

**SKRIPSI**

**FUNGSI GREEN PADA PERSAMAAN GELOMBANG DAWAI VIBRASI  
ALAT MUSIK SASANDO**

**GREEN FUNCTION OF THE STRING VIBRATION MODEL ON  
SASANDO MUSICAL INSTRUMENT**

**Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat**

**Sarjana Sains Ilmu Matematika**



**NIM. 17106010040**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA**

**2021**



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Ezra Efrizardi Yusufa

NIM : 17106010040

Judul Skripsi : Fungsi Green Pada Persamaan Gelombang Dawai Vibrasi Alat Musik Sasando

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu'alaikum wr. wb.*

Pembimbing I

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom.  
NIP. 19720423 199903 1 003

Yogyakarta, 12 Mei 2021  
Pembimbing II

Dr. Sugiyanto, S.Si., M.Si.  
NIP. 19800505 200801 1 028



## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1333/Un.02/DST/PP.00.9/07/2021

Tugas Akhir dengan judul : FUNGSI GREEN PADA PERSAMAAN GELOMBANG DAWAI VIBRASI ALAT MUSIK SASANDO

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : EZRA EFRIZARDI YUSUFA  
Nomor Induk Mahasiswa : 17106010040  
Telah diujikan pada : Rabu, 21 Juli 2021  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom  
SIGNED

Valid ID: 61028915c9049



Penguji I

Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 61028c009355f



Penguji II

Dr. Sugiyanto, S.Si., M.Si  
SIGNED

Valid ID: 61028f9616a4e



Yogyakarta, 21 Juli 2021  
UIN Sunan Kalijaga  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 6102a515cea40

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ezra Efrizardi Yusufa  
NIM : 17106010040  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 17 Mei 2021



Ezra Efrizardi Yusufa

17106010040

## MOTTO

*“Sesungguhnya setiap amalan tergantung pada niatnya. Setiap orang akan mendapatkan apa yang ia niatkan...”*

(HR. Bukhari dan Muslim)

“Kosongkan pikiranmu, jadilah tak berbentuk seperti air. Jika kamu memasukkan air ke dalam cangkir, ia menjadi cangkir. Masukkan air ke dalam botol dan ia menjadi botol. Masukkanya ke dalam teko, ia menjadi teko. Sekarang, air bisa mengalir atau bisa berhenti. Jadilah seperti air, kawanku.”

(Bruce Lee)

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Tugas Akhir / Skripsi ini penulis persembahkan secara khusus  
kepada:*

*Kampus UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta tercinta*

*Bapak, Ibu, dan Adik yang telah memberikan dukungan dan  
semangat serta selalu mendo'akan yang terbaik untuk penulis*

*dan seluruh orang yang telah memberi semangat, motivasi, suka cita  
dan kenangan yang berharga*

