FUNGSI GREEN DARI PERSAMAAN POISSON DAN PENERAPAN PERSAMAAN POISSON DALAM ELEKTROSTATIKA

SKRIPSI

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

Diajukan oleh :

FATHUL KHAIRI
16610016

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UIN SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2020

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Fathul Khairi
NIM	: 16610016
Judul Skripsi	: Fungsi Green dari persamaan Poisson dan penerapan persamaan Poisson dalam Elektrostatika

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 18 November 2020

Pembimbing I	Pembimbing II
Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.	Malahayati, M.Sc.
NIP. 198612082015032006	NIP. 19800402 200501 1 003

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-2841/Un.02/DST/PP.00.9/12/2020

Tugas Akhir dengan judul : FUNGSI GREEN DARI PERSAMAAN POISSON DAN PENERAPAN PERSAMAAN POISSON DALAM ELEKTROSTATIKA

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama	: FATHUL KHAIRI
Nomor Induk Mahasiswa	: 16610016
Telah diujikan pada	: Jumat, 04 Desember 2020
Nilai ujian Tugas Akhir	: A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 5fdca2b4b986c

Penguji I

Malahayati, S.Si., M.Sc
SIGNED

Valid ID: 5fcf79ae23156

Penguji II

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5fd12baeecf16

Yogyakarta, 04 Desember 2020
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5fdd979bb0ede

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Fathul Khairi
NIM	: 16610016
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 20 November 2020

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL
ADF00AHF806857803
6000
ENAM RIBU RUPIAH

Fathul Khairi

MOTTO

لَا تَحْزَنْ إِنَّ اللَّهَ مَعَنَا

Laa tahzan, Innallaha ma’ana

“Jangan bersedih, sesungguhnya Allah bersama kita”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan secara khusus untuk kedua orang tua saya, adik-adik saya dan kakek nenek saya.

Orang-orang yang paling saya sayangi dan yang paling menyayangi saya.

Skripsi ini juga saya persembahkan untuk diri saya sendiri. Terima kasih karena telah mampu bertahan hingga mencapai titik ini !.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahiim...

Alhamdulillahi robbil'alamin, segala puji dan syukur penulis senantiasa ucapkan kepada Allah Swt., Tuhan seluruh alam yang telah senantiasa melimpahkan rahmat dan karuniaNya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Shalawat serta salam tak lupa senantiasa penulis curahkan kepada nabi Muhammad Saw., nabi yang senantiasa kita nantikan syafa'atnya kelak di yaumul akhir.

Adapun skripsi ini disusun dengan maksud agar penulis dapat memperoleh gelar Sarjana (S1) dalam bidang matematika (S.Mat) dari program studi matematika. Penyusunan skripsi ini tentunya melibatkan banyak pihak yang turut memberikan bimbingan, dukungan, motivasi, serta hal-hal lain yang membantu penulis. Oleh karena itu dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Phil Al Makin, MA., selaku rektor UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Khurul Wardati, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Ibu Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc., selaku pembimbing 1 penulis yang telah memberikan banyak bimbingan dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Ibu Malahayati, M.Sc., selaku pembimbing 2 penulis yang juga telah banyak memberikan bantuan, bimbingan dan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Ayah dan ibu penulis, bapak Supriyadi dan ibu Isyani yang telah mencurahkan seluruh cinta dan kasih sayangnya kepada penulis sehingga penulis dapat sampai ke titik ini. Terima kasih atas segala do'a, dukungan, pendampingan dan hal-hal lain yang tak terhingga untuk penulis. Kasih sayang mereka tak tergantikan dan menjadi kasih sayang paling besar dalam hidup penulis.
7. Adik-adik penulis Hayati Nikmah, Suci Nahari dan Delisa yang telah menjadi semangat bagi penulis dalam menyelesaikan studi. Kakek-nenek penulis, kakek Sukardi dan nenek Wonten yang juga telah mencurahkan kasih sayang yang tak terhingga kepada penulis.
8. Sahabat-sahabat penulis selama kuliah, Alya Farahdina (matematika 2015), Fajar Wahyu N (matematika 2017) dan Rafik (sahabat dari Palu) yang telah banyak memberikan dukungan, motivasi dan bersedia sebagai tempat bercerita dan berkeluh kesah penulis selama ini.
9. Teman-teman matematika 2016, terutama Aqshal dan Nenti sebagai teman dekat penulis yang telah banyak memberikan dukungan untuk penulis dan telah bersama-sama berjuang menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman penulis dari organisasi Ikahimatika Wilayah IV (Jateng-DIY), terutama Rizka, Agung dan Alvan yang telah memberikan kesan positif dan menyenangkan dalam kehidupan penulis selama kuliah.

