan definitas, simetri dan ketaksamaan segitiga.

Penelitian ini membahas tentang ketunggalan titik tetap bersama dari empat fungsi yang dipetakan ke dirinya sendiri yang memenuhi ketaksamaan rasional dalam ruang metrik-b bernilai kompleks. Proses konstruksi ketunggalan titik tetap bersama menggunakan sifat kompatibel dan kompatibel lemah pada fungsi. Proses ini dilakukan dengan merujuk penelitian sebelumnya dan memperbaiki konstruksi sebelumnya yang dianggap kurang tepat dengan memperhatikan kaidah-kaidah yang diketahui. Selain itu dibuktikan contoh yang telah diberikan pada penelitian sebelumnya agar memudahkan dalam memahami teorema utama penelitian ini.

Akibat dari teorema utama dalam penelitian ini dibahas pula untuk dijadikan landasan dalam penerapan ketunggalan titik tetap bersama di ruang metrik-b bernilai kompleks, yaitu penerapannya di sistem persamaan linear.

**Kata kunci :** Ruang metrik-b bernilai kompleks, Titik tetap bersama, Kompatibel, Kompatibel lemah, Sistem persamaan linear.

## ABSTRACT

### ANALYSIS COMMON FIXED POINT IN COMPLEX VALUED B-METRIC SPACE AND APPLICATIONS

by

Riyana Yuni Sulistyawati  
NIM. 17106010019

The complex-valued b-metric space concept was introduced in 2013 as a generalization of the complex valued metric spaces. The complex valued b-metric space is a non-empty set with complex valued function and satisfies three axioms that is positivity and definition, symmetry and inequality of triangles.

In this paper discusses the common fixed point result of four self-mapping to satisfy a rational inequality on complex-valued b-metric spaces. To establish the existence and uniqueness of a common fixed point theorem by making use compatible and weakly compatible definitions properties of the function. This process is carried out by referring to previous research and improve the previous construction that was deemed inaccurate by paying attention to known rules. In addition, it is proven that the examples that have been given in previous studies make it easier to understand the main theorem of this paper.

The corollary of the main theorem in this paper are discussed to be used as a basis for the application of a common fixed point in the complex valued b-metric space, its application in systems of linear equations.

**Keyword** : Complex valued b-metric space, Common fixed point, Compatible, Weakly Compatible, System of linear equations.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan terus mengalami perkembangan seiring dengan berjalannya waktu, salah satunya adalah ilmu matematika. Berdasarkan hadist yang berbunyi “Siapa yang menempuh satu jalan untuk mencari ilmu, maka Allah akan memudahkan baginya jalan untuk ke surga” (HR. Muslim), secara tidak langsung hadist tersebut menyatakan bahwa Allah memerintahkan umatnya untuk terus belajar dan menuntut ilmu, baik ilmu agama maupun ilmu pengetahuan lainnya. Matematika sendiri merupakan ilmu yang secara dasar mempelajari tentang bilangan, bentuk, besaran dan ruang. Allah SWT telah membahas mengenai ilmu matematika di dalam Al-Qur’an, diantaranya dalam Q.S Al-Kahfi ayat 25 sebagai berikut :

وَلْيُتُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَازْدَادُوا تِسْعًا

artinya : “Dan mereka tinggal dalam gua selama tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun.”

dimana menjelaskan tentang konsep penjumlahan dan dalam ayat lainnya Q.S. Al-Ankabut ayat 14 menjelaskan tentang konsep pengurangan sebagai berikut :

وَلَقَدْ أَرْسَلْنَا نُوحًا إِلَىٰ قَوْمِهِ فَلَبِثَ فِيهِمْ أَلْفَ سَنَةٍ إِلَّا خَمْسِينَ عَامًا فَأَخَذَهُمُ الطُّوفَانُ وَهُمْ ظَالِمُونَ

artinya : “Dan sungguh, Kami telah mengutus Nuh kepada kaumnya, maka dia tinggal bersama mereka selama seribu tahun kurang lima puluh tahun. Kemudian mereka dilanda banjir besar, sedangkan mereka adalah orang-orang yang zalim.”

