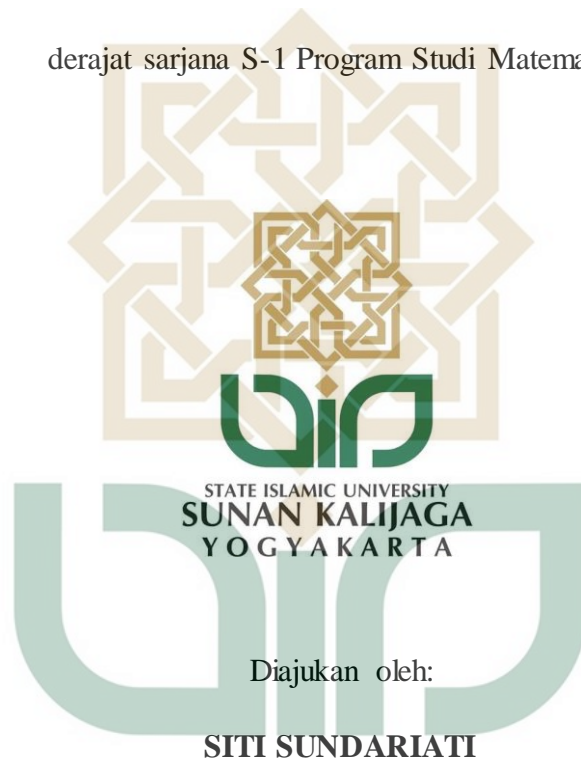


**ANALISIS KONTROL OPTIMAL PADA MODEL INVENTORI  
TANPA KEKURANGAN BARANG DAN KETERGANTUNGAN  
BARANG DENGAN PRINSIP MAKSIMUM PONTRYAGIN**

Skripsi

untuk memenuhi sebagian persyaratan mencapai  
derajat sarjana S-1 Program Studi Matematika



Diajukan oleh:

**SITI SUNDARIATI**

**13610002**

Kepada :

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2020**

## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas akhir

Lamp : -

Kepada  
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta  
di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Siti Sundariati

NIM : 13610002

Judul Skripsi : Analisis Kontrol Optimal Pada Model Inventori Tanpa Kekurangan Barang dan Ketergantungan Barang dengan Prinsip Maksimum Pontryagin

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam bidang matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqosyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 23 November 2020

Pembimbing



Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si.

NIP. 19800402 200501 1 003



## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-2812/Un.02/DST/PP.00.9/12/2020

Tugas Akhir dengan judul : ANALISIS KONTROL OPTIMAL PADA MODEL INVENTORI TANPA KEKURANGAN BARANG DAN KETERGANTUNGAN BARANG DENGAN PRINSIP MAKSIMUM PONTRYAGIN

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : SITI SUNDARIATI  
Nomor Induk Mahasiswa : 13610002  
Telah diujikan pada : Kamis, 10 Desember 2020  
Nilai ujian Tugas Akhir : A/B

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.

SIGNED

Valid ID: 5fd81e25cdb83



Penguji I

Dr. Sugiyanto, S.Si., M.Si

SIGNED

Valid ID: 5fd737a1a5a8f



Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.

SIGNED

Valid ID: 5fd7363fa630b



Yogyakarta, 10 Desember 2020

UIN Sunan Kalijaga

Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si.

SIGNED

Valid ID: 5fdadbc5bb88c

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Siti Sundariati

NIM : 13610002

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri dan sepanjang pengetahuan penulis tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis orang lain, dan atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian Tugas Akhir di Perguruan Tinggi lain, kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 23 November 2020

Yang menyatakan



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

Siti Sundariati  
NIM. 13610002

## MOTTO

*“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata) : Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka.”*

(Q.S. Ali Imran : 190-191)

*“Bukan melupakan yang jadi masalah. Tapi menerima. Barangsiapa yang bisa menerima, maka dia akan bisa melupakan, hidup bahagia. Tapi jika tidak bisa menerima, dia tidak akan pernah bisa melupakan.”*

Tere Liye (Hujan: 318)