11. Teman-teman UKM Exact UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta dan adik-adik tingkat penulis dari Program Studi Matematika yang juga telah memberikan dukungan dan kesan baik bagi penulis selama kuliah.
12. Pihak-pihak lain yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu yang turut memberikan dukungan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Yogyakarta, 20 November 2020

<u>Fathul Khairi</u>

16610016

Fungsi *Green* dari Persamaan *Poisson* dan Penerapan Persamaan *Poisson* Dalam Elektrostatika

Oleh : Fathul Khairi (16610016)

ABSTRAK

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat fungsi peubah banyak beserta turunan-turunan parsial dari fungsi tersebut. Persamaan diferensial parsial memiliki banyak jenis, salah satunya adalah persamaan linear orde dua nonhomogen. Persamaan Poisson merupakan persamaan diferensial parsial linear orde dua nonhomogen. Persamaan Poisson memiliki banyak penerapan dalam fisika, salah satunya adalah dalam elektrostatika untuk menentukan medan potensial listrik. Masalah syarat batas merupakan masalah dalam persamaan diferensial parsial dengan syarat batas yang diberikan tidak berada dalam titik yang sama. Terdapat beberapa metode untuk membantu menyelesaikan masalah syarat batas salah satunya adalah menggunakan konsep fungsi green. Fungsi Green merupakan salah satu formula yang dapat digunakan untuk menemukan solusi fundamental dari suatu persamaan diferensial parsial. Fungsi Green dikonstruksi berdasarkan persamaan diferensial parsial yang diberikan beserta syarat batasnya.

Skripsi ini menjelaskan langkah-langkah bagaimana mengkonstruksi fungsi Green dari persamaan Poisson yang dilengkapi dengan syarat batas Dirichlet dan bagaimana penerapan persamaan Poisson dalam Elektrostatika. Konstruksi fungsi Green dilakukan dengan bantuan fungsi dirac-delta dan identitas Green. Setelah bentuk solusi persamaan poisson yang didalamnya terdapat fungsi Green diperoleh, selanjutnya diperoleh bentuk fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen persamaan Poisson. Kemudian untuk memberikan gambaran bagaimana fungsi Green ditentukan dari persamaan Poisson dengan syarat batas Dirichlet, diberikan sebuah contoh. Selanjutnya bagian akhir skripsi ini menganalisis mengenai penerapan persamaan Poisson dalam Elektrostatika beserta contohnya.

Kata kunci: *Persamaan diferensial parsial, fungsi Green, syarat batas, fungsi dirac-delta, ekspansi fungsi eigen, potensial listrik.*

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Lambang	Keterangan
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli	ε	Epsilon, permetivitas (kuantitas fisik medan listrik)
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real	ρ	Rho
Ω	Omega	ψ	Psi
$\partial\Omega$	Do omega (batas dari omega)	τ	Tau
∇	Operator del	φ	Phi
∇^2	Operator laplacian	∂	Do
λ	Lambda	$\leq$	Kurang dari atau sama dengan
π	Pi	$\geq$	Lebih dari atau sama dengan
ω	Omega kecil	$=$	Sama dengan
δ	Delta	$\neq$	Tidak sama dengan
∞	Tak hingga	L	Operator linear diferensial
$\in$	Anggota dari	$\sum$	Sigma
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat	$\int$	Integral lipat satu
■	Akhir dari suatu pembuktian	$\int\int$	Integral lipat dua