Matematika terbagi dalam beberapa bidang konsentrasi salah satunya ialah analisis. Secara bahasa, analisis berarti memecah atau memisahkan sedangkan secara istilah analisis berarti proses memecah suatu topik yang kompleks menjadi beberapa bagian yang sederhana dengan tujuan memiliki pemahaman yang lebih baik. Allah SWT menjelaskan akan tanda-tanda kebesaran-Nya bagi orang-orang yang berakal dalam Q.S. Al-Imron ayat 190 sebagai berikut :

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ

artinya : “Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal.”

yang apabila dikaitkan secara matematis, berakal atau berpikir adalah kata lain dari proses penalaran yang erat kaitannya dengan analisis matematika. Analisis matematika lebih menekankan pada pengembangan konsep dasar dan teori sehingga proses penalaran penting digunakan untuk memperoleh prinsip-prinsip yang berupa definisi, aksioma, teorema serta pembuktiannya.

Salah satu bagian yang menarik dalam analisis ialah analisis fungsional, beberapa konsep di dalam analisis fungsional merupakan hasil dari perumuman konsep lainnya, salah satunya adalah ruang metrik. Metrik merupakan perumuman dari konsep jarak antara pasangan elemen dari dua bilangan di himpunan bilangan real yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Lebih lanjut metrik adalah suatu fungsi dengan domain sembarang himpunan tak kosong menuju kodomain bilangan real atau fungsi bernilai real dengan definisi urutan dalam bilangan real. Selanjutnya sembarang himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu metrik disebut ruang metrik.

Konsep ruang metrik pertama kali diperkenalkan oleh Maurice Rene Frechet seorang ilmuwan matematika asal Perancis pada tahun 1906. Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan, ruang metrik turut mengalami perkembangan salah satunya adalah munculnya ruang metrik-b.

Ruang metrik-b pertama kali diperkenalkan oleh Bakhtin pada tahun 1989 yang merupakan generalisasi dari ruang metrik. Tahun 1993, Czerwik menampilkan suatu generalisasi dari teorema titik tetap Banach pada ruang metrik-b.

Ruang metrik-b banyak di aplikasikan atau di kembangan pada fungsi yang mempunyai titik tetap. Teorema titik tetap merupakan salah satu yang penting dalam pembahasan mengenai ruang metrik. Teorema ini menunjukkan keberadaan dan ketunggalan titik tetap pada fungsi di ruang metrik. Teorema titik tetap pertama kali diperkenalkan oleh Banach tahun 1922 yang kemudian dikenal dengan prinsip kontraksi Banach.



Ruang metrik- $b$  mengalami perkembangan yang begitu pesat, selanjutnya Rao terinspirasi dari perkembangan ruang metrik bernilai kompleks ia mengembangkan konsep ruang metrik- $b$  dan berhasil mendefinisikan ruang metrik- $b$  bernilai kompleks pada tahun 2013.

Penerapan dari titik tetap bersama pada ruang metrik bernilai kompleks diperkenalkan oleh Azzam tahun 2011 pada sistem persamaan integral Urysohn yang membuktikan bahwa sistem persamaan tersebut memiliki solusi bersama yang tunggal.

Para ahli matematika terus menganalisis tentang penerapan dari titik tetap bersama pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks. Salah satunya dilakukan oleh Khaled Berrah melalui jurnalnya yang berjudul "*Application and Theorem on Common Fixed Point in Complex Valued  $b$ -Metric Space*" yang menganalisis tentang teorema ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional serta menerapkannya pada sistem persamaan linear.

Berdasarkan perkembangan penelitian terhadap ruang metrik dan teori titik tetapnya yang menarik untuk dipelajari hingga saat ini, terutama pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang telah banyak diungkapkan oleh ilmuwan matematika. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dilakukan penjabaran terhadap jurnal yang ditulis oleh Khaled Berrah yang berjudul "*Application and Theorem on Common Fixed Point in Complex Valued  $b$ -Metric Space*" serta mengkontruksi ulang bukti-bukti pada pembuktian teorema ketunggalan titik tetap bersama untuk fungsi yang memenuhi ketaksamaan rasional pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks serta penerapannya pada sistem persamaan linear yang akan menjadi tema pokok pada penelitian ini.