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Karya ini saya persembahkan untuk Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta tercinta yang sangat luar biasa dan keluarga serta sahabat yang senantiasa mendukung penulis untuk terus berjuang dalam kondisi yang sulit.*



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah sehingga penulis dapat menyelesaikanskripsi ini dengan judul “Analisis Kontrol Optimal Pada Model Inventori Tanpa Kekurangan Barang dan Ketergantungan Barang Dengan Prinsip Maksimum Pontryagin”. Telah banyak bantuan yang penulis peroleh selama dalam penulisan skripsi ini, untuk itu tak lupa penulis ucapkan terima kasih yang sebesar- besarnya kepada:

1. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si selaku pembimbing yang telah memberikan ilmunya kepada penulis dengan penuh kesabaran membimbing penulis.
2. Dr. Sugiyanto, S.Si., M.Si selaku penguji skripsi yang telah memberikan kritik dan sarannya kepada penulis.
3. Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc. selaku penguji skripsi yang telah memberikan kritik dan sarannya kepada penulis.
4. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom. selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga.
5. Mohammad Farhan Qudratullah, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Akademik.
6. Segenap dosen dan karyawan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga yang telah bekerjasama dengan penulis selama belajar di UIN Sunan Kalijaga.
7. Teman-teman mahasiswa Prodi Matematika angkatan 2013, atas diskusi dan bantuannya selama penulis menuntut ilmu.
8. Teman-teman UKM INKAI UIN Sunan Kalijaga yang telah mengajarkan banyak hal pada penulis.

9. Make, Mamak, Mbak Tin, Mas Nurul, dan Mamat atas segala kasih sayang yang dicurahkan dengan caranya masing-masing kepada penulis.

10. Nani Sunarmi dan M. Majid A. yang telah sabar menghadapi penulis.

11. Sahabat-sahabat penulis yang selalu memberi nasihat serta kritik kepada penulis: Ovi, Nenes, Dindin, Kaek, Fitria, Qorina, Rafi, Ade,

Penulis menyadari penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Untuk itu segala kritikan dan saran yang bersifat membangun guna kesempurnaan skripsi ini sangat diharapkan. Kritik dan saran bisa dikirim melalui email penulis [sitisundariati07@gmail.com](mailto:sitisundariati07@gmail.com). Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua dan lebih khusus lagi bagi pengembangan ilmu matematika di bidang sistem kendali dan inventori.

Yogyakarta, 9 Desember 2020

Penulis,

Siti Sundariati

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PERSETUJUAN .....	ii
HALAMAN PENGESAHAN .....	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI .....	iv
HALAMAN MOTTO .....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	vi
KATA PENGANTAR .....	vii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR LAMBANG .....	xii
INTISARI .....	xiii
ABSTRACT .....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	3
1.3. Tujuan Penelitian .....	4
1.4. Batasan Masalah .....	4
1.5. Manfaat Penelitian .....	5
1.6. Tinjauan Pustaka .....	5
1.7. Metode Penelitian .....	6

1.8. Sistematika Penulis.....	8
<b>BAB II LANDASAN TEORI</b>	
2.1. Inventori .....	10
2.2. Teori Kontrol Optimal.....	18
2.3. Persamaan Diferensial Orde Dua .....	21
2.4. Persamaan Dinamik dan Prinsip Maksimum.....	24
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b>	
3.1 Model Inventori tanpa Kekurangan Barang.....	30
3.2. Model Inventori dengan Ketergantungan Barang.....	32
<b>BAB IV PEMBAHASAN</b>	
4.1. Model Inventory tanpa Kekurangan.....	34
4.2. Model Inventori dengan Ketergantungan Barang.....	42
<b>BAB V PENUTUP</b>	
5.1 Kesimpulan.....	50
5.2. Saran.....	52
DAFTAR PUSTAKA.....	53
CURRICULUM VITAE.....	55

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Flowchart Penelitian.....	7
Gambar 4.1. Diagram Kompartemen Model Inventori Tanpa Kerangan Barang.....	34
Gambar 4.2. Diagram Kompartemen Model Inventori Ketergantungan Barang.....	42



