

**SKRIPSI**

**KESAMAAN TOPOLOGI DI RUANG BERNORMA DAN  
RUANG BERNORMA-G**

**Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat Sarjana  
Ilmu Komputer atau Sarjana Sains Ilmu Matematika**



**STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**JULITA SARI  
NIM. 17106010033**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

**2021**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Peretujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Julita Sari

NIM : 17106010033

Judul Skripsi : Ekuivalensi Topologi di Ruang Bernorma dan Ruang Bernorma-G

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Pembimbing I

Malahayati, S.Si., M.Sc.  
NIP. 19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 05 Mei 2021  
Pembimbing II

Aulia Khifah Futhoha, M.Sc  
NIP. 19920605 201903 2 021

ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
**YOGYAKARTA**



## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-946/Un.02/DST/PP.00.9/06/2021

Tugas Akhir dengan judul : KESAMAAN TOPOLOGI DI RUANG BERNORMA DAN RUANG BERNORMA-G

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : JULITA SARI  
Nomor Induk Mahasiswa : 17106010033  
Telah diujikan pada : Selasa, 11 Mei 2021  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR

 Ketua Sidang  
Malahayati, S.Si., M.Sc  
SIGNED  
Valid ID: 60f9ab8456d9c

 Penguji I  
Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.  
SIGNED  
Valid ID: 60c3203188e49

 Penguji II  
Aulia Khifah Futhona, M.Sc.  
SIGNED  
Valid ID: 60c2f28c32462



 Yogyakarta, 11 Mei 2021  
UIN Sunan Kalijaga  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Dr. Dra. Hj. Khirul Wardati, M.Si.  
SIGNED  
Valid ID: 60e7032cb798

SUNAN KALIJAGA UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Julita Sari  
NIM : 17106010033  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 05 Mei 2021



Julita Sari

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## MOTTO

*“Selama ada keyakinan semua akan menjadi mungkin”*

*“You’re stronger than you think”*

“Tidak perlu menjelaskan tentang dirimu kepada siapa pun,  
karena yang menyukaimu tidak butuh itu. Dan yang  
membencimu tidak akan percaya itu”

~Ali bin Abi Thalib~

*“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan  
kesanggupannya”*

~QS. Al-Baqarah:286~

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Skripsi ini saya persembahkan untuk bapak dan mamak tercinta, yang selalu memberikan semangat kepada saya, selalu mendukung setiap langkah yang saya tempuh, mendengar keluh kesah saya dan pastinya selalu mendoakan yang terbaik buat saya.*

*Selain itu juga saya persembahkan skripsi ini untuk kakak saya tersayang yang selalu mendengarkan curahan hati saya dan tidak bosan memberikan semangat kepada saya.*

*Tak lupa pula saya persembahkan skripsi ini untuk diri saya sendiri, terima kasih sudah berjuang sejauh ini sehingga skripsi ini dapat selesai.*



## PRAKATA

*Bismillahirrahmanirrahim*

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **“Kesamaan Topologi di Ruang Bernorma dan Ruang Bernorma-G”** sebagai syarat menyelesaikan Program Sarjana (S1) pada Program Sarjana Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.

Skripsi ini disusun dengan banyak hambatan dan rintangan yang penulis hadapi. Namun pada akhirnya penulis dapat melaluinya berkat bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Maka dari itu pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang terlibat dalam membantu penulis menyelesaikan skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. Phil Al Makin, S.Ag., M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. M. Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc., dan Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Penasehat Akademik mahasiswa Matematika angkatan 2017 Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
5. Malahayati, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi I yang telah berkenan memberikan banyak bantuan, bimbingan, arahan,

motivasi serta solusi saat penulis mengalami kesulitan dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

6. Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi II yang telah berkenan memberikan banyak bantuan, bimbingan, arahan, motivasi serta solusi saat penulis mengalami kesulitan dalam menyelesaikan penyusunan skripsi ini.
7. Seluruh Dosen Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat kepada penulis selama masa perkuliahan.
8. Orang tua penulis yaitu Bapak Kaman dan Mamak Padinah yang selalu memberi semangat kepada penulis, bersedia mendengarkan keluh kesah penulis, memberi arahan kepada penulis dan pastinya selalu mendoakan yang terbaik untuk penulis.
9. Kakang Fitnanto selaku kakak penulis yang selalu mendengarkan curahan hati penulis, selalu mendukung penulis, dan tidak pernah bosan memberi semangat kepada penulis.
10. Riyana Yuni Sulistyawati, Anatansyah Ayomi Anandari, Diwanti Panca Satiti, Hannifa Irmajihan Nabila, Novia Amilatus Sholikhah, Anistyatun Nur Azizah selaku sahabat-sahabat penulis yang selalu sedia mendengarkan keluhan penulis, menyemangati penulis dan menemani penulis bergadang dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
11. Teman-teman satu bimbingan, Riyana Yuni Sulistyawati, Tri Nur Khofifah dan Nur Faridah yang selalu saling menyemangati satu sama lainnya, mengerjakan skripsi bersama-sama, yang selalu mengingatkan agar tidak malas dan segera menyelesaikan penulisan skripsi ini. Hingga akhirnya kami semua bisa sama-sama menyelesaikan penulisan skripsi masing-masing.
12. Semua teman-teman matematika penulis, terutama teman-teman matematika angkatan 2017 yang telah memberikan momen-momen indahanya selama kurang lebih 3,5 tahun ini, memberi kesan yang



sangat mendalam bagi penulis, menghibur dan memberikan kebahagiaan kepada penulis.

13. Sahabat/i PMII Rayon Aufklarung terutama Korp Spektrum yang telah memberikan banyak pengalaman selama masa perkuliahan.
14. Noval Mochammad Faza yang selalu memberi dukungan, mendengar keluhan serta memberikan kisah indah dalam proses penyelesaian skripsi ini.
15. Semua pihak yang terkait yang tidak bisa disebutkan satu persatu, terima kasih sudah membantu dalam proses penyusunan skripsi ini.

Penulis sangat menyadari bahwa peulisan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, oleh sebab itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca dan semua pihak.

Yogyakarta, 22 Juni 2021

Penulis,  
Julita Sari

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	<b>iv</b>
<b>MOTTO</b> .....	<b>v</b>
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	<b>vi</b>
<b>PRAKATA</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>x</b>
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	<b>xi</b>
<b>DAFTAR LAMBANG</b> .....	<b>xii</b>
<b>INTISARI</b> .....	<b>xiii</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>xiv</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Batasan Masalah .....	3
1.3 Rumusan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	4
1.6 Tinjauan Pustaka .....	4
1.7 Sistematika Penulisan .....	5
1.8 Metode Penelitian .....	6
<b>BAB II DASAR TEORI</b> .....	<b>7</b>
2.1 Ellips .....	7
2.2 Konsep Dasar Bilangan Real .....	9
2.3 Ruang Vektor .....	10
2.4 Ruang Topologi .....	12
2.5 Analisis Fungsional .....	22
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	<b>42</b>
3.1 Ruang Bernorma-G .....	42
3.2 Topologi Norma-G .....	47
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	<b>55</b>
4.1 Kesimpulan .....	55
4.2 Saran .....	55
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>56</b>
<b>CURRICULUM VITAE</b> .....	<b>57</b>

## DAFTAR GAMBAR

<b>Gambar 2. 1 Kurva Ellips .....</b>	<b>7</b>
<b>Gambar 3. 1 Kurva Ellips .....</b>	<b>48</b>



## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Lambang	Keterangan
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real	$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika
$ x $	Nilai mutlak	$\forall$	Untuk setiap
$\in$	Anggota	$\alpha$	Alpha
$\notin$	Bukan anggota	$\beta$	Beta
$>$	Lebih dari	$\delta$	Delta
$<$	Kurang dari	$\infty$	Tak hingga
$\geq$	Lebih dari sama dengan	$\cup$	Gabungan
$\leq$	Kurang dari sama dengan	$\cap$	Irisan
$=$	Sama dengan	$\emptyset$	Himpunan kosong
$\neq$	Tidak sama dengan	$\Delta$	Segitiga
$\subseteq$	Subset	$\exists$	Terdapat
$\subset$	Proper subset	$\sigma$	Sigma
$\Rightarrow$	Syarat perlu	$\tau$	Tau
$\Leftarrow$	Syarat cukup	$\blacksquare$	Akhir dari suatu pembuktian
$\Sigma$	Sigma	$\ x\ $	Norma $x$
$\mathcal{B}$	Basis untuk topologi	$E^c$	Himpunan $E$ komplemen
$\max$	Maksimum	Sup	Suprimum
$P(X)$	Power set	$\mathbb{R}^+$	Himpunan bilangan real positif
$\ x\ _G$	Norma $G$	$\bigcup_{B \in \mathcal{B}}$	Gabungan anggota basis
$\bigcup_{x \in X} \bigcup_{r > 0} B_G(x, r)$	Gabungan bola terbuka	$B_G(x, r)$	Bola terbuka
$E_G(x, y, r)$	Ellips terbuka	$\bigcup_{i \in I} G_i$	Gabungan himpunan terbuka