## **1.2 Batasan Masalah**

Pembatasan masalah dalam sebuah penelitian memiliki peran yang sangat penting, salah satunya untuk menghindari pembahasan objek yang terlalu meluas sehingga dapat keluar dari inti dan tujuan penelitian. Selain itu pembatasan

masalah dapat digunakan untuk membantu penulis agar lebih fokus dan terarah pada objek yang dituju.

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka penelitian ini dibatasi pada teorema ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional serta penerapannya pada sistem persamaan linear dan juga sifat-sifat yang mendukung dalam pembuktian teorema.

### **1.3 Rumusan Masalah**

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana konsep ruang metrik- $b$  bernilai kompleks?
2. Bagaimana pembuktian ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional?
3. Bagaimana penerapan ketunggalan titik tetap bersama yang diperoleh pada no 2 di sistem persamaan linear?

### **1.4 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menganalisis konsep ruang metrik- $b$  bernilai kompleks.
2. Memberikan alternatif bukti pada teorema ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional.
3. Menganalisis penerapan ketunggalan titik tetap yang diperoleh pada no 2 di sistem persamaan linear.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Hasil pada penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain sebagai berikut :

1. Memberikan pengetahuan tentang konsep ruang metrik- $b$  bernilai kompleks.

2. Memberikan pengetahuan tentang ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional serta langkah-langkah pembuktiannya.
3. Memberikan gambaran mengenai penerapan dari ketunggalan titik tetap bersama yang diperoleh pada nomor 2 di sistem persamaan linear.

## 1.6 Tinjauan Pustaka

Konsep ruang metrik- $b$  muncul pertama kalinya dalam jurnal yang berjudul "*The contraction mapping principle in quasimetric spaces*" karya Bakhtin pada tahun 1989 yang merupakan generalisasi dari ruang metrik. Beberapa tahun berselang, Czerwik (1993) menampilkan suatu generalisasi dari prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik- $b$  dalam jurnalnya yang berjudul "*Contraction mappings in  $b$ -metric spaces*". Teorema titik tetap Banach atau lebih dikenal dengan prinsip kontraksi Banach muncul pada tahun 1922.

Jurnal yang berjudul "*Common fixed point theorems in complex valued metric spaces*" yang ditulis oleh Azam (2011) memperkenalkan ruang metrik bernilai kompleks dan ketunggalan titik tetapnya pada fungsi yang memenuhi ketaksamaan rasional dan menerapkannya pada sistem persamaan integral Urysohn. Kemudian beberapa peneliti telah mengembangkan hasil penelitian Azzam pada ruang metrik bernilai kompleks seperti yang dilakukan oleh Bhatt (2011) melalui jurnalnya yang berjudul "*Common fixed point of mappings satisfying rational inequality in complex valued metric space*" dan Rouzkard (2012) dengan jurnalnya yang berjudul "*Some common fixed point theorems on complex valued metric spaces*" yang membuktikan teorema titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional dengan kondisi yang berbeda. Selanjutnya Sintunavarat (2012) melalui jurnalnya yang berjudul "*Generalized common fixed point theorems in complex valued metric spaces and applications*" mengimprovisasi kondisi kontraksi yang berbeda dan menerapkan aplikasinya di sistem persamaan integral Urysohn. Kemudian, Verma (2013) melalui jurnalnya yang berjudul "*Common fixed point theorems for a pair of mappings in complex valued metric spaces*" yang

membuktikan teorema titik tetap bersama pada fungsi yang memenuhi kondisi kontraksi quasi di ruang metrik bernilai kompleks serta mendefinisikan fungsi maksimum pada relasi urutan parsial di ruang metrik bernilai kompleks yang akan digunakan pada penelitian ini.

Konsep ruang metrik- $b$  bernilai kompleks diperkenalkan oleh Rao (2013) melalui jurnalnya yang berjudul “*A common fixed point theorem in complex valued  $b$ -metric spaces*”. Selanjutnya, jurnal yang berjudul “*Some common fixed point theorems in complex valued  $b$  –metric spaces*” karya Aiman (2014) merupakan generalisasi dari hasil penelitian Azam dan Bhatt dengan mengimprovisasi kondisi kontraksi dan membuktikan titik tetap bersama pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks.