## DAFTAR LAMBANG

$I(t)$	:	Banyak inventori pada waktu $t$
$t$	:	Waktu
$P(t)$	:	Banyak produksi pada waktu $t$
$D(t, I(t))$	:	Banyak permintaan pada waktu $t$
$h(I(t))$	:	Biaya penyimpanan pada waktu $t$
$K(P(t))$	:	Biaya produksi
$T$	:	Waktu perencanaan produksi
$\rho$	:	Tingkat diskon/potongan harga
$I_0$	:	Banyaknya inventori pada saat $t = 0$
$\lambda(t)$	:	Fungsi adjoin pada waktu $t$
$I_T$	:	Banyak inventori pada waktu $T$ .
$J(P, I)$	:	Fungsi Objektif (Fungsi Tujuan)
$H(t, I, P, \lambda)$	:	Fungsi Hamiltonian
$L(t, I, P, \lambda, \mu)$	:	Fungsi Lagrange
$\mu(t)$	:	Fungsi Lagrange Multiplier
$\vartheta(t, I(t))$	:	Faktor kemerosotan
$c$	:	Biaya unit
$Q(t)$	:	Solusi khusus (solusi partikular)
$m_{1,2}$	:	Akar-akar persamaan karakteristik
$a_{1,2}$	:	Akar-akar solusi unik sistem dua persamaan linier
$I^*(t)$	:	Nilai optimal dari $I(t)$
$P^*(t)$	:	Nilai optimal dari $P(t)$

## INTISARI

Inventori merupakan serangkaian kebijaksanaan dan pengendalian yang memonitor tingkat persediaan sumber daya untuk menjaga kelangsungan hidup perusahaan. Keseimbangan dalam pengadaan persediaan sangat diperlukan agar dapat menekan biaya seminimal mungkin dan memperlancar proses produksi. Hal ini dapat dilakukan dengan menerapkan teori kendali pada kasus inventori. Terdapat dua model inventori yang dikembangkan yakni inventori tanpa kekurangan barang dimana permintaan dinamis dan inventori dengan ketergantungan barang yang mana faktor kemerosotoan diperhitungkan. Kedua model tersebut diselesaikan dengan menerapkan metode prinsip maksimum Pontryagin untuk memperoleh persamaan diferensial orde dua dari fungsi inventori. Persamaan diferensial orde dua diselesaikan dengan menggunakan persamaan karakteristik. Kedua model inventori tersebut memiliki penyelesaian berupa nilai optimal persamaan inventoir dan nilai optimal persamaan produksi.

Kata Kunci : Inventori, Teori kendali, Prinsip Maksimum Pontryagin.



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## ABSTRACT

Inventory is a series of policies and controls that monitor the level of resource inventory to maintain the survival of the company. Balance in inventory procurement is needed in order to reduce costs to a minimum and streamline the production process. This can be by applying control theory to the inventory case. There are two inventory models developed, namely inventory without shortages of goods where demand is dynamic and inventory with dependence on goods where the slump factor is taken into account. Both models are solved by applying the Pontryagin maximum principle method to derive a second-order differential equation from the inventory function. Second-order differential equations are solved using characteristic equations. Both inventory models have a solution in the form of the optimal value of the investment equation and the optimal value of the production equation.

Keywords : Inventory, Control theory, Pontryagin Maximum Principle.



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Perusahaan pada dasarnya didirikan untuk menghasilkan laba dalam skala besar, terutama perusahaan dengan produknya berupa barang. Dalam mendapatkan laba tersebut dapat dilakukan dengan cara mengolah bahan baku menjadi barang setengah jadi atau barang jadi, dengan adanya barang jadi perusahaan memperoleh suatu produk yang siap dijual kepada konsumen. Proses ini dilakukan terus menerus untuk menjaga kelangsungan hidup perusahaan. Pada praktiknya jumlah permintaan konsumen sukar untuk diketahui karena banyak sekali faktor yang mempengaruhinya, sehingga diperlukan adanya perencanaan produksi yang baik dalam memproduksi barang agar sesuai dengan jumlah permintaan konsumen dengan cara pengamanan persediaan (*buffer stock*) untuk mencegah terjadinya kekurangan persediaan.