$<$	Kurang dari	$\iiint$	Integral lipat tiga
$>$	Lebih dari	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	Turunan parsial tingkat dua terhadap variabel x
$\frac{\partial}{\partial x}$	Turunan parsial tingkat satu terhadap variabel x		

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar belakang

Keilmuan matematika merupakan cabang ilmu pengetahuan yang terus mengalami perkembangan. Ilmu matematika sendiri merupakan ilmu yang sering digunakan sebagai alat bagi disiplin ilmu lain dalam menyelesaikan beragam permasalahan. Permasalahan perubahan merupakan permasalahan yang sering muncul dalam banyak keilmuan. Misalnya dalam fisika, Perubahan dalam fenomena fisik selalu kita jumpai seperti perubahan waktu, perubahan suhu, perubahan bentuk dan lain-lain. Sebagai fenomena fisik, untuk dapat memahami perubahan-perubahan tersebut dibutuhkan suatu model. Persamaan diferensial merupakan cabang matematika yang dapat digunakan untuk memodelkan perubahan-perubahan, salah satunya perubahan-perubahan fenomena fisik.

Persamaan diferensial merupakan perkembangan dari konsep turunan dan integral dalam kalkulus. Persamaan diferensial merupakan kajian matematika yang masuk ke dalam kajian analisis atau analisis terapan. Persamaan ini secara umum terbagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Masing-masing persamaan diferensial tersebut memiliki teknik penyelesaian yang berbeda. Permasalahan mencari solusi atau penyelesaian dari suatu persamaan diferensial, baik biasa maupun parsial merupakan hal yang selalu menarik untuk dikaji. Masalah yang seringkali muncul dalam permasalahan menentukan solusi suatu persamaan diferensial adalah masalah syarat batas.

Beragam teori berkembang untuk membantu menyelesaikan masalah syarat batas dalam persamaan diferensial baik secara analitik maupun numerik. Secara analitik, salah satu teori yang populer untuk membantu menyelesaikan masalah syarat batas dari suatu persaman diferensial adalah teori mengenai fungsi Green. Fungsi Green pertama kali diperkenalkan oleh seorang ilmuwan berkebangsaan Inggris bernama George Green (1793-1841) dalam karya tulis ilmiahnya yang berjudul "*Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electromagnetism*" pada tahun 1828. Fungsi Green memberikan suatu alternatif untuk menemukan solusi fundamental dari suatu persamaan diferensial parsial parsial dengan syarat batas tertentu.

Salah satu persamaan diferensial yang menarik untuk dikaji adalah persamaan Poisson. Persamaan ini merupakan persamaan diferensial parsial linear orde dua yang memiliki banyak penerapan dalam fisika. Salah satu permasalahan fisika yang dapat dimodelkan oleh persamaan Poisson adalah masalah elektrostatika. Persamaan poisson dalam masalah Elektrostatika dapat digunakan untuk menentukan potensial listrik suatu bahan atau wilayah yang dibatasi oleh kondisi-kondisi tertentu.

Memandang persoalan-persoalan di atas maka penelitian kali ini akan mengkaji dan menganalisis konsep fungsi Green yang dibangundari persamaan Poisson dan menganalisa penerapan persamaan Poisson dalam masalah Elektrostatika.

1.2 Batasan Masalah

Mempertimbangkan kemampuan penulis dan efektifitas waktu dalam pengerjaan penelitian ini maka penulis membatasi fokus kajian yang akan dikaji. Penelitian ini berfokus kepada persamaan Poisson dengan syarat batas homogen dengan contoh penerapan berupa kasus khusus persamaan Poisson yaitu persamaan Laplace.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya maka dapat dirumuskan rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengkonstruksi fungsi Green dari persamaan Poisson ?
2. Bagaimana penerapan persamaan Poisson dalam Elektrostatika ?