Ruang metrik- $b$  bernilai kompleks terus berkembang hingga akhirnya Khaled Berrah (2019) melalui jurnalnya yang berjudul “*Application and Theorem on Common Fixed Point in Complex Valued  $b$ -Metric Space*” menganalisis dan membuktikan tentang ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional serta menerapkan aplikasinya pada sistem persamaan linear. Penelitian ini akan mengkontruksi ulang bukti yang sudah dilakukan oleh Khaled dkk dalam membuktikan ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional serta menerapkan aplikasinya pada sistem persamaan linear.

## **1.7 Sistematika Penulisan**

Sistematika penulisan pada skripsi ini secara garis besar terdiri dari empat bab dengan rincian sebagai berikut :

### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, dan metode penelitian.

### **BAB II LANDASAN TEORI**

Bab ini menjelaskan mengenai beberapa definisi, teori, dan sifat yang menjadi dasar dalam mendukung pembuktian bab berikutnya di antara lain dasar-dasar analisis real, dasar-dasar analisis kompleks, definisi ruang metrik, definisi ruang metrik- $b$ , definisi ruang metrik bernilai kompleks, teorema titik tetap, dasar-dasar operasi matriks serta definisi sistem persamaan linear.

### BAB III PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan mengenai definisi ruang metrik- $b$  bernilai kompleks beserta contohnya, barisan pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks, definisi kompatibel dan kompatibel lemah, definisi kontinu, teorema ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional beserta langkah-langkah pembuktiannya serta penerapan dari hasil yang telah diperoleh sebelumnya pada sistem persamaan linear.

### BAB IV PENUTUP

Bab ini berisikan penutup yang berupa kesimpulan yang diambil dari hasil penelitian serta saran-saran yang harus disampaikan kepada pembaca atau peneliti selanjutnya.

## 1.8 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan menganalisis beberapa sumber tertulis pada jurnal dan dibantu oleh referensi-referensi yang sesuai dengan tema penelitian. Adapun penulis menggunakan pendekatan ilmiah yang bersifat kualitatif yang dapat diartikan sebagai penilaian dan pendapat peneliti tertuang secara eksplisit di dalam penelitian ini.

Pembahasan mengenai aplikasi dan ketunggalan titik tetap bersama pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks diawali dengan memahami konsep-konsep dasar analisis real dan analisis kompleks, definisi ruang metrik dan ruang metrik- $b$  bernilai kompleks dan memahami definisi titik tetap bersama sebagai landasan teori serta beberapa teorema yang menjadi pendukung dalam pembuktian.

Langkah selanjutnya dilanjutkan dengan menganalisis konsep ruang metrik- $b$  bernilai kompleks dan menganalisis ketunggalan titik tetap bersama

pada fungsi di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional.

Langkah selanjutnya adalah menganalisis akibat dari teorema ketunggalan titik tetap bersama yang diperoleh sebelumnya yang akan digunakan untuk menganalisis penerapannya pada sistem persamaan linear.

Langkah terakhir adalah menganalisis penerapan ketunggalan titik tetap bersama yang telah diperoleh sebelumnya pada sistem persamaan linear. Proses analisis tersebut dibantu oleh beberapa jurnal dan buku yang mendukung dalam proses.

Langkah-langkah pembuktian teorema tersebut mengacu pada jurnal yang ditulis oleh Khaled Berrah yang berjudul "*Application and Theorem on Common Fixed Point in Complex Valued  $b$ -Metric Space*" jurnal inilah yang menjadi jurnal utama pada penelitian ini . Beberapa langkah pembuktian dari teorema dan aplikasinya tidak dijelaskan dalam jurnal tersebut sehingga perlu digunakan buku dan jurnal-jurnal lain yang berhubungan sebagai referensi sehingga diharapkan tidak ada kebingungan bagi para pembaca.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa ruang metrik- $b$  bernilai kompleks merupakan perluasan ruang metrik bernilai kompleks. Setiap ruang metrik bernilai kompleks merupakan ruang metrik- $b$  bernilai kompleks dengan nilai  $s = 1$  namun tidak berlaku sebaliknya. Selanjutnya definisi barisan konvergen dan Cauchy pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks sama dengan definisi pada ruang metrik bernilai kompleks.