Menurut Rosnani Ginting (2007) persediaan (inventori) dalam konteks produksi dapat diartikan sebagai sumber yang menganggur (*idle resource*), yang menunggu proses lebih lanjut. Proses tersebut dapat berupa kegiatan produksi, kegiatan pemasaran, ataupun kegiatan konsumsi. Inventori atau sumber yang menganggur ini dalam suatu sistem mempunyai tujuan tertentu, alasan utamanya yakni karena sumber daya tersebut tidak bisa didatangkan ketika sumber daya tersebut dibutuhkan. Sehingga untuk menjamin ketersediaannya, perlu adanya persediaan yang siap digunakan ketika dibutuhkan. Adapun alasan lain perlunya persediaan (inventori)

yakni *transaction motive* (terjaminnya kelancaran proses pemenuhan permintaan barang sesuai dengan kebutuhan), *precautionary motive* (meredam fluktuasi permintaan/ pasokan yang tidak beraturan), dan *speculation motive* (alat spekulasi untuk mendapatkan keuntungan berlipat di kemudian hari)(Ginting, 2007).

Besar kecilnya persediaan yang dimiliki perusahaan sangat bergantung pada perusahaan tersebut, hal itu ditentukan dengan pertimbangan tertentu salah satu faktornya yakni faktor biaya. Dalam hal ini biaya yang dikeluarkan mulai dari pemesanan bahan baku, masuk proses produksi, hingga kembali ke gudang sebagai produk barang jadi. Timbullah persoalan bagaimana cara mengatur persediaan sehingga setiap kali ada permintaan, permintaan tersebut dapat segera dilayani akan tetapi jumlah biaya persediaan harus seminimal mungkin. Jika persediaan cukup banyak, setiap saat permintaan dapat dilayani akan tetapi biaya penyimpanan barang akan menjadi sangat tinggi. Selain itu juga mengakibatkan perusahaan menanggung resiko kerusakan produk dan biaya investasi yang besar, namun jika terjadi kekurangan akan berakibat terganggunya kelancaran dalam proses produksi. Perlunya keseimbangan dalam pengadaan persediaan sehingga dapat menekan biaya seminimal mungkin dan memperlancar proses produksi (Ristono, 2013).

Teori kendali dapat menjadi salah satu cara untuk mengatasi masalah inventori, dengan mendapatkan kebijakan pengendalian inventori secara optimal dapat diperoleh hasil yang optimal pula. Pada skripsi ini akan digunakan model persamaan diferensial yang terlebih dahulu disederhanakan kemudian ditentukan nilai optimal dari model yang sudah disederhanakan tersebut. Ada dua jenis model inventori yang



akan digunakan dalam skripsi ini yakni model pertama model tanpa kekurangan barang yang dimana inventori tersedia sepanjang waktu dan permintaan dinamis. Model selanjutnya model dengan ketergantungan barang yang mana faktor penurunan dan kerusakan barang diperhitungkan. Teori kendali optimal digunakan untuk menentukan nilai optimal dari kedua model tersebut, sehingga diperoleh hasil yang optimal. Pada penelitian Pardi Affandi, dkk. (2012) telah membahas penerapan teori kendali pada masalah Inventori. Pada jurnal tersebut dibahas contoh persamaan Hamiltonian dan fungsi tujuan untuk waktu yang berhingga yang nantinya akan membentuk fungsi Lagrange. Dari persamaan Hamiltonian dan fungsi Lagrange akan diperoleh persamaan diferensial untuk kasus inventori. Penulis tertarik untuk membahas lebih detail hasil penelitian tersebut sehingga penulis memberi judul **"Analisis Kontrol Optimal Pada Model Inventori Tanpa Kekurangan Barang dan Ketergantungan Barang dengan Prinsip Maksimum Pontryagin"**.

## **1.2. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka perumusan masalah pada penelitian ini yakni

1. Bagaimana mengembangkan model inventori dan menentukan penyelesaian kontrol optimal persamaan inventori dan persamaan produksi dari model sistem inventori tanpa kekurangan barang menggunakan prinsip maksimum Pontryagin?
2. Bagaimana mengembangkan model inventori dan menentukan penyelesaian kontrol optimal persamaan inventori dan persamaan produksi dari model sistem

inventori dengan ketergantungan barang menggunakan prinsip maksimum Pontryagin?