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dilakukannya penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji dan menganalisis konstruksi fungsi Green untuk persamaan Poisson.
2. Mengkaji dan menganalisis penerapan persamaan Poisson dalam Elektrostatika.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat dalam perkembangan keilmuan matematika. Selain itu, diharapkan karya tulis ini dapat menjadi rujukan untuk memperkaya literatur dalam penelitian matematika khususnya dalam topik persamaan diferensial parsial.

1.6 Tinjauan Pustaka

Skripsi ini menggunakan rujukan dari beberapa penelitian-penelitian sebelumnya atau referensi lain yang juga membahas mengenai fungsi Green, persamaan diferensial parsial serta penerapannya. Sebagai rujuan utama, skripsi ini merujuk kepada sebuah buku yang ditulis oleh Russel L. Herman pada tahun 2015. Buku tersebut menjelaskan mengenai teori-teori persamaan diferensial parsial yang di dalamnya terdapat teori mengenai konstruksi fungsi Green. Skripsi ini juga merujuk kepada penelitian Maulana Malik pada tahun 2009 dari Universitas Indonesia yang melakukan penelitian mengenai konstruksi fungsi Green untuk persamaan Poisson dalam skripsinya. Skripsi ini menggambarkan konstruksi fungsi Green secara lebih detail dari yang dituliskan oleh Russel L. Herman dan Maulana Malik. Selain itu dalam skripsi ini juga ditambahkan mengenai penerapan persamaan diferensial yang digunakan dimana dalam buku Russel L. Herman dan skripsi Maulana Malik tidak diberikan.

Sebagai rujukan utama yang lain, skripsi ini juga merujuk kepada buku *Engineering Electromagnetics* yang ditulis oleh Jr William H. Hayt dan John A. Buck pada tahun 2006 tentang Penurunan peamaan untuk mendapatkan persamaan poisson dalam elektrostatik. Skripsi ini menjelaskan secara lebih rinci terutama mengenai pendefinisian operator yang digunakan serta aspek-aspek lain dari rujukan buku tersebut. Skripsi ini juga merujuk kepada catatan kuliah yang berisi penjelasan mengenai fungsi Green yang ditulis oleh Andi Royston pada tahun 2008. Selain itu kajian mengenai fungsi dirac-delta yang ditulis oleh KT Tang dalam bukunya pada tahun 2015 juga menjadi rujukan dalam menulis skripsi ini. Kedua referensi utama terakhir ini memberikan sumbangsih berupa definisi-definisi dan sifat-sifat yang digunakan dalam pembahasan skripsi ini.

Adapun rujukan pendukung yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini diantaranya buku mengenai teori-teori persamaan diferensial parsial, yang ditulis oleh Walter A Strauss (2008), Mayer Humi dan William B. Miller (1991), Ioannis P Stavroulakis dan Stepan A Tersian (2004), thesis yang didalamnya terdapat penjelasan mengenai fungsi eigen dan ekspansi fungsi eigen yang ditulis oleh Shah Keya Ashwin (2015), dan catatan kuliah yang bersisi orthogonalitas fungai eigen dan fungsi sinus yang ditulis oleh Richard S Laugesen (2009). Selain itu skripsi ini juga merujuk kepada jurnal sebagai jurnal pendukung yang berisi penjelasan mengenai masalah syarat batas yang ditulis oleh Muhammad Manaqqib pada tahun 2018.

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini disusun dengan sistematika penulisan sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menyajikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka dan sistematika penulisan