## INTISARI

### KESAMAAN TOPOLOGI DI RUANG BERNORMA DAN RUANG BERNORMA-G

Oleh  
Julita Sari  
NIM. 17106010033

Ruang bernorma-G pertama kali diperkenalkan oleh Kamran Alam Khan (2014). Ruang bernorma-G merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norma-G yang memenuhi lima aksioma. Ruang bernorma-G merupakan kasus khusus dari ruang bernorma dengan definisi fungsi norma tertentu, sehingga setiap konsep, pengertian dan sifat-sifat yang berlaku di ruang bernorma berlaku pula di ruang bernorma-G.

Peneliti sebelumnya menyebutkan bahwa ruang bernorma-G merupakan perluasan dari ruang bernorma. Akan tetapi dalam penelitian ini menunjukkan bahwa topologi di ruang bernorma-G sama dengan topologi di ruang bernorma. Proses konstruksi kesamaan topologi dilakukan dengan menunjukkan bahwa basis untuk topologi di ruang bernorma-G sama dengan basis untuk topologi di ruang bernorma. Hal ini mengakibatkan topologi di ruang bernorma-G sama dengan topologi di ruang bernorma. Oleh karena itu ruang bernorma-G bukan merupakan perluasan dari ruang bernorma.

**Kata kunci:** Ruang bernorma-G, Ruang metrik-G, Topologi

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## ABSTRACT

### THE SIMILARITY OF TOPOLOGY IN NORMED LINEAR SPACES AND G-NORMED SPACE

by  
Julita Sari  
NIM. 17106010033

G-normed space was first introduced by Kamran Alam Khan (2014). A G-normed space is a vector space equipped with a G-norm function fulfilling five axioms. G-normed space is a special case of normed linear space with the definition of a certain norm function, so that every concept, meaning and characteristics that apply in normalized space also applies to G-normed space.

Previous researchers mentioned that the G-normed space is an generalization of the normed linear space. However, this study shows that the topology in G-normed space is the same as the topology in normed linear space. The process of constructing topological similarities is carried out by showing that the basis for the topology in G-normed space is the same as the basis for the topology in normed linear space. This results in the topology in G-normed space same as the topology in normed linear space. Therefore the G-normed space is not an generalization of the normed linear space.

**Keyword:** G-Normed Space, G-Metric Space, Topology

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Ilmu merupakan hal yang sangat penting untuk dimiliki setiap orang dalam hidup, karena ilmu dibutuhkan untuk menjalankan hidup ini. Salah satu ilmu yang sangat dibutuhkan yaitu ilmu matematika. Disadari ataupun tidak, sebenarnya matematika selalu digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Bahkan matematika sudah diajarkan dari kecil, mulai dari berhitung, kemudian melakukan operasi-operasi bilangan, sampai memperdalam ilmu matematika dengan pembuktian teorema-teorema yang dipelajari di bangku perkuliahan.

Ilmu matematika tidak dapat terlepas dari agama Islam. Hal tersebut dapat ditinjau dari beberapa ayat Al-Qur'an yang memiliki keterkaitan dengan matematika, salah satunya yaitu ayat mengenai perhitungan, bilangan, dan pengukuran seperti yang telah dijelaskan dalam QS. Maryam ayat 94 yaitu,

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا

Artinya: “Dia (Allah) benar-benar telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan perhitungan yang teliti”. (QS. 19:94)