### 1.3. Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian skripsi ini yakni:

1. Mengembangkan model inventori dan menentukan penyelesaian kontrol optimal persamaan inventori dan persamaan produksi dari model sistem inventori tanpa kekurangan barang menggunakan prinsip maksimum Pontryagin.
2. Mengembangkan model inventori dan menentukan penyelesaian kontrol optimal persamaan inventori dan persamaan produksi dari model sistem inventori dengan ketergantungan barang dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin.

### 1.4. Batasan Masalah

Terdapat beberapa batasan masalah dalam skripsi ini yakni:

1. Teori kendali optimal memiliki *state* akhir dan waktu akhir diketahui dan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin dalam menyelesaikan permasalahan.
2. Jenis inventori yang dimodelkan dalam teori kendali adalah jenis inventori deterministik yakni *Economic Order Quantity* (EOQ).
3. Model yang akan dibahas antara lain model inventori tanpa kekurangan barang dan dengan ketergantungan barang.

## **1.5. Manfaat Penelitian**

### **1. Bagi penulis**

Penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat sebagai tambahan wawasan keilmuan matematika yang tidak hanya dalam bentuk teori tetapi ilmu yang dapat diterapkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

### **2. Bagi program studi matematika**

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi tambahan referensi pada studi matematika khususnya dibidang teori kendali dan mampu menjadi rujukan pembelajaran maupun penelitian lebih lanjut mengenai teori kendali optimal.

### **3. Bagi ilmu pengetahuan**

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi alternatif dan tambahan wawasan dalam menyelesaikan masalah inventori dengan menerapkan teori kendali sebagai cara mendapatkan hasil yang optimal.

## **1.6. Tinjauan Pustaka**

Rujukan penulisan skripsi ini diambil dari berbagai literatur yang dituliskan pada daftar pustaka. Rujukan utama untuk mendesain “Analisi Kontrol Optimal Pada Model Inventori Tanpa Kekurangan Barang dan Ketergantungan Barang dengan Prinsip Pontryagin” yakni jurnal matematika murni dan terapan oleh Pardi Affandi, dkk. 2012 dengan judul “Penerapan Teori Kendali Pada Masalah Inventori”.

Referensi lain yang digunakan dalam penelitian ini antara lain: “Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produksi” yakni tesis

Vylda Pavela di Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya pada 2015 yang membahas tentang adanya kerusakan barang pada sistem inventori dan analisis menggunakan simulasi untuk melihat grafik pengaruh yang muncul.

Referensi selanjutnya adalah “Penerapan Kendali Optimal pada Model Persediaan Barang Tanpa Kekurangan Barang” yakni Tugas Akhir Suci Rahamdona di UIN Sultan Syarif Kasium Riau pada 2017 yang membahas sistem inventori tanpa kekurangan barang dan tingkat analisis kestabilan sistem.