## PRAKATA

Segala puji syukur hanya milik Allah SWT., Tuhan maha Pencipta dan Pemelihara alam semesta. Kepada Dialah kita menyembah dan memohon pertolongan. Salawat serta salam semoga terlimpah kepada junjungan Nabi Agung kita Baginda Nabi Muhammad SAW., manusia pilihan pembawa rahmat bagi seluruh alam yang membawa umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana Program Studi Matematika. Skripsi ini berisi tentang pembahasan mengenai Fungsi Green Pada Persamaan Gelombang Dawai Vibrasi Alat Musik Sasando. Pada kenyataannya dalam proses penulisan skripsi ini tidak semudah yang dibayangkan. Banyak sekali kendala yang dihadapi selama penulis melakukan penelitian ini. Oleh karena itu, skripsi ini (dapat dikatakan) selesai bukan semata-mata karena usaha penulis pribadi, melainkan atas bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih disampaikan sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Phil. Al Makin, S.Ag., M.A. Selaku Rektor Universitas Sunan Kalijaga Yogyakarta
2. Ibu Dr. Drs. Hj. Khurul Wardati, M.Si. Selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
3. Bapak Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom. Selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta dan dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu di tengah-tengah kesibukannya memberikan bimbingan, bantuan, dan ilmu dalam menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Sugiyanto, S.Si., M.Si. Selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan, bantuan, dan ilmu dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Segenap Bapak/Ibu Dosen dan Staf Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta atas ilmu, bimbingan, pelayanan dan kenangan yang berharga selama perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini selesai.
6. Keluargaku tercinta Bapak Bambang Mulyono dan Ibu Sri Hanani, serta adik saya Seisa Arina Firdausa dan nenek saya Sri Partini yang telah mengajarkan arti hidup dan selalu mendoakan penulis agar sukses dalam menjalani kehidupan di masa yang akan datang.
7. Saudara Fathul Khairi, S.Mat. selaku kakak tingkat mahasiswa prodi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta tahun 2016 dan teman seperjuangan dalam pengerjaan skripsi, terima kasih atas ilmu, bantuan, waktu, dukungan dan pengalamannya selama ini.
8. Teman-teman asistensi dosen prodi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta tahun 2015, 2016, 2017, dan 2018, terima kasih atas do'a dan motivasinya selama ini.
9. Persatuan Calon Bapak Matematika tahun 2017 “Sayang”, Achmad, Aco, Afif ,Aji, Aziz, Diaz, Faizal, Fajar, Fauzi, Fian, Oriz, Rizal, Sumarji, dan Syafri yang telah memberikan suka cita, kegilaan, kerusuhan, kebersamaan dan kenangan yang sangat berharga selama ini serta memotivasi saya agar menjadi pribadi yang lebih baik.
10. Seluruh perempuan Matematika tahun 2017 “Lambe Turah” yang telah memberikan suka cita, romansa, dan kenangan yang sangat berharga selama ini.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Atas bantuan dan dukungan dari pihak di atas itulah penulisan skripsi ini dapat diselesaikan. Namun demikian, di atas pundak penulislah skripsi ini dipertanggungjawabkan. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis berharap pada kritik dan saran yang membangun dari para pembaca. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi seluruh pihak.



Yogyakarta, 21 Juli 2021

Penulis

Ezra Efrizardi Yusufa

NIM. 17106010040



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN .....	iv
MOTTO .....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	vi
PRAKATA.....	vi
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR LAMBANG .....	xii
INTISARI.....	xiv
ABSTRACT.....	xv
BAB I. PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Batasan Masalah .....	2
1.3 Rumusan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
1.6 Tinjauan Pustaka .....	3
1.7 Sistematika Penulisan .....	5
BAB II. DASAR TEORI.....	7
2.1 Persamaan Diferensial .....	7
2.2 Persamaan Diferensial Linear.....	9
2.3 Masalah Syarat Batas.....	13

2.4	Ekspansi Fungsi Eigen .....	14
2.5	Fungsi Dirac Delta.....	15
2.6	Transformasi Laplace .....	17
2.7	Fungsi Green dan Identitas Green .....	27
2.8	Orthogonalitas Fungsi Eigen .....	32
2.9	Model Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando .....	35
BAB III. PEMBAHASAN.....		39
3.1	Kajian Model Matematika Gelombang Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando.....	39
3.2	Fungsi Green Persamaan Dawai Vibrasi Sasando melalui Fungsi Dirac Delta dan Identitas Green .....	41
3.3	Konstruksi Fungsi Green pada Persamaan Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando melalui Metode Ekspansi Fungsi Eigen.....	43
3.4	Konstruksi Fungsi Green pada Persamaan Vibrasi Dawai pada Alat Musik Sasando melalui Metode Transformasi Laplace .....	78
BAB IV. PENUTUP .....		88
4.1	Kesimpulan.....	88
4.2	Saran .....	90
DAFTAR PUSTAKA .....		92
CURRICULUM VITAE.....		94

## DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Lambang	Keterangan
$\lambda$	Lambda	$\phi$	Phi
$\pi$	Pi	$\tau$	Tau
$\delta$	Delta	$\partial$	Do
$\infty$	Tak hingga	$L$	Operator linear
$\varepsilon$	Epsilon	$\Sigma$	Sigma
$\rho$	Rho	$\Omega$	Omega
$\psi$	Psi	$\partial\Omega$	Do Omega
$\nabla$	Operator del	$\mathbb{N}$	Himpunan Bilangan Asli
$\nabla^2$	Operator Laplacian	$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\int$	Integral lipat satu	$\frac{\partial}{\partial x}$	Turunan parsial tingkat satu terhadap variabel $x$
$\iint$	Integral lipat dua	$\frac{\partial^n}{\partial x^n}$	Turunan parsial tingkat $n$ terhadap variabel $x$
$\iiint$	Integral lipat tiga	$u(x, t)$	Fungsi $u$ pada $x$ dan $t$
$X'_n(x)$	Nilai turunan fungsi $X_n$ pada $x$	$\delta(t-a)$	Fungsi Dirac delta dengan titik singular $a$