Pembuktian ketunggalan titik tetap bersama pada fungsi di ruang metrik- $b$  lengkap bernilai kompleks yang memenuhi ketaksamaan rasional yang dibahas pada skripsi ini adalah pembuktian empat fungsi yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu dan ditunjukkan ke-empat fungsi tersebut memiliki titik tetap bersama yang tunggal. Terdapat empat langkah utama dalam pembuktiannya yaitu : *Pertama*, diawali dengan membentuk suatu barisan dalam ruang metrik- $b$  bernilai kompleks dimana jaminan terbentuknya barisan tersebut dikarenakan memenuhi kondisi pada hipotesa. *Kedua*, menunjukkan bahwa barisan yang terbentuk merupakan barisan Cauchy. *Ketiga*, karena barisan yang terbentuk merupakan barisan Cauchy di ruang metrik- $b$  lengkap bernilai kompleks maka barisan tersebut konvergen di dalamnya. *Keempat*, titik limit pada barisan yang telah ditentukan di langkah ketiga, menjadi calon titik tetap bersama untuk ke-empat fungsi. Hasil akhir pada penelitian ini menunjukkan bahwa ke-empat fungsi pada ruang metrik- $b$  bernilai kompleks memiliki titik tetap bersama yang tunggal.

Merujuk pada teorema utama tentang ketunggalan titik tetap bersama di ruang metrik- $b$  bernilai kompleks memunculkan teorema baru yang merupakan akibat dari teorema tersebut. Akibat (teorema) ini yang digunakan dalam mengkontruksi proses penerapan ketunggalan titik tetap bersama di ruang metrik-

b bernilai kompleks pada sistem persamaan linear. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa sistem persamaan linear memiliki solusi yang tunggal.

Skripsi ini juga mengkontruksi ulang beberapa penulisan pembuktian yang kurang tepat yang ditulis oleh Khaled Berrah, Abdelkrim Aliouche dan Taki eddine Oussaeif pada jurnalnya yang berjudul “*Applications and Theorem on Common Fixed Point in Complex Valued b-Metric Space*”. Revisi terhadap penelitian tersebut yaitu :

1. Penerapan kondisi (C2) untuk menunjukkan  $Pu = u$  pada persamaan (3.21) dimana pada penelitian sebelumnya ditulis:

$$M(Pz_{2n}, z_{2n+1}) = \max \left\{ \begin{array}{l} d(PPz_{2n}, Qz_{2n+1}), d(PPz_{2n}, SPz_{2n}), \\ d(Qz_{2n+1}, Tz_{2n+1}), \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} d(Pz_{2n+1}, SP_{2n}) \\ + d(QPz_{2n}, Tz_{2n+1}) \end{array} \right], \\ \frac{d(PPz_{2n}, SPz_{2n})d(Qz_{2n+1}, Tz_{2n+1})}{1 + d(PPz_{2n}, Qz_{2n+1})} \end{array} \right\},$$

yang seharusnya:

$$M(Pz_{2n}, z_{2n+1}) = \max \left\{ \begin{array}{l} d(PPz_{2n}, Qz_{2n+1}), d(PPz_{2n}, SPz_{2n}), \\ d(Qz_{2n+1}, Tz_{2n+1}), \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} d(Qz_{2n+1}, SP_{2n}) \\ + d(PPz_{2n}, Tz_{2n+1}) \end{array} \right], \\ \frac{d(PPz_{2n}, SPz_{2n})d(Qz_{2n+1}, Tz_{2n+1})}{1 + d(PPz_{2n}, Qz_{2n+1})} \end{array} \right\}.$$