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi mengenai teori-teori baik berupa definisi maupun teorema-teorema yang akan menjadi pisau analisis dalam membahas inti dari skripsi ini. Adapun teori-teori yang digunakan yaitu teori-teori mengenai dasar-dasar persamaan diferensial parsial, masalah syarat batas, metode pemisahan variabel, ekspansi fungsi eigen dan orthogonalitas deret fungsi sinus.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini berisi mengenai analisis permasalahan yang menjadi tujuan penulisan skripsi. Bab ini membahas mengenai konsep fungsi dirac-delta dan konstruksi fungsi Green dari persamaan Poisson dengan metode ekspansi fungsi eigen.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai penerapan Poisson dalam elektrostatika.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi mengenai kesimpulan dari hasil penelitian dan saran-saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kajian dan penelitian mengenai persamaan diferensial parsial yang dalam hal ini spesifik ke dalam masalah fungsi Green merupakan hal yang selalu menarik untuk dilakukan karena memiliki penerapan yang luas dalam sains dan keteknikan. Penulis dapat menyimpulkan beberapa hal dari hasil kajian dan penelitian yang dilakukan sebagai berikut :

1. Fungsi Green untuk persamaan Poisson berbentuk $G(x,y;a,b) = \frac{-4}{LH}\sum_{j}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{k\pi y}{H}\sin\frac{j\pi a}{L}\sin\frac{k\pi b}{H}}{\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2}$ dan solusi umum persamaan Poisson menggunakan fungsi Green berbentuk

$$u(x,y) = \int_0^L\int_0^H \frac{-4}{LH}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{j\pi x}{L}\sin\frac{k\pi y}{H}\sin\frac{j\pi a}{L}\sin\frac{k\pi b}{H}}{\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2+\left(\frac{k\pi}{H}\right)^2} f(a,b)\,dadb.$$

2. Solusi untuk Persamaan Laplace (kasus khusus persamaan Poisson) $\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ yang memodelkan kasus medan potensial listrik dengan

syarat batas tertentu adalah $V(x,y)=\dfrac{4V_0}{\pi}\displaystyle\sum_{m,n=1,3,5...}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{b}x\sinh\dfrac{m\pi}{b}y}{n\sinh\dfrac{m\pi a}{b}}$ dengan nilai potensial listrik pada kasus yang diberikan diperoleh sebesar 3678 Volt.

5.2 Saran

Penelitian ini peneliti masih membatasi masalah syarat batas yang diambil dalam konteks masalah syarat batas homogen. Penelitian ini masih bisa dikembangkan untuk masalah syarat batas non-homogen. Selain itu konstruksi fungsi Green juga cukup variatif sehingga diharapkan penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode konstruksi fungsi Green yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Abd Elrazig Awad Alla Elnour, Khalid. 2018. *On the Calculus of Dirac Delta Function with Some Applications*. International Journal of Mathematics Trends and Technology (IJMTT), 56, 258-259.

Ashwin, Shah Keya. 2015. *Mathematical Modeling of Malignant Skin Tumor in Human Body* [Thesis]. Surat, India: Veer Narmad South Gujarat University.

H. Hayt, Jr William & John A. Buck. 2006. *Engineering Electromagnetics*. Singapore: McGraw-Hill Higher Education.

Herman, Russel .L. 2015. *Introduction to Partial Differential Equations*. North Carolina, USA: R.L Herman.

Humi, Mayer & William B. Miller. 1991. *Boundary Value Problem and Partial Differential Equations.* Boston, USA: Pws Pub Co.

Laugesen, Richard S. 2009. Spectral Theory of Partial Differential Equations. Urbana, USA: University of Illonis.

Malik, Maulana. 2009. *Fungsi Green untuk Persamaan Poisson* [skripsi]. Depok: Universitas Indonesia.

Munaqqib, Muhammad. 2018. *Penyelesaian Masalah Syarat Batas Persamaan Helmhotz menggunakan Dual Reciprocity Boundary Element Method*. Jurnal “LOG!K@”, 8, 115-132.

Royston, Andi. 2008. Notes on the Dirac Delta and Green Functions. Chicago, USA: University of Chicago.

Strauss, Walter A. 2008. *Partial Diferential Equations (second edition)*. United States of America: Brown University.

Stavroulakis, Ioannis P & Stepan A Tersian. 2004. *Partial Differential Equations: An Introduction with Mathematica and Maple (second edition)*. Singapore: World Scientific Publishing.

Tang, KT. 2007. Metode Matematika untuk Sains dan Teknik 2. New York: Springer.