$e$	Eksponensial	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$	Limit $f(x)$ menuju $L$ untuk $x$ mendekati $c$
-----	--------------	-----------------------------------	--



## INTISARI

### FUNGSI GREEN PADA PERSAMAAN GELOMBANG DAWAI VIBRASI ALAT MUSIK SASANDO

Oleh

EZRA EFRIZARDI YUSUFA

NIM. 17106010040

Sasando ialah alat musik yang dimainkan dengan cara dipetik dan berasal dari Pulau Rote, Nusa Tenggara Timur. Gelombang gerak suara pada alat musik sasando dimodelkan oleh Ari Kusumastuti dkk pada tahun 2019 dalam bentuk persamaan diferensial parsial secara matematis. Fungsi Green merupakan salah satu formula untuk menemukan solusi fundamental dari suatu persamaan diferensial parsial yang diberikan beserta syarat batasnya. Skripsi ini membahas langkah-langkah mengkonstruksi fungsi Green dari persamaan gelombang dawai vibrasi pada alat musik sasando melalui ekspansi fungsi eigen dan transformasi Laplace. Konstruksi fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen dilakukan dengan menggunakan fungsi Dirac delta dan identitas Green. Setelah bentuk solusi persamaan gelombang dawai vibrasi pada alat musik sasando yang didalamnya terdapat fungsi Green diperoleh, kemudian diperoleh bentuk fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen. Konstruksi fungsi Green melalui transformasi Laplace dilakukan dengan membentuk persamaan pembantu transformasi Laplace pada kedua ruas dari persamaan gelombang dawai vibrasi pada alat musik sasando dan gunakan syarat awalnya. Selanjutnya transformasi Laplace invers pada kedua ruas yang akan memberikan solusi yang dibutuhkannya dan membentuk fungsi Green pada solusi persamaan gelombang dawai vibrasi pada alat musik sasando melalui transformasi Laplace.

**Kata Kunci:** *Persamaan diferensial parsial, fungsi Green, syarat batas, ekspansi fungsi eigen, transformasi Laplace, sasando, gelombang dawai vibrasi.*

## ABSTRACT

### GREEN FUNCTION OF THE STRING VIBRATION MODEL ON SASANDO MUSICAL INSTRUMENT

by

EZRA EFRIZARDI YUSUFA

NIM. 17106010040

Sasando is a musical instrument that is played by picking and originating from Rote Island, East Nusa Tenggara. The sound motion waves on the Sasando musical instrument were modeled by Ari Kusumastuti et al in 2019 in the form of mathematical partial differential equations. Green's function is a formula for finding the fundamental solution of a given partial differential equation and its boundary conditions. This thesis discusses the steps of constructing the Green function from the equation of vibrational string waves in Sasando musical instruments through the expansion of the eigen function and the Laplace transform. The construction of the Green function through the expansion of the eigen function is carried out using the delta dirac function and the Green identity. After the form of the solution for the equation of the vibration string waves on the Sasando musical instrument in which there is a Green function is obtained, then the form of the Green function is obtained through the expansion of the eigen function. The construction of the Green function through the Laplace transform is done by forming a Laplace transform auxiliary equation on the two sides of the vibration string wave equation on a Sasando musical instrument and using the initial conditions. Furthermore, the inverse Laplace transform on the two segments will provide the solution needed by it and forming the Green function on the solution of the vibration string wave equation on the Sasando musical instrument through the Laplace transformation.