2. Penerapan kondisi (C2) untuk menunjukkan  $Pu = u$  pada persamaan (3.22) untuk  $n \rightarrow \infty$  dimana pada penelitian sebelumnya ditulis:

$$M(Pu, u) = \max \left\{ \begin{array}{l} d(Pu, u), d(Pu, Pu), d(u, Pu), \\ \frac{1}{2} [d(Pu, Pu) + d(Pu, u)], \\ \frac{d(Pu, Pu)d(u, u)}{1 + d(Pu, u)} \end{array} \right\},$$



yang seharusnya:

$$M(u, u) = \text{maks} \left\{ \begin{array}{l} d(Pu, u), d(Pu, Pu), d(u, u), \\ \frac{1}{2} [d(u, Pu) + d(Pu, u)], \\ \frac{d(Pu, Pu)d(u, u)}{1 + d(Pu, u)} \end{array} \right\}.$$

3. Berdasarkan Definisi 3.1.1 (bk3) pada ruang metrik-b bernilai kompleks Pertidaksamaan (3.23) pada penelitian sebelumnya yang ditulis:
- $$d(Su, u) \lesssim s(d(Pu, Tz_{2n+1}) + d(Tz_{2n+1}, u)),$$

yang seharusnya:

$$d(Su, u) \lesssim s(d(Su, Tz_{2n+1}) + d(Tz_{2n+1}, u)).$$

4. Setelah memperoleh hasil dimana  $Pu = Su = u$  dan  $Qu = Tu$  maka persamaan (3.27) yang pada penelitian sebelumnya ditulis:

$$M(u, v) = \text{maks} \left\{ \begin{array}{l} d(u, Tu), d(u, u), \\ d(Tu, Tu), \frac{1}{2} [d(Tu, u) + d(Tu, Tu)], \\ \frac{d(u, u)d(Tu, Tu)}{1 + d(u, Tu)} \end{array} \right\},$$

yang seharusnya:

$$M(u, u) = \text{maks} \left\{ \begin{array}{l} d(u, Tu), d(u, u), \\ d(Tu, Tu), \frac{1}{2} [d(Tu, u) + d(u, Tu)], \\ \frac{d(u, u)d(Tu, Tu)}{1 + d(u, Tu)} \end{array} \right\}.$$

5. Persamaan (3.33) yang pada penelitian sebelumnya ditulis:

$$\begin{aligned}
d_2(Tz, Tw) &\lesssim (n\beta^2)^{\frac{1}{2}} \left[ n \left( \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 + i \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\lesssim (n\beta) \left[ \left( \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 + i \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= n\beta d_2(z, w).
\end{aligned}$$

yang seharusnya:

$$\begin{aligned}
d_2(Tz, Tw) &\lesssim (n\beta^2)^{\frac{1}{2}} \left[ n \left( \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 + i \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= (n\beta) \left[ \left( \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 + i \left| \sum_{j=i}^n (z_j - w_j) \right|^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= n\beta d_2(z, w).
\end{aligned}$$

## 4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan penulis pada skripsi ini maka saran-saran yang dapat disampaikan penulis untuk peneliti berikutnya adalah:

1. Skripsi ini belum terdapat contoh yang menunjukkan bahwa ruang metrik bernilai kompleks merupakan ruang metrik-b bernilai kompleks dengan nilai  $s = 1$  dan belum menunjukkan contoh bahwa ruang metrik-b bernilai kompleks belum tentu merupakan ruang metrik bernilai kompleks sehingga diharapkan peneliti selanjutnya dapat memberikan contoh agar lebih mempermudah dalam memahami hubungan antara ruang metrik bernilai kompleks dan ruang metrik-b bernilai kompleks.
2. Mengembangkan penelitian tentang teorema ketunggalan titik tetap bersama di ruang metrik-b lengkap bernilai kompleks dengan kondisi-kondisi yang berbeda serta penerapannya.
3. Penerapan ketunggalan titik tetap bersama di ruang metrik-b lengkap bernilai kompleks tidak hanya dapat dilakukan pada sistem persamaan

linear melainkan dapat pula dilakukan pada sistem persamaan integral Urysohn, sehingga peneliti selanjutnya dapat mengembangkan penerapannya pada sistem persamaan integral Urysohn.