Matematika dibagi menjadi beberapa cabang konsentrasi yaitu statistika, aljabar, terapan dan analisis. Statistika adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari konsep dan metode yang digunakan untuk mengumpulkan data, menginterpretasi data dan mengambil kesimpulan. Aljabar adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari sistem matematika yakni sistem yang dibentuk dari himpunan atau beberapa himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi atau lebih yang memenuhi syarat-syarat (aksioma-aksioma) serta relasi-relasi tertentu. Matematika terapan merupakan salah satu cabang matematika yang terkait dengan teknik matematika yang digunakan dalam aplikasi ilmu matematika guna memecahkan masalah-masalah konkret di dalam ilmu pengetahuan, bisnis

dan lain-lain. Analisis adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari proses dalam memecahkan suatu masalah kompleks menjadi lebih mudah untuk dipahami. Analisis mengajarkan cara berfikir kritis dan analitis, sehingga dapat membantu dalam menyelesaikan masalah-masalah baru yang tidak biasa. Cabang analisis masih terbagi dalam beberapa bidang yaitu analisis real, analisis kompleks, analisis fungsional dan lain-lain.

Cabang analisis terus mengalami perkembangan, berawal dari analisis klasik kemudian berkembang menjadi analisis modern. Analisis klasik mempelajari tentang sistem bilangan, kekonvergenan suatu barisan maupun deret, geometri, kekontinuan, pendiferensialan dan pengintegralan. Analisis modern mempelajari tentang konsep yang bersifat abstrak pada konsep ruang, salah satunya adalah ruang topologi. Topologi dianggap sebagai perluasan dari konsep geometri dengan tidak menggunakan konsep jarak dan mengindahkan konsep ukuran dan bentuk. Sifat-sifat dari himpunan titik-titik atau keluarga himpunan-himpunan dibicarakan dalam konteks ruang, yang lebih jauh dikenal dengan ruang topologi. Dengan kata lain topologi memberi tahu bagaimana elemen-elemen dari suatu himpunan berhubungan satu sama lain di dalam ruang topologi.

Selain mempelajari ruang topologi, perkembangan lain dalam analisis modern yang bersifat abstrak dan menarik untuk dibahas adalah ruang bernorma. Ruang bernorma adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norma. Ruang vektor merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua operasi yaitu operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang memenuhi aksioma tertentu.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, ruang bernorma juga mengalami perkembangan, salah satunya yaitu munculnya ruang bernorma-G. Ruang bernorma-G pertama kali diperkenalkan oleh Kamran Alam Khan (2014), yang mengatakan bahwa ruang bernorma-G merupakan perluasan dari ruang bernorma. Akan tetapi Anirban Kundu

dkk (2019) melakukan penelitian yang menunjukkan bahwa ruang bernorma-G bukan merupakan perluasan dari ruang bernorma.

Perkembangan penelitian dari ruang bernorma-G sangat menarik untuk dipelajari, namun karena ruang bernorma-G baru muncul dan belum banyak peneliti yang melakukan penelitian tentang ruang bernorma-G, maka peneliti tertarik untuk melakukan penelitian tersebut. Penelitian ini dilakukan dengan menyelidiki sifat basis dan topologi di ruang bernorma-G, selanjutnya dibandingkan dengan sifat basis dan topologi di ruang bernorma. Selain itu juga akan dilakukan konstruksi ulang bukti-bukti pada teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G yang akan menjadi tema pokok pada penelitian ini.

## **1.2 Batasan Masalah**

Batasan masalah dalam sebuah penelitian berfungsi untuk menghindari pembahasan yang terlalu meluas yang dapat mengakibatkan keluar dari tujuan penelitian. Selain itu batasan masalah juga berfungsi untuk membantu peneliti agar tetap fokus pada objek yang akan dituju.

Berdasarkan latar belakang di atas, penelitian ini dibatasi pada teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G.

## **1.3 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana konsep dan sifat-sifat topologi di ruang bernorma-G?
2. Bagaimana pembuktian teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G?

## **1.4 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah yang sudah diuraikan di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Menganalisis konsep dan sifat-sifat topologi di ruang bernorma-G

2. Menganalisis pembuktian teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui konsep dan sifat-sifat topologi di ruang bernorma-G
2. Mengetahui pembuktian teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G.

### 1.6 Tinjauan Pustaka

Konsep jarak sebenarnya sudah digunakan dalam geometri euclid selama berabad-abad, namun definisi resminya baru diketahui pada abad ke-19 yang didefinisikan oleh Frechet (1906). Tetapi yang memberikan nama “metrik” adalah Hausdorff. Ruang metrik merupakan himpunan tak kosong yang di dalamnya berlaku aturan metrik, sedangkan metrik adalah perluasan dari konsep jarak dari dua elemen yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Hal tersebut tidak cukup untuk mendefinisikan jarak antara lebih dari dua elemen secara matematis. Jadi, para peneliti terus berupaya menentukan fungsi jarak dalam pengaturan yang lebih luas.