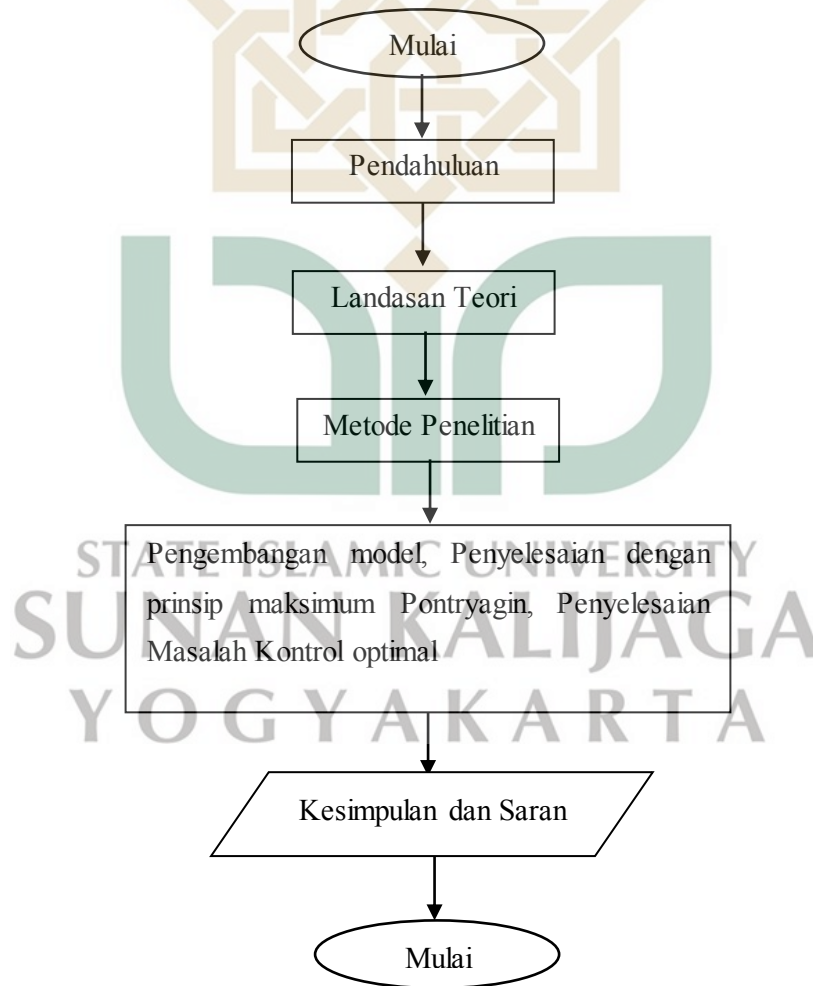
Referensi lain yang berkaitan adalah “Penerapan Teori Kendali Pada Masalah Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan dengan Tingkat Permintaan Adalah Fungsi Linier” Skripsi Nur Asni di UIN Sultan Syarif Kasium Riau pada 2019 yang membahas bagaimana jika tingkat permintaan dalam sistem berupa fungsi linear dengan batas waktu tak berhingga.

### **1.7. Metode Penelitian**

Metode penelitian yang digunakan pada tugas akhir ini adalah metode studi literatur yakni dengan pengumpulan data yang diperoleh dengan cara menjabarkan materi atau informasi pengetahuan yang bersumber dari buku-buku jurnal dan artikel. Pada tugas akhir ini metode literatur digunakan untuk mempelajari referensi yang berkaitan dengan teori sistem, teori kontrol optimal, pengembangan model sistem inventori dan penyelesaian menggunakan prinsip maksimum pontryagin yang berfokus pada kasus tanpa kekurangan barang dan dengan ketergantungan barang.

Langkah awal dalam penelitian ini adalah mempelajari konsep-konsep dasar pada sistem inventori untuk memahami bagaimana suatu model sistem inventori dibangun. Langkah selanjutnya adalah mempelajari prinsip maksimum Pontryagin dalam upaya menyelesaikan model matematika dari sistem inventori. Pembahasan penelitian ini akan berfokus pada sistem inventori tanpa kekurangan barang dan dengan ketergantungan barang dan bagaimana penyelesaiannya diperoleh.

Secara sederhana gambaran penelitian dapat dilihat pada *flowchart* berikut ini:



Gambar 1.1 *Flowchart* Penelitian

## **1.8. Sistematika Penulisan**

Sistematika penulisan ini memiliki tujuan untuk memberikan gambaran secara menyeluruh dan mempermudah pembaca untuk memahami penelitian. Sistematika penulisan tugas akhir tersusun atas 5 bab diantaranya bab pendahuluan, landasan teori, metodologi penelitian, pembahasan dan penutup. Penjelasan dari setiap bab tersebut sebagai berikut:

### **BAB I Pendahuluan**

Bab ini menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan penelitian, manfaat penulisan, tinjauan pustaka, metode penelitian dan sistematika penulisan.

### **BAB II Landasan Teori**

Bab ini membahas mengenai teori-teori dasar yang dibutuhkan untuk mendukung bab pembahasan mengenai persamaan diferensial biasa orde dua, model sistem inventori serta kontrol optimal.

### **BAB III Metode Penelitian**

Bab ini membahas tentang langkah-langkah dalam penelitian. Langkah dalam penelitian ini adalah langkah-langkah dalam bentuk persamaan diferensial, model sistem inventori serta kontrol optimal.