**Keywords:** *Partial differential equation, Green's function, boundary conditions, expansion of the eigen function, Laplace transform, Sasando, vibrational string wave.*

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Menurut Andi Hakim Nasution (1997), Matematika merupakan suatu ilmu struktur, rangka (pesanan) dan hubungan yang mencakup dasar-dasar perhitungan, pengukuran, dan penggambaran objek. Ilmu Matematika akan terus berkembang seiring berjalannya waktu, baik itu cepat maupun lambat. Ilmu Matematika digunakan sebagai acuan oleh disiplin ilmu-ilmu sains untuk memecahkan masalah kehidupan di dunia yang berhubungan dengan alam, seperti Fisika, Kimia, dan Biologi. Selain ilmu-ilmu sains, Matematika juga dapat digunakan dalam bidang kesenian salah satunya ialah gelombang gerak suara yang dihasilkan dengan salah satu alat musik tradisional negara Indonesia, yaitu Sasando yang berasal dari Pulau Rote, Nusa Tenggara Timur. Sasando memiliki kemiripan dengan alat musik seperti gitar, kecapi, dan harpa yang dimainkan dengan cara dipetik. Ciri khas dari Sasando ialah bahan dasarnya menggunakan daun lontar dan bambu, memiliki 32 senar, dan memiliki suara yang indah dan khas ketika memainkannya. Gelombang gerak suara pada alat musik sasando dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan secara matematis. Pemodelan gelombang gerak suara ini bertujuan untuk mempermudah menentukan solusi dari masalah tersebut menggunakan ilmu matematika.

Penelitian mengenai kontruksi persamaan gerak dawai pada alat musik Sasando telah dilakukan oleh Ari Kusumastuti dkk (2019). Mereka mengkontruksikan model tersebut dengan hukum-hukum Fisika yaitu hukum Hooke dan Newton serta menggunakan persamaan Laplace. Model ini berbentuk persamaan diferensial parsial orde dua dan mengandung variabel terikat  $u$  dan dua variable bebas yaitu keadaan yang dilambangkan dengan  $x$



dan waktu yang dilambangkan dengan  $t$ . Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memiliki fungsi terdiri dari dua atau lebih peubah yang tidak diketahui dan turunan parsialnya terhadap peubah di dalam persamaan tersebut. Dalam persamaan diferensial parsial diberikan suatu syarat batas, terdapat empat macam syarat batas yaitu Dirichlet, Neumann, Robin dan Campuran. Sehingga metode yang dapat digunakan dalam penyelesaian masalah syarat batas pada persamaan diferensial parsial (PDP) ialah fungsi green.

Fungsi green merupakan salah satu metode penyelesaian dalam persamaan diferensial yang dicetus oleh George Green (1793-1841), seorang ilmuwan berkebangsaan Inggris dalam karya tulis ilmiah berjudul "*Essay on Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electromagnetism*" tahun 1828. Ada banyak metode dalam menentukan nilai fungsi green, seperti transformasi Laplace, metode variasi parameter, transformasi fourier, dan ekspansi nilai eigen. Metode ekspansi fungsi eigen ialah suatu metode dalam menyelesaikan masalah dengan melakukan ekspansi atas solusi ke dalam suatu deret yang bersesuaian dengan fungsi eigen yang diperoleh yaitu solusi persamaan dengan syarat batas homogen. Metode transformasi Laplace ialah suatu metode dalam menyelesaikan masalah dengan mengubah suatu fungsi umum menjadi fungsi aljabar variabel kompleks, secara umum dinyatakan sebagai  $s$ . Apabila persamaan dalam  $s$  dipecahkan, maka diperoleh suatu solusi persamaannya.

Melihat latar belakang di atas penelitian kali ini akan mengkonstruksikan persamaan fungsi green yang dibangun dari persamaan gerak dawai pada alat musik sasando dengan metode ekspansi fungsi eigen dan transformasi Laplace.

## **1.2 Batasan Masalah**

Mengingat kemampuan penulis dan efektifitas waktu dalam mengerjakan penelitian ini, maka pembahasan difokuskan pada persamaan gerak dawai

pada alat musik sasando yang diselesaikan dengan metode fungsi Green melalui ekspansi fungsi eigen dan transformasi Laplace.

### **1.3 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan, permasalahannya dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana mengkonstruksikan fungsi green pada persamaan gerak dawai alat musik sasando dengan menggunakan metode ekspansi nilai eigen?
2. Bagaimana mengkonstruksikan fungsi green pada persamaan gerak dawai alat musik sasando dengan menggunakan metode transformasi Laplace?

### **1.4 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan diadakannya penelitian ini adalah mengkonstruksi dan mengetahui fungsi green pada persamaan gerak dawai sasando dengan menggunakan metode ekspansi nilai eigen dan transformasi Laplace.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan gambaran dan penjelasan kepada pembaca, khususnya mahasiswa matematika mengenai konstruksi fungsi green pada persamaan gerak dawai sasando. Selain itu, diharapkan penelitian ini dapat memberikan manfaat dan dijadikan rujukan dalam perkembangan ilmu matematika.

### **1.6 Tinjauan Pustaka**

Penelitian ini menggunakan rujukan dari beberapa penelitian-penelitian sebelumnya dan referensi-referensi yang dibutuhkan dalam melakukan penelitian ini. Tinjauan Pustaka dalam penulisan skripsi ini sebagai berikut:

1. Penelitian oleh Nurul Anggraeni Hidayati mengenai “*Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Sasando*” tahun 2018 dari Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim. Penelitian ini menjelaskan solusi analitik pada persamaan gerak dawai pada alat musik sasando di dalam

skripsinya dan dimuat dalam jurnal karya ilmiah yang ditulis oleh A Kusumastuti dkk yang berjudul “*Analytical Solution of the String Vibration Model on Sasando musical instrument*” pada tahun 2019. Namun di dalam penelitian ini belum dikonstruksikan fungsi Green pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando. Oleh karena itu, kami mengambil solusi analitik dari skripsinya dan menggunakannya untuk mengkonstruksikan fungsi Green dari persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando dengan metode transformasi Laplace dan ekspansi fungsi eigen yang akan dilakukan dalam skripsi ini.

2. Penelitian oleh Fathul Khairi mengenai “*Fungsi Green dari Persamaan Poisson dan Penerapan dalam Elektrostatis*” tahun 2020 dari Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta mengenai konstruksi fungsi green pada persamaan poisson dengan metode ekspansi fungsi eigen. Di dalam skripsinya, beliau mengkonstruksikan fungsi Green pada persamaan Poisson sehingga perbedaan dengan penelitian kami ialah objek penelitiannya dan persamaannya menggunakan salah satu metode konstruksi fungsi Green yaitu metode ekspansi fungsi eigen. Sehingga metode dalam penelitiannya akan menjadi rujukan dalam skripsi ini untuk menentukan fungsi Green pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando.
3. Penelitian oleh Slamet Mugiyono mengenai “*Fungsi Green pada Persamaan Diferensial Biasa*” tahun 2011 dari Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta mengenai konstruksi fungsi green pada persamaan diferensial. Di dalam skripsinya, beliau mengkonstruksikan fungsi Green pada persamaan diferensial melalui metode transformasi Laplace dan metode variasi parameter. sehingga perbedaan dengan penelitian kami ialah objek penelitiannya dan persamaannya menggunakan salah satu metode konstruksi fungsi Green yaitu metode transformasi Laplace. Sehingga salah satu metode dalam penelitiannya akan menjadi rujukan dalam skripsi ini untuk menentukan fungsi Green pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando.

4. Jurnal yang berjudul “*Analytical Solution of the String Vibration Model on Sasando musical instrument*” ditulis oleh A Kusumastuti dkk, 2019. Jurnal ini menjelaskan persamaan gerak dawai pada alat musik sasando dan solusi analitiknya. Konstruksi pada solusi analitik pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando telah dijabarkan pada penelitian yang dilakukan oleh Nurul Anggraeni Hidayati di dalam skripsinya. Sehingga dari jurnal ini kami mengambil solusi analitik untuk dijadikan rujukan dalam mengkonstruksi fungsi Green pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando.

## **1.7 Sistematika Penulisan**

Skripsi ini disusun dengan sistematika penulisan sebagai berikut

### **Bab I : Pendahuluan**

Bab ini menyajikan hal-hal seperti latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, dan sistematika penulisan

### **Bab II : Landasan Teori**

Bab ini berisi tentang teori-teori yang mendukung dalam melakukan penelitian ini seperti, teori dasar pada persamaan diferensial, masalah syarat batas, ekspansi nilai eigen, transformasi Laplace, fungsi dirac delta, pengantar fungsi green, identitas green, orthogonalitas fungsi eigen, dan model gerak vibrasi dawai pada alat musik sasando.

### **Bab III : PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang analisis konstruksi fungsi pada model persamaan gerak dawai pada alat musik sasando yang menjadi tujuan penulisan skripsi ini. Bab ini membahas kajian model gerak dawai pada alat musik sasando, fungsi green melalui fungsi dirac delta dan identitas green, dan konstruksi fungsi green pada persamaan dengan metode ekspansi fungsi eigen dan metode transformasi Laplace.

### **Bab IV : KESIMPULAN**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian yang dilakukan dan saran-saran untuk penelitian selanjutnya.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian dan penelitian yang dilakukan, maka penulis dapat menyimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Fungsi Green pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando dengan metode ekspansi fungsi eigen yaitu

Kasus I, dengan  $k_d^2 > 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + \frac{2c^2}{l}\right)$  diperoleh:

$$G(x,t;a,b) = -\left(\frac{2}{A}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \cosh\left(\frac{P}{2}t\right) e^{-\frac{k_d t}{2}} + \frac{k_d}{P} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sinh\left(\frac{P}{2}t\right) e^{-\frac{k_d t}{2}} \right)}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 f(B)} \cdot \frac{\left( \sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \cosh\left(\frac{P}{2}b\right) e^{-\frac{k_d b}{2}} + \frac{k_d}{P} \sin\left(\frac{n\pi}{l}a\right) \sinh\left(\frac{P}{2}b\right) e^{-\frac{k_d b}{2}} \right)}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 f(B)}$$

dengan

$$f(B) = \left( \frac{(2 + Pi(B)) - 2 \cosh^2\left(\frac{PB}{2}\right) e^{-k_d B}}{2k_d} \right) + \left(\frac{k_d}{P}\right)^2 \left( \frac{Pi(B) - 2 \sinh^2\left(\frac{PB}{2}\right) e^{-k_d B}}{2k_d} \right) + \left(\frac{k_d i(B)}{P}\right),$$

$$i(B) = \frac{\left( \sinh(PB) \cdot \frac{1}{k_d} e^{-k_d B} \right) + \frac{P}{k_d} \left( \cosh(PB) \cdot \frac{1}{k_d} e^{-k_d B} \right) + \frac{P}{k_d^2}}{1 - \left( \frac{P}{k_d} \right)^2}, \text{ dan}$$

$$P = \sqrt{k_d^2 - 4 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \left( \frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l} \right)}.$$

Kasus II, dengan  $k_d^2 = 4 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \left( \frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l} \right)$  diperoleh:

$$G(x,t,a,b) = - \left( \frac{2}{A g(B)} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( e^{\frac{k_d t}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + \frac{k_d}{2} t e^{\frac{k_d t}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \right) \left( e^{\frac{k_d b}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) + \frac{k_d}{2} t e^{\frac{k_d b}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \right)}{\left( \frac{n\pi}{l} \right)^2}$$

$$\text{dengan } g(B) = \left( \frac{1}{k_d} - \frac{1}{k_d} e^{-k_d B} \right) + \frac{3}{k_d^2} \left( 1 - e^{-k_d B} \left( B - \frac{1}{k_d} \right) \right) - \left( B^2 \cdot \frac{1}{k_d} e^{-k_d B} \right).$$

Dan Kasus III, dengan  $k_d^2 < 4 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \left( \frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l} \right)$  diperoleh:

$$G(x,t,a,b) = - \left( \frac{2}{A} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \cos\left(\frac{R}{2} t\right) e^{\frac{k_d t}{2}} + \frac{k_d}{P} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \sin\left(\frac{R}{2} t\right) e^{\frac{k_d t}{2}} \right)}{\left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 h(B)} \cdot \frac{\left( \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \cos\left(\frac{R}{2} b\right) e^{\frac{k_d b}{2}} + \frac{k_d}{P} \sin\left(\frac{n\pi}{l} a\right) \sin\left(\frac{R}{2} b\right) e^{\frac{k_d b}{2}} \right)}{\left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 h(B)}$$

$$\text{Dengan } j(B) = \frac{\left( \sinh(RB) \cdot -\frac{1}{k_d} e^{-k_d B} \right) + \frac{P}{k_d} \left( \cosh(RB) \cdot -\frac{1}{k_d} e^{-k_d B} \right) + \frac{R}{k_d^2}}{1 + \left( \frac{R}{k_d} \right)^2},$$

$$h(B) = \left( \frac{(2 + R j(B)) - 2 \cos^2\left(\frac{RB}{2}\right) e^{-k_d B}}{2k_d} \right) + \left( \frac{k_d}{R} \right)^2 \left( \frac{R j(B) - 2 \sin^2\left(\frac{PB}{2}\right) e^{-k_d B}}{2k_d} \right) + \left( \frac{k_d j(B)}{R} \right),$$

$$\text{dan } R = \sqrt{k_d^2 - 4 \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2 \left( \frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l} \right)}.$$

2. Solusi umum pada persamaan vibrasi dawai pada alat musik sasando dengan metode transformasi Laplace yaitu

$$u(x, t) = \int_0^t f(t-a) \delta(t-Cx) \frac{(x\sqrt{h(x)C}) e^{-\frac{(\sqrt{h(x)Cx})^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^3}} da$$

dengan fungsi Green  $g(x, t-a) = \delta(t-Cx) \frac{(x\sqrt{h(x)C}) e^{-\frac{(\sqrt{h(x)Cx})^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^3}},$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l}}} \quad h(x) = k_d - f(x) - k_d f(x) \text{ dan masing-masing } f(x)$$

ialah pada kasus I dengan  $k_d^2 > 4 \left( \frac{n\pi}{l} \right) \left( \frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l} \right)$  diperoleh

$f(x) = u(x, 0) = 0$ . Kasus II dengan  $k_d^2 = 4 \left( \frac{n\pi}{l} \right) \left( \frac{1}{2} c^2 + \frac{2c^2}{l} \right)$  dan kasus



III dengan  $k_d^2 < 4\left(\frac{n\pi}{l}\right)\left(\frac{1}{2}c^2 + \frac{2c^2}{l}\right)$  diperoleh

$$f(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \left(\frac{2hl^2}{n^2h^2d(l-d)}\right) \sin\left(\frac{n\pi d}{l}\right).$$

#### 4.2 Saran

Konstruksi fungsi Green pada penelitian ini menggunakan metode ekspansi fungsi eigen dan metode transformasi Laplace. Penulis berharap, pada penelitian selanjutnya dapat menggunakan metode konstruksi fungsi Green yang berbeda karena konstruksi fungsi Green memiliki metode yang variatif seperti transformasi fourier, metode variasi parameter, dan lain-lain.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anggraeni H, N. (2018) *Analisis Uji Validasi Model Matematika Vibrasi Dawai Sasando* [skripsi]. Malang : Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Budi, D. (2011) *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*. Yogyakarta, Indonesia : Graha Ilmu.
- Herman, R. L. (2015) *Introduction to Partial Diferensial Equations*. North Carolina, USA : R. L. Herman.
- Khairi, F. (2020) *Fungsi Green dari Persamaan Poisson dan Penerapan dalam Elektrostatis* [skripsi]. Yogyakarta : Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
- Kusumastuti, A., Jamhuri, M. and Hidayati N, A. (2019) 'Analytical solution of the string vibration model on Sasando musical instrument'. *Journal of Physics : Conference Series*, 5.
- Laugesen, R. S. (2009) *Spectral Theory of Partial Differential Equations*. Urbana, USA : University of Illinois.
- Mugiyono, S. (2011) *Fungsi Green pada Persamaan Diferensial Biasa* [skripsi]. Yogyakarta : Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
- Munaqqib, M. (2018) 'Penyelesaian Masalah Syarat Batas Persamaan Helmholtz menggunakan Dual Reciprocity Boundary Element Method'. *Jurnal "LOG!K@"*, 8, 115-132.
- Strauss, W. A. (2008) *Partial Diferensial Equations*. 2nd edn. USA : Brown University.

Sugiyanto, and Mugiyono, S. (2011) *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta, Indonesia : SUKA Press.

Tang, K. T. (2007) *Metode Matematika untuk Sains dan Teknik 2*. New York, USA :Springer.