Demikian saran yang dapat penulis sampaikan, semoga skripsi ini dapat menambah rasa ingin tahu pembaca dan menjadi inspirasi bagi pembaca untuk mengembangkan penelitian lebih lanjut tentang teorema ketunggalan titik tetap bersama di ruang metrik- $b$  lengkap bernilai kompleks dan penerapannya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H., 1987, *Aljabar Linear Elementer*, edisi ke-5, (diterjemahkan oleh: Silaban, P., Susila, I, N.), Erlangga, Jakarta.
- Azam, A., Fisher, B., dan Khan, M., 2011, Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim*, 32, 3, 243–253.
- Bakhtin, I.A., 1989, The Contraction Mapping Principle in Quasimetric Spaces, *Funct. Anal.*, 30, 26–37.
- Bartle, R.G., dan Sherbert, D.R., 2000, *Introduction to Real Analysis*, Edisi ke-3, John Wiley & Sons, Inc, New York.
- Berrah, K., Aliouche, A., dan Oussaeif, T.E, 2019, Applications and Theorem on Common Fixed Point in Complex Valued b-Metric Space, *AIMS Mathematics*, 4, 3, 1019-1033.
- Bhatt, S., Chaukiyal, S., dan Dimri, R.C., 2011, Common Fixed Point of Mappings Satisfying Rational Inequality in Complex Valued Metric Space, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 73, 2, 159–164.
- Brown, R.V., dan Churchill, J.W., 2009, *Complex Variable and Applications*, Edisi ke- 8, Mc Graw Hill High Education, New York.
- Chauhan, O.P., Singh, D., Joshi, V., dan Rathore, M.S., 2017, Existence of Solution of Urysohn Integral Equation Through Generalized Contractive Mapping, *Bol. Soc. Paran. Mat*, 32, 2, 101-113.
- Czerwik, S., 1993, Contraction Mappings in b-Metric Spaces, *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1, 1, 5–11.
- Dubey, A.K., dan Tripathi, M., 2015, Common Fixed Point Theorem in Complex Valued b-Metric Space for Rational Contractions, *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, 7, 3, 149–161.
- Giray, Cem., 2008, *Arithmetic and Geometri Sequences*, Istambul: Zambak.
- Horn, R.A., dan Johnson, C.R., 2013, *Matrix Analysis*, Edition ke-2, Cambridge University Press, New York.

- Kreyszig, Erwin., 1978, *Introduction to Functional Analysis with Application*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Mukheimer, Aiman A., 2014, Some Common Fixed Point Theorems in Complex Valued  $b$ -Metric Spaces, *Hindawi Publishing Corporation*.
- Rao, K. P. R., Swamy, P. R., dan Prasad, J. R., 2013, A Common Fixed Point Theorem in Complex Valued  $b$ -Metric Spaces, *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*, 1, 1, 1–8.
- Shirali, S., dan Vasudeva, H. L., 2006, *Metric Spaces*, Springer – Verlag, London.
- Sintunavarat, W., dan Kumam, P., 2012, Generalized Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces and Applications, *Journal of Inequalities and Applications*, 2012, 84, 1-12.
- Yadav, G., Sharma, R.K., dan Prajapati, G.L., 2020, Common Fixed Point Theorems of Compatible Maps in Complex Valued  $b$ -Metric Spaces, *Journal of Scientific Research*, 12, 4, 431-446

## CURRICULUM VITAE

### A. Biodata Pribadi

Nama Lengkap : Riyana Yuni Sulistyawati  
Tempat, Tanggal Lahir : Sragen, 05 Juni 1999  
Alamat Asal : Dk. Bibis RT:10/03, Kel. Jati,  
Kec. Masaran, Kab. Sragen  
Jenis Kelamin : Perempuan  
E-mail : [riyanayuni56@gmail.com](mailto:riyanayuni56@gmail.com)  
Nomor Handphone : 0895605408817



### B. Latar Belakang Pendidikan Formal

Jenjang Pendidikan	Nama Sekolah	Tahun
Sekolah Dasar	SD Pringanom 1	2005-2011
Sekolah Menengah Pertama	SMP N 1 Masaran	2011-2014
Sekolah Menengah Atas	SMA N 2 Sragen	2014-2017
Strata 1	UIN Sunan Kalijaga	2017-2021

### C. Pengalaman Organisasi

Nama Organisasi	Jabatan	Tahun
HM-PS Matematika	Staff Departemen Pendidikan	2018-2019
HM-PS Matematika	Sekretaris 1	2019-2020