#### **BAB IV Pembahasan**

Bab ini membahas tentang bagaimana cara untuk memperoleh hasil penelitian. Pada bab ini dijelaskan penjabaran cara-cara dengan teoritis dalam memperoleh hasil penelitian khususnya penyelesaian persamaan differensial orde dua dari model sistem inventori serta kontrol optimal yang menerapkan prinsip maksimum Pontryagin.

#### **BAB V Penutup**

Bab ini membahas mengenai kesimpulan yang dapat diambil berdasarkan materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan saran yang diberikan penulis untuk peneliti selanjutnya.



**BAB V**  
**PENUTUP**

**5.1. Kesimpulan**

Berdasarkan tujuan pada bab I dan pembahasan pada Bab IV maka diperoleh kesimpulan pada penelitian ini antara lain:

1. Pada Model Inventori Tanpa Kekurangan Barang.

Masalah kontrol optimal pada model inventori tanpa kekurangan barang adalah

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t, I(t))$$

$$\min_{P(t) \geq 0} J(P, I) = \int_0^T e^{-\rho t} \{h(I(t)) + K(P(t))\} dt,$$

dengan penyelesaian diperoleh tingkat persediaan optimal adalah

$$I^*(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t),$$

dengan nilai  $Q(t) = \frac{(\rho + d_2)d_1(t) - \frac{d}{dt}d_1}{\left[\frac{h}{K} + d_2(\rho + d_2)\right]}$  serta penyelesaian  $m_1$  dan  $m_2$  berdasarkan persamaan karakteristik adalah

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( (\rho + d_2) - \sqrt{(\rho + d_2)^2 + 4 \left[ \frac{h}{K} + (\rho + d_2)d_2 \right]} \right)$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left( (\rho + d_2) + \sqrt{(\rho + d_2)^2 + 4 \left[ \frac{h}{K} + (\rho + d_2)d_2 \right]} \right),$$

dan dengan memasukan kondisi batas diperoleh



$$a_1 = \frac{b_2 - e^{m_2 T} b_1}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}} \text{ dan } a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 T} - b_2}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}}$$

persamaan tingkat produksi

$$P^*(t) = a_1(m_1 + d_2)e^{m_1 t} + a_2(m_2 + d_2)e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t) + d_2 Q(t) + d_1(t).$$

## 2. Model Inventori dengan Ketergantungan Barang

Masalah kontrol optimal pada model inventori dengan ketergantungan barang adalah

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t, I(t)) - \vartheta(t, I(t))$$

$$\min_{P(t) \geq 0} J(P, I) = \int_0^T e^{-\rho t} \{h(I(t)) + C[P(t) - D(t, I(t))] + K(P(t))\} dt,$$

dengan penyelesaian diperoleh tingkat persediaan optimal adalah

$$I^*(t) = a_1 e^{m_1 t} + a_2 e^{m_2 t} + Q(t),$$

dengan nilai

$$Q(t) = - \frac{(\rho + d_2 + \vartheta_2)(d_1(t) + \vartheta_1(t)) - \frac{d}{dt}d_1(t) + \frac{d}{dt}\vartheta_1(t) - \frac{c}{K}d_2}{\left[ \frac{h}{K} + (d_2 + \vartheta_2)(\rho + d_2 + \vartheta_2) \right]}$$

serta penyelesaian  $m_1$  dan  $m_2$  berdasarkan persamaan karakteristik adalah

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( (\rho + d_2 + \vartheta_2) - \sqrt{(\rho + d_2 + \vartheta_2)^2 + 4 \left[ \frac{h}{K} + (d_2 + \vartheta_2)(\rho + d_2 + \vartheta_2) \right]} \right) < 0$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left( (\rho + d_2 + \vartheta_2) + \sqrt{(\rho + d_2 + \vartheta_2)^2 + 4 \left[ \frac{h}{K} + (d_2 + \vartheta_2)(\rho + d_2 + \vartheta_2) \right]} \right) > 0,$$

dan dengan memasukan kondisi batas diperoleh

$$a_1 = \frac{b_2 - e^{m_2 T} b_1}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}} \text{ dan } a_2 = \frac{b_1 e^{m_1 T} - b_2}{e^{m_1 T} - e^{m_2 T}},$$

persamaan tingkat produksi

$$P^*(t) = a_1(m_1 + d_2)e^{m_1 t} + a_2(m_2 + d_2)e^{m_2 t} + \frac{d}{dt}Q(t) + d_2Q(t) + d_1(t).$$