Salah satunya yaitu penelitian yang dilakukan oleh Gahler (1962) yang memperkenalkan metrik-2. Kemudian pada tahun 1963 Gahler juga memperkenalkan norma-2. Selanjutnya metrik-n juga diperkenalkan dalam salah satu hasil penelitiannya pada tahun 1967 yang menyatakan bahwa ruang metrik-n adalah sebuah perluasan dari ruang metrik dan menganggap ruang metrik sebagai ruang metrik-1. Namun, berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Sharma (1980) dan Lin (1992) dengan jelas menunjukkan bahwa ada beberapa sifat dari ruang metrik-n yang tidak begitu mirip dengan ruang metrik.

Metrik-G diperkenalkan oleh Mustafa dan Sims (2006) sebagai pendekatan lain untuk memperluas ruang metrik. Secara topologi tidak berbeda dari ruang metrik biasa.

Ruang bernorma-G pertama kali diperkenalkan oleh Kamran Alam Khan (2014). K.A Khan (2014) mengatakan bahwa ruang bernorma-G merupakan perluasan dari ruang bernorma. Akan tetapi Anirban Kundu dkk (2019) dalam jurnalnya meneliti tentang kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G. Hal ini menunjukkan bahwa ruang bernorma-G bukan merupakan perluasan dari ruang bernorma.

Berdasarkan uraian di atas, maka penelitian ini akan menganalisis dan mengkonstruksi ulang bukti-bukti yang sudah dilakukan oleh Anirban Kundu dkk dalam membuktikan teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G.

### **1.7 Sistematika Penulisan**

Untuk mempermudah dan memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka peneliti menggambarkan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yang akan dijelaskan sebagai berikut:

#### **BAB I PENDAHULUAN**

Bab ini akan diuraikan tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan dan metode penelitian.

#### **BAB II DASAR TEORI**

Bab ini berisi tentang definisi, teori, sifat-sifat dan contoh yang menjadi dasar untuk mendukung pembuktian pada bab berikutnya, diantaranya yaitu ellips, konsep dasar bilangan real, ruang vektor, ruang topologi dan analisis fungsional.

#### **BAB III PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang definisi ruang bernorma-G beserta contohnya, topologi di ruang bernorma-G beserta sifat-sifat pada topologi di ruang bernorma-G, teorema basis topologi di ruang bernorma-G, sub basis topologi di ruang bernorma-G dan teorema kesamaan topologi di

ruang bernorma dan ruang bernorma-G yang dilengkapi dengan langkah-langkah pembuktiannya.

#### BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

##### **1.8 Metode Penelitian**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode “studi literatur”, yaitu peneliti mempelajari dan menganalisis tentang konsep dan sifat-sifat topologi di ruang bernorma-G berdasarkan referensi-referensi yang berasal dari beberapa jurnal dan buku yang berkaitan dengan tema penelitian ini. Sifat dari penelitian ini adalah kualitatif.

Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari referensi-referensi yang mendukung untuk membuktikan kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G. Langkah selanjutnya yaitu memahami definisi ellips, konsep dasar bilangan real, ruang topologi, analisis fungsional serta konsep dan sifat-sifat ruang bernorma-G. Langkah berikutnya yaitu melakukan analisis pada konsep dan sifat-sifat topologi di ruang bernorma-G. Langkah terakhir yaitu menganalisis bagaimana pembuktian teorema kesamaan topologi di ruang bernorma dan ruang bernorma-G.



## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa setiap ruang bernorma-G merupakan ruang metrik-G. Sehingga semua konsep, pengertian, sifat-sifat dan teorema-teorema yang berlaku di ruang metrik-G berlaku pula di ruang bernorma-G. Termasuk konsep dan sifat-sifat topologi di ruang metrik-G sama dengan konsep dan sifat-sifat topologi di ruang bernorma-G.

Topologi norma-G merupakan topologi terkecil dalam ruang bernorma-G. Pengertian basis dan sub basis pada topologi di ruang bernorma-G sejalan dengan pengertian basis dan sub basis yang ada di ruang topologi. Pendefinisian bola terbuka untuk topologi di ruang bernorma-G pada penelitian sebelumnya dirasa kurang tepat. Hal ini karena apabila diambil sebarang dua titik di dalamnya maka jarak kedua titik tersebut dapat melebihi jari-jari yang ditetapkan. Sehingga lebih tepatnya pendefinisian bola terbuka diganti menjadi ellips terbuka.

Pembuktian kesamaan topologi pada ruang bernorma dan ruang bernorma-G dalam skripsi ini menggunakan sifat basis yaitu menunjukkan bahwa basis untuk topologi ruang bernorma sama dengan basis untuk topologi ruang bernorma-G. Akibatnya topologi untuk ruang bernorma sama dengan topologi untuk ruang bernorma-G. Karena topologinya sama, maka dapat disimpulkan bahwa ruang bernorma-G bukan merupakan perluasan dari ruang bernorma.

#### **4.2 Saran**

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka dapat diberikan saran-saran sebagai berikut:

Mengembangkan penelitian lebih lanjut terkait perluasan baru dari ruang bernorma. Kemudian meneliti apakah ruang  $G2NS$  merupakan perluasan dari ruang bernorma.

## DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, Robert G., and Sherbert, D.R. 2000, *Introduction to Real Analysis Third Edition*, University of Illinois, Urbana-Champaign.
- Frechet, Maurice., 1906, *Memorie e Comunicazioni*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 22(1): 1–72.
- Gahler, Von Siegfried., 1962. *2-Metrische Raume Und Ihre Topologische Struktur*, Math. Nachr. 26(1–4): 115–148.
- Gahler, Von Siegfried., 1963, *Lineare 2-Normierte Raume*, Math Nachr. 28(1-43).
- Khan, Kamran Alam., 2014, *Generalized Normed Spaces and Fixed Point Theorems*, Journal of Mathematics and Computer Science 13: 157–167.
- Kundu, Anirban, T. Bag, and Sk Nazmul, 2019. *A New Generalization of Normed Linear Space*, Topology and its Applications 256: 159–176.
- Lin, C.-S., 1992, *On Strictly Convex And Strictly 2-Convex 2-Normed Spaces  $l_1$* , Internet. J. Math. Sci. 15(3): 417–424.
- Lipschutz, Seymour, 1965, *Theory and Problems of General Topology*, Schaum's Outline Series.
- Milewski, Emil.G., 1994, *The Topology Problems Solver*, Research and Education Association.
- Mustafa, Zead, and Sims, Brailey., 2006, *A New Approach to Generalized Metric Spaces*, Journal of Nonlinear and convex Analysis 7(2): 289–297.
- Ngatoillah, Ibnu dan Fitriani, Harina 2012, *Geometri Analitik Bidang*, MIPA UAD, ISBN: 978-602-18282-7-4.
- Sharma, A. K., 1980, *A Note On Fixed Points In 2-Metric Spaces*, Indian J. pure appl. Math. 11(12): 1580–1583.
- Shirali, Satish and Vasudeva, Harkrishan L., 2006, *Metric Spaces*. London: Springer-Verlag.
- Soeparna, Darmawijaya., 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*, MIPA Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

## CURRICULUM VITAE

### A. Biodata Pribadi

Nama Lengkap : Julita Sari  
Jenis Kelamin : Perempuan  
Tempat, Tanggal Lahir : Lembah Bawang, 04 Juli 1999  
Kebangsaan : Indonesia  
Tinggi, Berat Badan : 151 cm, 49kg  
Agama : Islam  
Alamat Asal : Dusun Paradis, Desa Janyat,  
Kec. Lembah Bawang, Kab. Bengkayang  
Kalimantan Barat  
Alamat Tinggal : Jl. Timoho Gg. Gading No. 11  
Ngentak Sapen RT 02 RW 01 Caturtunggal  
Depok Sleman Yogyakarta  
No. HP : 089651251334  
E-mail : [julitasari47@gmail.com](mailto:julitasari47@gmail.com)



### B. Riwayat Pendidikan

Nama Sekolah	Tahun
SD Negeri 6 Pacong	2005-2011
SMP Negeri 2 Singkawang	2011-2014
SMA Negeri 3 Singkawang	2014-2017
S1 Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	2017-2021

### C. Riwayat Organisasi

Organisasi	Tahun
PMII Rayon Aufklarung	2017-2020
UKM Olah Raga cabang Bulu Tangkis	2017-2020