SIFAT-SIFAT KEPRIMAAN SUBMODUL PADA MODUL PERKALIAN

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh

NENTI EKTA MONITA LARASATI

16610017

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2020

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : NENTI EKTA MONITA LARASATI
NIM : 16610017
Judul Skripsi : SIFAT-SIFAT KEPRIMAAN SUBMODUL PADA MODUL PERKALIAN

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 21 Oktober 2020

Pembimbing I

Muhammad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
NIP. 19840113 201503 1 001

Pembimbing II

Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
NIP. 19660731 200003 2 001

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-2482/Un.02/DST/PP.00.9/11/2020

Tugas Akhir dengan judul : SIFAT-SIFAT KEPRIMAAN SUBMODUL PADA MODUL PERKALIAN

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : NENTI EKTA MONITA LARASATI
Nomor Induk Mahasiswa : 16610017
Telah diujikan pada : Selasa, 03 November 2020
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 5fcf7266251a2

Penguji I

Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5fcba53a9c867

Penguji II

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5fe9a72f20ce7

Yogyakarta, 03 November 2020
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5fcba53a9847e

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Nenti Ekta Monita Larasati
NIM	: 16610017
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 20 Oktober 2020

Yang Menyatakan

METERAI TEMPEL 1EAB5AHF681116431 6000 ENAM RIBU RUPIAH

Nenti Ekta Monita Larasati

Karya sederhana ini dipersembahkan

untuk Ibu, Bapak, Kakak, dan Adik tercinta

"Dan barangsiapa menghendaki kehidupan akhirat dan berusaha ke arah itu dengan sungguh-sungguh, sedangkan dia beriman, maka mereka itulah orang yang usahanya dibalas dengan baik."

(Terjemah QS. Al-Isra : 19 dari Penerbit Marwah (2009))

"Do not settle for someone who doesn't appreciate you for who you are."

Suhay Salim

PRAKATA

Puji syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT, yang dengan berkah serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir Skripsi dalam rangka memenuhi persyaratan untuk mendapatkan gelar Sarjana. Penelitian yang penulis rangkum di dalam Skripsi ini akhirya dapat diselesaikan dengan lancar tidak lepas dari bantuan dan kerjasama dari berbagai pihak. Berkenaan dengan hal tersebut, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi dan pembimbing skripsi II yang memberikan persetujuan pelaksanaan Tugas Akhir Skripsi serta telah banyak memberikan masukan, koreksi, dan arahan yang bermanfaat dalam penyusunan Tugas Akhir Skripsi.

2. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan bantuan dan fasilitas selama proses penyusunan Tugas Akhir Skripsi ini.

3. Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi I yang telah banyak memberikan masukan, koreksi, dukungan, serta semangat selama penyusunan Tugas Akhir Skripsi ini.

4. Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M. Sc., selaku dosen pembimbing akademik Matematika 2016 yang selalu membimbing perkuliahan para mahasiswa agar berjalan dengan lancar.

5. Seluruh dosen dan staf prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN

Sunan Kalijaga Yogyakarya yang telah banyak membantu dan memberikan ilmu selama perkuliahan.

6. Bapak, ibu, kakakku Herdika, dua adikku Bima dan Hanna tercinta yang senantiasa mendoakan yang terbaik dan memberikan semangat untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman HMPS Matematika UIN Sunan Kalijaga yang telah menemani perjalanan selama empat tahun kuliah dengan kegiatan yang bermanfaat.
8. Teman-teman program studi Matematika angkatan 2016, Yunida, Aqshal, Fathul, dan Yenni yang telah memberikan banyak kenangan lucu, seru, manis dan tidak terlupakan selama empat tahun kuliah bersama.
9. Teman-teman konsentrasi Aljabar 2016, terima kasih untuk kebersamaannya selama empat tahun kuliah.
10. Keluarga Saintek Musik yang selalu mendukung dan memberikan semangat.
11. Teman diskusi sehari-hari, Astuti, Tias, Dias, Septi, Yohannes, Agatha, dan Nala, terima kasih tidak pernah lelah memberikan semangat serta nasihat bermanfaat untuk saya.
12. Semua pihak yang telah bersedia membantu dalam penyusunan Tugas Akhir Skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat disebutkan satu-persatu.

Akhirnya, semoga segala bantuan yang telah diberikan semua pihak di atas menjadi amalan yang bermanfaat dan mendapatkan balasan dari Allah SWT. Penulis juga berharap semoga Tugas Akhir Skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca atau pihak lain yang membutuhkan.

Yogyakarta, 2 September 2020

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	: himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{Q}$	: himpunan semua bilangan rasional
$\mathbb{Z}$	: himpunan semua bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	: himpunan semua bilangan bulat positif
$\mathbb{R}$	: himpunan semua bilangan real
$x \in A$	: x anggota A
$A \subseteq X$	: A himpunan bagian (*subset*) atau sama dengan X
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	: penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$A + B$	: $\{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
AB	: $\{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N}\}$
$\blacksquare$	: akhir suatu bukti
$\rightarrow$	: menuju
$p \Rightarrow q$	: jika p maka q
$p \Leftrightarrow q$	: p jika dan hanya jika q
$\bigcup_{i=1}^{k} A_i$	: $A_1 \cup \cdots \cup A_k$
$\bigcap_{i=1}^{k} A_i$	: $A_1 \cap \cdots \cap A_k$

INTISARI

SIFAT-SIFAT KEPRIMAAN SUBMODUL PADA MODUL PERKALIAN

Oleh

NENTI EKTA MONITA LARASATI

16610017

Modul atas ring adalah generalisasi dari ruang vektor atas lapangan. Jika diberikan suatu ring R dan M adalah modul atas ring R, maka M adalah modul perkalian jika untuk sebarang submodul N di M, terdapat ideal I di R sedemikian sehingga berlaku $N = IM$. Salah satu fokus penelitian ini adalah eksistensi submodul prima di dalam modul perkalian yang dibandingkan dengan ideal prima di dalam suatu ring. Ring yang setiap ideal primanya dibangun secara berhingga adalah ring Noether. Tetapi, modul yang seluruh submodul primanya dibangun secara berhingga, belum tentu modul Noether. Hal ini akan berlaku jika modul yang digunakan adalah modul perkalian.

Kajian lain penelitian ini adalah eksistensi submodul siklik di dalam suatu modul perkalian yang dibandingkan dengan ideal utama di dalam ring. Apabila seluruh ideal prima pada suatu ring adalah ideal utama, maka ring tersebut adalah ring ideal utama atau ring utama. Apabila seluruh submodul prima pada suatu modul perkalian adalah siklik, maka seluruh submodul pada modul perkalian tersebut akan siklik apabila memenuhi salah satu dari pernyatan berikut: ring R yang digunakan adalah ring semi-lokal, atau terdapat suatu elemen bukan pembagi nol $a \in R$ sehingga Ra adalah ideal maksimal di R, atau seluruh submodul di modul M siklik, atau terdapat suatu fungsi surjektif ϕ dari modul M ke ring R.

Kata kunci: submodul prima, submodul siklik, modul perkalian

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan atau beberapa himpunan yang dilengkapi dengan operasi tertentu atau beberapa operasi dan memenuhi aksioma-aksioma (sifat-sifat). Terdapat beberapa materi yang dipelajari di dalam struktur aljabar, beberapa di antaranya yang berkaitan dengan penelitian ini yaitu grup, ring, lapangan, ruang vektor, dan modul.

Grup merupakan salah satu struktur aljabar dengan satu himpunan dan satu operasi, yang sifat operasinya harus memenuhi beberapa sifat-sifat. Sifat operasi pada grup yang dimaksud adalah tertutup, kemudian operasi bersifat asosiatif, setiap elemen di dalam grup memiliki invers, dan terdapat suatu elemen identitas di dalam grup tersebut.

Penelitian ini tidak terlepas dari pembahasan grup, terutama grup terhadap operasi penjumlahan. Nantinya, akan disampaikan definisi dari modul, yang salah satu modal untuk dibentuk suatu modul adalah grup dengan operasi penjumlahan. Modal lain yang dibutuhkan adalah ring.

Ring merupakan salah satu struktur aljabar dengan satu himpunan dan dua operasi (penjumlahan dan perkalian) dengan sifat-sifat tertentu. Berdasarkan Malik (2007) terdapat tujuh sifat yang harus dipenuhi oleh suatu himpunan untuk dapat disebut sebagai ring. Di dalam penelitian ini tujuh sifat yang dimaksud tersebut dituliskan pada definisi ring.

Apabila tujuh sifat yang ada pada ring ditambahkan dengan sifat tertentu, maka muncul definisi lapangan atau *field*. Apabila suatu himpunan memenuhi sifat-sifat lapangan, maka himpunan tersebut sudah pasti ring. Tetapi hal ini tidak berlaku kebalikannya.

Syarat tambahan untuk suatu himpunan dapat disebut sebagai lapangan yaitu himpunan tersebut adalah ring komutatif dan sebarang elemen tak nol di dalamnya adalah unit, atau memiliki invers terhadap perkalian. Jadi, lapangan adalah ring komutatif yang seluruh elemen tak nolnya adalah unit.

Teori tentang lapangan dibutuhkan pada penelitian ini karena pembahasan mengenai modul tidak terlepas dari pembahasan ruang vektor yang sangat berkaitan dengan lapangan. Suatu himpunan tak kosong V disebut ruang vektor atas lapangan F jika V adalah grup komutatif terhadap penjumlahan yang diberikan operasi dari grup ke lapangan. Sementara itu, modal untuk membentuk suatu modul adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan ring.

Diberikan suatu himpunan tak kosong M. Jika M adalah grup komutatif terhadap penjumlahan yang diberikan operasi dari grup ke ring, maka M disebut modul atas ring R atau bisa ditulis R-modul M (Wahyuni dkk, 2016). Operasi yang diberikan tersebut sama dengan operasi yang ada pada definisi ruang vektor. Modul yang digunakan pada penelitian ini adalah modul uniter. Berdasarkan Malik (2007), suatu R-modul M adalah modul uniter jika $1_R \in R$ sehingga $1_R.m = m$, untuk sebarang $m \in M$. Dengan kata lain, ring yang dimaksud adalah ring dengan elemen satuan.

Pembahasan mengenai modul akan dijumpai definisi submodul. Jika ring dipandang sebagai modul atas dirinya sendiri, maka diperoleh bahwa ideal pada ring tersebut tidak lain adalah submodul. Diberikan ring R dan I ideal di R, maka untuk sebarang $r \in R$ dan $a \in I$ berlaku $ra = ar \in I$ (Malik, 2007). Di sisi lain, jika S adalah submodul di R-modul M, maka untuk sebarang $r \in R$ dan $s \in S$ maka berlaku $rs \in S$ (Wahyuni dkk, 2016). Diperoleh bahwa sifat perkalian yang ada pada ideal dn submodul ini mirip. Hal ini menjadi motivasi untuk diteliti kaitan antara ideal di dalam suatu ring dengan submodul di dalam suatu modul. Arifin (2007) telah melakukan penelitian tentang kaitan antara ideal prima pada suatu ring dengan submodul prima pada suatu modul khusus yang disebut modul perkalian. Di dalamnya, diteliti sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh suatu submodul sehingga submodul tersebut disebut submodul prima.

Diketahui bahwa operasi pergandaan skalar atau perkalian yang berlaku pada modul adalah perkalian antara elemen di dalam modul dengan elemen di ring. Operasi perkalian sesama elemen di dalam modul tidak didefinisikan. Meskipun tidak ada operasi perkalian antar dua elemen dalam modul, namun terdapat suatu konsep baru dalam modul yang disebut dengan modul perkalian.

Suatu modul M disebut modul perkalian atas ring R jika untuk setiap submodul sejati N di M terdapat suatu ideal I di R sehingga $N = IM$ (Gaur dkk ,2007). Artinya setiap submodul sejati N di M berupa perkalian antara ideal I di R dengan modul M. Ideal I yang dimaksud pada definisi tersebut adalah ideal presentasi dari submodul N di M.

Conrad (2016) telah melakukan penelitian berkaitan dengan eksistensi ideal prima di dalam suatu ring dan membandingkannya dengan eksistensi submodul prima pada modul perkalian. Di dalam tulisannya, Conrad membahas Teorema I.S. Cohen yang menyebutkan bahwa jika sebarang ideal prima pada suatu ring komutatif dengan elemen satuan dibangun secara berhingga, maka ring tersebut Noether. Conrad menunjukkan bahwa Teorema I.S. Cohen berlaku pada modul perkalian.

Berdasarkan Arifin (2007), Gaur dkk (2007), dan Conrad (2016), dapat diteliti akibat dari jika seluruh submodul prima pada suatu modul dibangun secara berhingga. Apabila seluruh submodul prima pada suatu modul dibangun secara berhingga maka tidak tentu berlaku bahwa modul tersebut adalah modul Noether, seperti pada Contoh 3.3.2. Namun, berdasarkan Gaur dkk (2007), sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga tersebut akan berlaku pada modul perkalian. Dengan kata lain, pembahasan penelitian ini akan difokuskan pada eksistensi submodul prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu modul perkalian.

Apabila seluruh submodul prima di dalam modul perkalian M merupakan submodul yang dibangun secara berhingga maka akan berakibat kepada modul perkalian M merupakan modul Noether (Gaur dkk, 2007). Setelah meneliti eksistensi submodul prima yang dibangun secara berhingga, selanjutnya akan dijumpai definisi submodul yang dibangun oleh suatu himpunan yang hanya memuat satu elemen. Submodul yang demikian nantinya akan didefinisikan sebagai submodul siklik.

Apabila seluruh submodul prima pada suatu modul perkalian merupakan submodul siklik, maka akan berakibat seluruh submodul di dalam modul perkalian M juga siklik (Gaur dkk,2007), namun dengan syarat tertentu yang harus dipenuhi sehingga pernyataan tersebut berlaku. Hal ini dimotivasi oleh Teorema M. Isaacs yang terdapat di dalam pembahasan teori ring. Teorema M. Isaacs yang dimaksud adalah jika seluruh ideal prima di ring R adalah ideal utama, maka R adalah ring ideal utama atau pada penelitian ini disebut ring utama (Gaur dkk,2007).

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan hasil penelitian Gaur dkk (2007), jika seluruh ideal prima di dalam suatu ring adalah ideal yang dibangun secara berhingga, maka ring tersebut Noether. Hal tersebut seperti yang dituliskan pada Teorema I.S. Cohen. Teorema ini selanjtunya dikaitkan dengan sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga pada modul perkalian. Apakah modul yang seluruh submodul primanya dibangun secara berhingga kemudian adalah modul Noether?

Di sisi lain, pada pembahasan teori ring terdapat sifat ideal yang dibangun oleh suatu himpunan yang memuat satu elemen, sehingga ideal tersebut disebut sebagai ideal utama (Malik, 2007). Seperti yang disebutkan pada Teorema M. Isaacs, apabila diberikan ring dan seluruh ideal primanya adalah ideal utama, maka ring tersebut adalah ring utama (Gaur dkk, 2007). Sifat ideal prima yang demikian nantinya juga akan dikaitkan dengan sifat submodul prima pada modul. Apabila seluruh submodul prima pada suatu modul adalah submodul siklik, maka seluruh submodul pada modul tersebut apakah juga siklik?

1.3. Batasan Masalah

Pembahasan pada penelitian ini akan difokuskan pada mengaitkan sifat-sifat ideal prima yang dibangun secara berhingga pada ring dengan sifat-sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga pada modul. Seperti yang telah disebutkan di bagian awal, modal untuk membentuk suatu modul adalah grup komutatif penjumlahan dan suatu ring. Ring yang digunakan di dalam pembahasan penelitian ini dibatasi hanya pada ring komutatif dengan elemen satuan dan modul yang digunakan adalah modul uniter. Definisi dari ring komutatif dengan elemen satuan nantinya akan disajikan, dan definisi dari modul uniter juga akan disajikan.

1.4. Tujuan dan Manfaat Penelitian

1.4.1. Tujuan

Penelitian ini dilakukan dengan menguraikan kembali dua artikel yang menjadi rujukan, yaitu Gaur dkk (2007) dan artikel El-Bast dan Smith (2007). Dengan memandang ring sebagai modul atas dirinya sendiri, kemudian dapat diteliti kaitan antara ideal prima yang dibangun secara berhingga di suatu ring dengan submodul yang dibangun secara berhingga pada suatu modul, yaitu pada modul perkalian.

Jika ditelusuri sifat-sifat ideal di dalam suatu ring dan submodul di dalam suatu modul, maka akan ditemukan kemiripan di antara keduanya. Namun, sudah ada banyak penelitian yang meneliti kaitan antara ideal dalam sebuah ring dengan submodul dalam sebuah modul. Seperti pada hasil penelitian Arifin (2007) yang membahas sifat-sifat submodul prima pada modul perkalian. Di dalamnya dibahas sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh suatu submodul pada modul perkalian sehingga dapat disebut sebagai submodul prima.

Terdapat kaitan antara sifat ideal prima pada suatu ring dengan submodul prima pada suatu modul perkalian (Arifin, 2007). Hasil penelitian Arifin (2007) digunakan untuk meneliti sifat yang lain berkaitan dengan ideal prima di dalam ring dengan submodul prima di dalam modul perkalian.

Sifat lain yang dapat diteliti salah satunya adalah sifat ideal prima yang dibangun secara berhingga dalam sebuah ring komutatif dengan elemen satuan, dan kaitannya dengan sifat submodul prima yang juga dibangun secara berhingga di dalam sebuah modul. Jika seluruh submodul prima pada suatu modul perkalian dibangun secara berhigga, maka modul tersebut Noether (Gaur dkk, 2007). Gaur dkk (2007) dapat menunjukkan bahwa sifat submodul yang demikian tidak berlaku untuk modul biasa, melainkan untuk modul perkalian. Jadi, penelitian ini membandingkan sifat ideal prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu ring dengan sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga pada modul, khususnya pada modul perkalian.

Selain meneliti sifat submodul prima yang dibangun secara berhigga pada modul perkalian, berdasarkan Gaur dkk (2007), dapat diteliti pula eksistensi ideal utama dalam sebuah ring komutatif dengan elemen satuan dan kaitannya dengan submodul siklik di dalam suatu modul. Apabila seluruh submodul prima N pada modul perkalian M adalah submodul siklik, maka seluruh submodul pada M siklik dengan syarat-syarat seperti yang dituliskan pada Teorema 3.4.2.

1.4.2. Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Manfaat bagi peneliti adalah mengaplikasikan hasil belajar serta menambah wawasan dan memperdalam keilmuan di bidang Aljabar.

2. Manfaat bagi pembaca adalah menambah pengetahuan tentang teori modul, terutama modul perkalian dan submodul prima pada modul perkalian.

3. Manfaat bagi lembaga adalah menambah rujukan penelitian dalam bidang Aljabar, terutama penelitian yang berkaitan dengan modul perkalian.

1.5. Tinjauan Pustaka

Gaur dkk (2007) telah meneliti kaitan antara eksistensi ideal prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu ring dengan eksistensi submodul prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu modul. Di dalam Gaur dkk (2007), disebutkan bahwa berdasarkan Teorema I.S Cohen, jika sebarang ideal prima di suatu ring dibangun secara berhingga, maka ring tersebut Noether. Selanjutnya teorema tersebut akan dikaitkan dengan eksistensi submodul prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu modul.

Gaur dkk (2007) menunjukkan Teorema I.S. Cohen tidak selalu berlaku untuk modul biasa, melainkan pada modul khusus yang kemudian disebut modul perkalian. Arifin (2007) telah meneliti sifat-sifat submodul prima pada suatu modul khusus yang disebut modul perkalian. Berdasarkan hasil penelitian Arifin, diperoleh kesimpulan bahwa terdapat kaitan antara ideal prima pada suatu ring dengan submodul prima pada suatu modul perkalian.

Hasil penelitian Arifin dapat dimanfaatkan untuk melengkapi pembuktian sifat-sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga pada modul perkalian yang dibahas di dalam artikel El-Bast dan P.F. Smith (1988). Sifat-sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga pada suatu modul perkalian yang dibahas El-Bast dan P.F. Smith kemudian memotivasi Gaur dkk untuk meneliti kaitan antara eksistensi ideal prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu ring dengan eksistensi submodul prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu modul, khususnya modul perkalian.

Di tahun 2016, Conrad telah melakukan penelitian tentang Lemma Zorn dan aplikasinya. Salah satu yang dibahas di dalam tulisannya adalah Teorema I.S. Cohen serta kaitan teorema tersebut dengan teori modul. Di dalamnya, Conrad membuktikan Teorema I.S. Cohen berlaku pada modul perkalian. Berdasarkan hal tersebut maka penelitian ini juga merujuk pada artikel yang ditulis Conrad.

Gaur dkk (2007) juga telah meneliti kaitan antara eksistensi ideal utama pada suatu ring dengan eksistensi submodul siklik di dalam suatu modul. Eksistensi ideal utama di dalam suatu ring kemudian dituliskan pada Teorema M. Isaacs. Gaur dkk menunjukkan bahwa terdapat beberapa sifat yang harus dipenuhi sehingga Teorema

M. Isaacs dapat berlaku untuk pembahasan teori modul.

Konsep-konsep dasar mengenai grup, subgrup, ring, ideal, dan lapangan yang dituliskan di dalam penelitian ini penulis peroleh dari buku Adkins (1992), Malik (2007), dan Malik dkk (1997). Untuk konsep-konsep mengenai modul dan submodul penulis menggunakan buku Wahyuni dkk (2016).

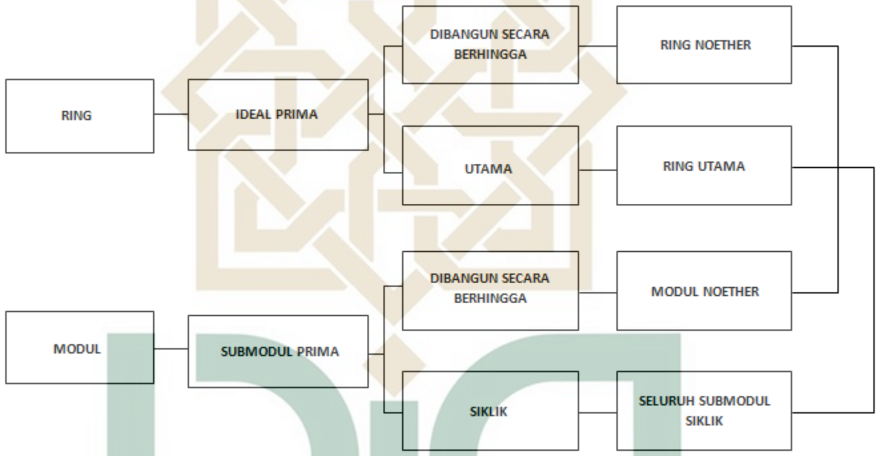
1.6. Metode Penelitian

Lazimnya metode penelitian program studi Matematika murni, penulis menggunakan metode studi literatur. Langkah awal pada penelitian ini yaitu dipelajari konsep dasar mengenai grup, subgrup, ring, dan ideal. Konsep grup dan ring adalah modal dalam pendefinisian modul. Konsep ideal di dalam suatu ring nantinya akan dikaitkan dengan sifat submodul di dalam suatu modul. Sifat yang dimaksud adalah ideal yang dibangun secara berhingga di dalam suatu ring dan submodul yang dibangun secara berhingga di dalam suatu modul.

Setelah memahami konsep-konsep dasar berkaitan dengan teori ring dan teori modul, selanjutnya didefinisikan konsep mengenai modul perkalian dan submodul prima yang ada di dalamnya. Akan diteliti sifat-sifat submodul prima pada modul perkalian dan sifat-sifat dari modul perkalian itu sendiri. Sifat-sifat yang dibahas adalah berkaitan dengan teorema utama yang akan diteliti, yaitu submodul prima yang dibangun secara berhingga.

Langkah selanjutnya adalah membahas teorema utama, yaitu mengaitkan Teorema I.S Cohen dengan submodul prima yang dibangun secara berhingga pada modul perkalian. Karena Teorema I.S. Cohen berkaitan dengan ring Noether dan akan kemudian akan dikaitkan dengan modul Noeteher, maka konsep mengenai dua hal tersebut juga akan dituliskan.

Setelah membahas Teorema I.S. Cohen dan kaitannya dengan modul Noether, selanjutnya akan diteliti teorema kedua yang berkaitan dengan ideal utama pada ring sehingga ring tersebut ring ideal utama atau ring utama. Konsep tentang ideal utama di dalam ring dituliskan pada Teorema M. Isaacs. Teorema M. Isaacs tersebut yang akan dikaitkan dengan submodul siklik di dalam modul perkalian. Akan disajikan beberapa sifat yang harus dipenuhi sehingga teorema tersebut berlaku pada modul perkalian. Berikut ini akan disajikan skema penelitian yang akan dilakukan.



Gambar 1.1 Skema Alur Penelitian

1.7. Sistematika Penulisan

Hasil penelitian ini terbagi menajadi 4 bab. Di bab pertama, dituliskan hal-hal yang melatarbelakangi penelitian. Di bab kedua, dituliskan teori-teori yang dibutuhkan untuk membahas bab-bab selanjutnya. Berikut ini penjelasan sistematika penulisan hasil penelitian:

Bab I : Pendahuluan.

Bagian ini berisi latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan hasil dari penelitian.

Bab II : Dasar Teori.

Bagian ini membahas tentang materi-materi yang digunakan sebagai landasan untuk pembahasan materi pada Bab 3, yaitu pengertian dasar grup, subgrup, ring dan sifat-sifatnya, ideal, modul dan submodul. Di bagian Dasar Teori ini, disajikan berbagai macam contoh dari definisi-definisi yang dituliskan untuk menambah pemahaman. Materi-materi yang ditulis pada bagian ini disesuaikan dengan kebutuhan pada penelitian ini.

Bab III : Pembahasan.

Bagian ini akan dibahas hal-hal yang menjadi topik permasalahan dalam penelitian ini yaitu modul perkalian, submodul prima, dan sifat-sifat submodul prima yang dibangun secara hingga pada modul perkalian.

Bab IV : Penutup.

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran dari penelitian yang telah dilakukan.

BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa terdapat kaitan antara eksistensi submodul prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu modul perkalian dengan eksistensi ideal prima di dalam ring. Berikut ini akan dituliskan kesimpulan dari penelitian ini.

4.1. Kesimpulan

Setelah menliti sifat ideal prima yang dibangun secara berhingga di dalam suatu ring, diperoleh kesimpulan bahwa apabila seluruh ideal prima pada suatu ring dibangun secara berhingga, maka ring tersbut Noether, seperti yang telah dituliskan pada Teorema I.S. Cohen. Berdasarkan Teorema M. Isaacs telah ditunjukkan bahwa jika seluruh ideal pada suatu ring adalah ideal utama, maka ring tersebut adalah ring ideal utama atau ring utama. Dari dua teorema tersebut, kemudian diteliti sifat-sifat submodul prima yang dibangun secara berhingga serta submodul siklik pada modul perkalian, dan diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Teorema I.S. Cohen tidak selalu berlaku untuk modul biasa, tetapi berlaku pada modul perkalian. Jadi, jika seluruh submodul prima dibangun secara berhingga di dalam suatu modul perkalian, maka modul perkalian tersebut adalah modul Noether.

2. Teorema M. Isaacs dapat berlaku pada modul perkalian apabila memenuhi salah satu dari peryataan-pernyataan berikut ini:

(a) Jika ring R yang digunakan adalah ring semi-lokal.

(b) Jika terdapat suatu elemen bukan pembagi nol $a \in R$ sehingga Ra adalah ideal maksimal di R.

(c) Jika seluruh submodul di modul M siklik.

(d) Jika terdapat suatu fungsi surjektif ϕ dari modul M ke ring R.

4.2. Saran

Di dalam penelitian ini, belum dibahas *countre example* yang menunjukkan bahwa Teorema M. Isaacs tidak berlaku pada modul perkalian. Pembahasan pada penelitian ini langsung kepada syarat-syarat tambahan sehingga Teorema M. Isaacs dapat berlaku pada modul perkalian, seperti yang dituliskan pada Teorema 3.4.2. Apabila contoh tersebut dibahas, maka diperlukan teori ring yang lebih banyak. Perlu adanya penelitian tersendiri yang membahas alasan Teorema M. Isaacs tidak berlaku pada modul perkalian.

DAFTAR PUSTAKA

Adkins, W. A., 1992, *Algebra "An Approach via Module Theory"*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.

Arifin, Samsul., 2007, *Modul Perkalian*, Universitas Gadjah Mada, Inc., Indonesia.

Conrad, Keith., 2016, *Noetherian Modules*, math.uconn.edu (diakses tanggal 14 April 2020).

Conrad, Keith., 2016, *Zorn's Lemma and Some Application*, math.uconn.edu (diakses tanggal 24 April 2020).

El-Bast, Z. A., Smith, P. F., 1988, *Multiplication modules*, Communications in Algebra, 16(4): 755-779.

Gaur, Atul., Kumar, Alok., Prakash, Anand., 2007, *Prime Submodules in Multiplication Modules*, International Journal of Algebra, 1(8): 375-380.

Malik, D. S. dkk, 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra*, The McGraw-Hill Companies, Inc., USA.

Malik, D. S., 2007, *Introduction to Abstract Algebra*, Department of Mathematics Creighton University, Inc., USA.

Wahyuni, Sri dkk., 2016, *Teori Ring dan Modul*, Gadjah Mada University Press, Inc., Indonesia.