## 5.2. Saran

Tugas akhir ini mengambil tema kontrol optimal pada model inventori tanpa kekurangan barang dan dengan ketergantungan barang. Pada kenyataannya banyak faktor yang mempengaruhi model inventori, beberapa diantaranya perkiraan pemakaian bahan baku, persediaan pengaman, model pembelian bahan, waktu tunggu, harga bahan baku, dll. Sehingga disarankan peneliti selanjutnya dapat menambahkan variabel yang dapat mempengaruhi inventori dan mendekati masalah inventori yang lebih kompleks.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR PUSTAKA

- Affandi, P., Faisal, & Yulida, Y. (2012). Penerapan Teori Kendali Pada Masalah Inventori. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 6(2), 38–46.
- Affandi, P., Faisal, & Yulida, Y. (2015a). Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan dan Penurunan Barang. *Jurnal MIPA*, 38(1), 79–88.
- Affandi, P., Faisal, & Yulida, Y. (2015b). Kendali optimal pada masalah inventori yang mengalami peningkatan. *Jurnal Fisika FLUX*, 12(1), 70–76.
- Fahma, D. N. (2017). *Kendali Optimal Pada Model Periklanan Nerlove-Arrow Dengan Menggunakan Prinsip Optimal Control on the Nerlove-Arrow*. Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.
- Ginting, Rosnani. (2007). *Sistem Produksi*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Idayani, D. (2010). *Kendali Optimal Pada Pengadaan Bahan Metah dengan Kebijakan Pengadaan Tepat Waktu, Pergudangan dan Penundaan*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>.
- Ljung, Lennart & Glad, Torkel. (1994). *Modeling of Dynamic System*. New Jersey: Prentice Hall.
- Pavela, V. (2015). *Kontrol Optimal Sistem Inventori Dengan Memperhatikan Kerusakan Produk*. Intitut Teknologi Sepuluh November.
- Rahmadayanti, S., & Andiraja, N. (2019). Kendali Optimal Model Persediaan Tanpa Kekurangan Barang dengan Penurunan Mutu. *Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi Dan Industri (SNTIK) 11, November*, 327–333.
- Ristono, Agus. (2013). *Manajemen Persediaan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Sa'adah, N., Bakhtiar, T., & Hanum, F. (2012). Penerapan Prinsip Maksimum Pontryagin Pada Sistem Inventor-Produksi. *Prosiding Seminar Nasional V*, 224–235.

Sugiyanto., Mugiyono, S. (2011). *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: SUKA Press.

Wirabuana, A., Fariyah T. & Agustina, D. (2006). *Sistem Produksi*. Yogyakarta: Pokja Akademik UIN Sunan Kalijaga.



## DAFTAR RIWAYAT HIDUP

### *Curriculum Vitae*

#### A. Data Pribadi

Nama Siti Sundariati  
Tempat, Tgl Lahir Nganjuk, 07-02-1995  
E-mail Sitisundariati07@gmail.com  
No. Telepon 087785725943  
Alamat Asal Rt/Rw 006/002 Klurahan Ngronggot Nganjuk  
Jawa Timur 64395  
Alamat Sekarang Rt/Rw 38/08 Jl. Tukangan DN II/877Kampung  
Tegal Kemuning Lempuyangan Yogyakarta  
55212



#### B. Pendidikan Formal

No	Tingkat	Sekolah/Universitas	Tempat	Tahun
1.	SD	SD Negeri Klurahan II	Nganjuk	2001
2.	SMP	SMP Negeri 1 Ngronggot	Nganjuk	2007
3.	SMA	SMA Negeri 1 Kertosono	Nganjuk	2010
4.	S1	UIN Sunan Kalijaga	Yogyakarta	2013

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA