ANALISIS KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG *QUASI* METRIK-b SEGI EMPAT TERASING LENGKAP

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

Mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

MOHAMMAD IFAN AFANDI

15610017

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA

2020

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : MOHAMMAD IFAN AFANDI
NIM : 15610017
Judul Skripsi : ANALISA KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG *QUASI* METRIK-b SEGI EMPAT TERASING LENGKAP.

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 5 Mei 2020
Pembimbing

Malahayati, M.Sc.
NIP: 19840412 201101 2 010

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1083/Un.02/DST/PP.00.9/05/2020

Tugas Akhir dengan judul	: ANALISIS KETUNGGALAN TITIK TETAP DI RUANG QUASI METRIK-b SEGI EMPAT TERASING LENGKAP

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama	: MOHAMMAD IFAN AFANDI
Nomor Induk Mahasiswa	: 15610017
Telah diujikan pada	: Kamis, 14 Mei 2020
Nilai ujian Tugas Akhir	: A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Malahayati, S.Si., M.Sc
SIGNED

Valid ID: 5ed71f4e1f8e2

Penguji I

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5ed72166bdabd

Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 5ed71ebbab15d

Yogyakarta, 14 Mei 2020
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Dr. Murtono, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 5ed87fac6a99e

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Mohammad Ifan Afandi
NIM	: 15610017
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penilis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 5 Mei 2020

Yang Menyatakan

Mohammad Ifan Afandi

Skripsi ini saya persembahkan untuk

Bapak, Ibu, dan Adik tercinta;

Teman-teman Matematika 2015;

Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi;

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta;

Diriku sendiri.

“Jangan khawatirkan kesulitan-kesulitan dalam Matematika. Saya pastikan bahwa kesulitanku dalam hal Matematika masih lebih sulit daripada kesulitanmu. Saya berpikir terus menerus berbulan-bulan dan bertahun tahun, sembilan puluh sembilan kali dan kesimpulannya salah. Untuk yang keseratus Saya benar. Jadi Jika nilai 9 adalah kesuksesan dalam hidup, maka nilai 9 sama dengan X ditambah Y ditambah Z. Bekerja adalah X, Y adalah bermain, dan Z adalah untuk berdiam diri” (Albert Einstein)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala limpahan rahmat, taufiq, dan hidayahNya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta pada Program Studi Matematika. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa tulisan dalam skripsi ini jauh dari kesempurnaan, semoga bisa menjadi salah satu acuan untuk penyempurnaan bagi peneliti-peneliti selanjutnya, sehingga saran, kritik, dan tanggapan positif dari berbagai pihak masih penulis harapkan untuk menyempurnakan hasil penelitian ini.

Skripsi dengan judul *"Analisis Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Quasi Metrik-b Segi Empat Terasing Lengkap"* ini tentunya tidak akan dapat terselesaikan sesuai dengan yang diharapkan apabila tanpa adanya bantuan, bimbingan, saran, dan kritik serta bantuan moral maupun material dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Murtono, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si., selaku penasehat akademik dan Ketua Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Malahayati, S.Si., M.Sc selaku pembimbing yang telah dengan sabar, tulus dan ikhlas meluangkan waktu, tenaga dan pikiran memberikan bimbingan,

motivasi, arahan, dan saran-saran yang sangat berharga kepada penulis selama menyusun skripsi.

4. Segenap dosen dan staff Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta yang telah memberikan ilmunya dari awal perkuliahan sampai akhir, semoga ilmu yang penulis peroleh dapat bermanfaat dalam kehidupan penulis.
5. Kedua orang tua, kedua kakak dan keponakan, kedua adikku tercinta, yang tiada henti memberikan dukungan, doa, dan kasih sayang kepada penulis.
6. Teman-teman kelas angkatan 2015 terima kasih atas dukungan, do'a, dan semangat kebersamaan yang kalian berikan.
7. Keluarga Mahasiswa Blora (KAMABA) Yogyakarta dan Sedulur Sikep Blora-Yogyakarta yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas kebersamaan selama ini.

Pada akhirnya semoga segala amal baik yang telah diberikan kepada penulis, mendapat imbalan yang lebih baik dan lebih sempurna dari Allah SWT. Semoga karya tulis ini dapat bermanfaat bagi kemajuan bangsa dan negara kita tercinta. *Amin, amin ya robbal'alamin.*

Yogyakarta, 17 Mei 2020
Penulis

Mohammad Ifan Afandi
NIM: 15610017

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$<$	: Kurang dari
$>$	: Lebih dari
$\leq$	: Kurang dari sama dengan
$\geq$	: Lebih dari sama dengan
$\in$	: Elemen atau anggota himpunan
$\rightarrow$	: Menuju
∞	: Tak terhingga
ε	: Epsilon
α	: Alpha
$\blacksquare$	: Akhir dari suatu pembuktian
$=$	: Sama dengan
$\neq$	: Tidak sama dengan
$\forall$	: Untuk setiap
$\subset$	: Subset
$\setminus$	: Selain
$\Leftrightarrow$	: Jika dan hanya jika
(X, d)	: Ruang metrik pada himpunan X dengan metrik d

ABSTRAK

Teorema titik tetap merupakan suatu hal yang menarik untuk dibahas, di antaranya dalam pembahasan titik tetap di ruang metrik. Metrik adalah jarak di antara pasangan elemen yang memenuhi sifat tertentu, yaitu positifitas, definitas, simetri, dan ketaksamaan segitiga. Himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu disebut ruang metrik.

Seiring perkembangan ruang metrik, muncul konsep ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing. Ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing adalah ruang metrik yang memenuhi sifat positifitas, sifat simetri, dan ketaksamaan-b segi empat. Selanjutnya dalam ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing tidak harus memenuhi sifat definitas dan sifat simetri. Sifat asimetri dan ketidakdefinitasan merupakan pembeda antara ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing dengan ruang metrik yang lain.

Skripsi ini membahas analisis teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dan mengkonstruksi ulang penerapan penjumlahan barisan geometri berhingga yang tidak tepat pada penelitian sebelumnya. Membahas juga teorema-teorema yang menunjang pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dan melengkapi langkah-langkah pembuktian secara sistematis.

Kata Kunci : titik tetap, ruang metrik-b segi empat terasing, ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing, sifat asimetri ruang metrik.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Banyak sekali pembahasan dalam analisis yang mengalami perkembangan seiring perkembangan zaman sehingga menghasilkan konsep-konsep baru, salah satunya adalah ruang metrik. Teorema titik tetap merupakan hal yang penting dalam pembahasan mengenai ruang metrik. Teorema ini pertama kali diperkenalkan saat munculnya Prinsip Kontraksi Banach *(Banach Contraction Principle)* pada tahun 1922, yaitu teori di bidang teori titik tetap untuk pemetaan kontraktif di ruang metrik lengkap yang selanjutnya berhasil dibuktikan oleh Banach sehingga kemudian disebut dengan Prinsip Kontraksi Banach *(Banach Contraction Principle)*. Hasil dari pembuktian tersebut telah menjadi aset penting untuk penerapan matematika yang setiap tahunnya penerapan matematika juga semakin berkembang. Oleh karena itu, banyak ilmuan yang termotivasi untuk mengembangkan teorema titik tetap, diantaranya di ruang metrik.

Secara umum dalam garis bilangan real, jarak antara dua titik adalah nilai mutlak dari selisih keduanya. Pada tahun 1906 Maurice Frechet memperkenalkan konsep jarak pada himpunan tak kosong. Jarak ini selanjutnya disebut metrik pada himpunan bilangan real. Kajian tentang metrik selanjutnya menjadi salah satu konsep dasar untuk membahas matematika analisis. Metrik adalah jarak diantara pasangan elemen yang memenuhi sifat tertentu, yaitu positifitas, definitas, simetri, dan ketaksamaan segitiga. Himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan metrik tertentu disebut ruang metrik. Selanjutnya, pasangan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu metrik disebut ruang metrik.

Seiring berjalannya waktu, penerapan ruang metrik sangat dirasakan manfaatnya, sehingga penelitian ruang metrik selalu berkembang dan menghasilkan ruang metrik - ruang metrik baru. Ruang metrik – ruang metrik baru tersebut antara lain ruang *quasi* metrik (Wilson, 1931), ruang metrik terasing (Hitsler, 2000), ruang *quasi* metrik terasing (Zeyada, 2005), ruang metrik-b (Bakhtin, 1989), ruang *quasi* metrik-b (Shah, 2012), ruang metrik-b terasing (Hussain, 2013), ruang *quasi* metrik-b terasing (Chakkrid, 2015), ruang metrik segi empat (Branciari, 2000), ruang metrik-b segi empat (George, 2015), ruang *quasi* metrik-b segi empat dan ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing (Golhare, 2019) dan masih banyak lagi ruang metrik – ruang metrik yang lain.

Tahun 1914, Hausdorff mengenalkan sifat asimetri yang merupakan pembeda antara ruang metrik dan ruang *quasi* metrik. Di ruang metrik terdapat sifat simetri, sedangkan di ruang *quasi* metrik tidak harus berlaku sifat simetri. Ketidaksimetrisan tersebut menurut William Lawvere pada tahun 2002 dalam jurnalnya yang berjudul *Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories* terjadi karena pengaruh alam, contohnya waktu perjalanan dan biaya transportasi pada jalan tanjakan. Tahun 2000 Hitsler memperkenalkan ruang metrik terasing, dimana pada ruang metrik terasing tidak harus memenuhi sifat definitas. Selanjutnya tahun 2001, Hitsler menulis disertasi yang diantaranya membahas tentang aplikasi ruang metrik terasing dalam logika pemrograman yang berjudul *"Generalized Metrics and Topology in Logic Programming Semantics"*. Pada tahun 2005, Zeyeda termotivasi untuk mengembangkan ruang *quasi* metrik dan ruang metrik terasing yang selanjutnya bernama ruang *quasi* metrik terasing yang tidak harus memenuhi sifat definitas dan sifat simetri. Selanjutnya tahun 2019 P. G. Golhare dan C. T. Aage memperkenalkan ruang metrik-b segi empat terasing dan ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing untuk pertama kali melalui jurnalnya yang berjudul *"Dislocated Quasi Regtangular b-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems"* yang menjelaskan tentang teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap.

Menarik untuk dibahas mengenai teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap seperti yang ditulis oleh P. G. Golhare dan C. T. Aage. Skripsi ini mengkonstruksi ulang penerapan penjumlahan barisan geometri berhingga dan melengkapi lebih detail langkah-langkah pembuktian yang belum dibahas di jurnal. Skripsi ini membahas juga teorema dan lemma yang menjadi penunjang agar mempermudah dalam memahami pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap yang diambil dari referensi lain.

1.2 Batasan Masalah

Pembatasan masalah dalam suatu skripsi sangat penting guna menghindari pembahasan objek yang terlalu meluas terhadap objek dari suatu skripsi, agar lebih fokus dan terarah sesuai dengan tema skripsi. Berdasarkan latar belakang masalah diatas, yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap beserta sifat-sifat yang mendukung pembuktian tersebut. Adapun batasan masalah pada skripsi ini adalah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap yang hanya fokus di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dan sifat-sifat yang mendukung pembuktian teorema tersebut.

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dan sifat-sifat apa saja yang mendukung pembuktian tersebut.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini antara lain sebagai berikut :

a) Mengkaji dan menjelaskan konsep ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing dan beberapa sifatnya.

b) Mengkaji dan menjelaskan langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dan sifat-sifat yang mendukung pembuktian tersebut.

c) Memenuhi salah satu persyaratan kelulusan dalam mencapai derajat sarjana S1 Program Studi Matematika.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain sebagai berikut:

a) Memberikan pengetahuan tentang konsep ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing dan beberapa sifatnya.

b) Menjelaskan langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dan sifat-sifat yang mendukung pembuktian tersebut.

c) Memperkenalkan konsep ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing untuk bahan referensi mahasiswa UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta khususnya program studi Matematika agar dapat dikaji lebih lanjut sehingga mampu menjadi motivasi pembaca untuk mempelajari perkembangan ruang metrik lebih lanjut.

1.6 Tinjauan Pustaka

Konsep ruang metrik-b pertama kali dikenalkan oleh Bakhtin pada tahun 1989. Pada tahun 2015, Chakkrid Klin-eam dan Cholatis Suanoom menulis jurnal yang berjudul *"Dislocated quasi-b-metric spaces and fixed point theorems for cyclic contractions"* yang membahas konsep ruang *quasi* metrik-b terasing untuk pertama kalinya dan selanjutnya pada tahun 2016, Mujeeb Ur Rahman bersama Muhammad Sarwar juga menulis jurnal tentang titik tetap di ruang *quasi* metrik-b terasing dengan judul *"Dislocated Quasi b-Metric Space and Fixed Point*

Theorems". Tahun 2015, George memperkenalkan ruang metrik-b segi empat. Selanjutnya tahun 2016, Heu-Sheng Ding dkk menulis jurnal tentang titik tetap di ruang metrik-b, ruang metrik segi empat, dan ruang metrik-b segi empat dengan judul *"On some fixed point results in b-metric, rectangular and b-rectangular metric spaces".*

Tahun 2019, P. G. Golhare dan C. T. Aage memperkenalkan ruang metrik-b segi empat terasing dan ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing untuk pertama kali melalui jurnalnya yang berjudul *"Dislocated Quasi Regtangular b-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems"* yang menjelaskan tentang ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap beserta sifat-sifat yang berlaku di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing yang menjadi acuan utama pada skripsi ini.

Referensi yang digunakan sebagai materi pendukung dalam mempelajari karya P. G. Golhare dan C. T. Aage yang berjudul *"Dislocated Quasi Regtangular b-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems"* antara lain: buku *"Introduction to Real Analysis"* edisi ketiga tahun 2000 karya Bartle dan Sherbert, buku karya Cem Giray tahun 2008 yang berjudul "*Arithmetic and Geometric Sequences*" , buku karya Kreysziq Erwin tahun 1978 yang berjudul *"Introductory Functional Analysis with Applications"* , serta buku *"Metric Spaces"* tahun 2000 karya Satish Shirali dan Harkrishan L. Vasudeva.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini terdiri atas empat bab dengan sistematika sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, dan metode penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan tentang teori-teori yang menjadi dasar atau landasan dalam penulisan skripsi ini agar pembaca mudah memahami dan mengikuti pembahasan yang akan dipaparkan pada bab-bab selanjutnya. Teori-teori yang menjadi dasar atau landasan dalam penulisan skripsi ini antara lain dasar-dasar analisis real, definisi ruang metrik dan sifat-sifat yang berlaku di ruang metrik, dan teorema titik tetap di ruang metrik.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini menjelaskan tentang definisi ruang metrik-b segi empat terasing beserta contohnya, definisi ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing beserta contohnya, sifat-sifat yang berlaku di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing, teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap dengan langkah-langkah pembuktiannya beserta contohnya.

BAB IV PENUTUP

Bab ini merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran-saran yang diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

1.8 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini adalah studi literatur, yaitu dengan mempelajari beberapa sumber tertulis tentang konsep ruang metrik-b segi empat terasing, konsep ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing beserta sifat-sifat yang berlaku didalamnya dan teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap beserta contohnya. Skripsi ini menggunakan metode studi literatur yang bersifat kualitatif.

Pembahasan teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap diawali dengan mempelajari dasar-dasar analisis real, konsep ruang metrik dan teorema titik tetap sebagai landasan teori. Selanjutnya mempelajari konsep ruang metrik-b segi empat terasing beserta contohnya dan konsep ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing beserta contohnya. Kemudian dilanjutkan dengan mempelajari titik tetap serta beberapa teorema yang menjadi pendukung dalam pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap.

Pembahasan inti dalam penelitian ini adalah tentang teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap. Dijelaskan langkah-langkah pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap yang mengacu pada jurnal yang ditulis oleh P. G. Golhare dan C. T. Aage tahun 2019 yang berjudul *"Dislocated Quasi Regtangular b-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems"*. Beberapa langkah pembuktian teorema tidak dijelaskan dalam jurnal tersebut sehingga perlu jurnal-jurnal lain dan buku-buku yang berkaitan sebagai rujukan, sehingga diharapkan tidak ada kebingungan bagi pembaca.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa setiap ruang metrik-b segi empat terasing merupakan ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing, namun tidak berlaku sebaliknya. Setiap ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing, belum tentu ruang metrik-b segi empat terasing. Ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing yang merupakan ruang metrik-b segi empat terasing adalah ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing yang memenuhi sifat simetri.

Pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap diawali dengan membahas dasar-dasar analisis seperti barisan konvergen, barisan terbatas, barisan Cauchy, barisan monoton, barisan geometri dan lain-lain. Selanjutnya membahas dasar-dasar ruang metrik seperti barisan konvergen, barisan Cauchy, dan definisi lengkap. Selain itu, membahas juga tentang teori titik tetap di ruang metrik.

Pada proses pembuktian teorema ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap, dapat disimpulkan bahwa ruang metrik-b segi empat terasing lengkap yang memenuhi ketaksamaan (3.3) merupakan ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap yang juga memenuhi ketaksamaan (3.3). Selanjutnya ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap yang memenuhi ketaksamaan (3.3) tersebut memiliki titik tetap tetap tunggal.

Skripsi ini juga mengkonstruksi ulang beberapa teori yang tidak tepat pada penelitian sebelumnya tentang ketunggalan titik tetap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap yang ditulis oleh P. G. Golhare dan C. T. Aage pada jurnalnya yang berjudul *"Dislocated Quasi Regtangular b-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems"*. Revisi terhadap penelitian tersebut yaitu :

1. Penerapan rumus penjumlahan barisan geometri berhingga pada ketaksamaan (A.1), (A.2), (A.4), dan (A.6). Ketaksamaan (A.1), (A.2), (A.4), dan (A.6) membentuk deret geometri berhingga, jadi digunakan rumus penjumlahan barisan geometri berhingga. Sedangkan penelitian sebelumnya memakai rumus penjumlahan barisan geometri tak berhingga.

2. Penerapan ketaksamaan (3.6) pada ketaksamaan (3.23), dimana pada penelitian sebelumnya pada ketaksamaan (A.3) ditulis

$$b^{i-2}[d(x_{n+2i},x_{n+2i-2})]+b^{i-2}[d(x_{n+2i-2},x_{n+2i-3})+ d(x_{n+2i-3},x_{n+2i-4})]+b^{i-3}[d(x_{n+2i-4},x_{n+2i-5})+ d(x_{n+2i-5},x_{n+2i-6})]+\cdots+b[d(x_{n+2},x_{n+1})+d(x_{n+1},x_n)]$$

$$\leq b^{i-2}[a^{n+2i-2}d(x_2,x_0)]+b^{i-2}[a^{n+2i-3}d(x_1,x_0)+ a^{n+2i-4}d(x_1,x_0)]+b^{i-3}[a^{n+2i-4}d(x_1,x_0)+a^{n+2i-5}d(x_1,x_0)]+\cdots+ b[a^{n+1}d(x_1,x_0)+a^n d(x_1,x_0)]$$

yang seharusnya

$$b^{i-2}[d(x_{n+2i},x_{n+2i-2})]+b^{i-2}[d(x_{n+2i-2},x_{n+2i-3})+$$
$$d(x_{n+2i-3},x_{n+2i-4})]+b^{i-3}[d(x_{n+2i-4},x_{n+2i-5})+$$
$$d(x_{n+2i-5},x_{n+2i-6})]+\cdots+b[d(x_{n+2},x_{n+1})+d(x_{n+1},x_n)]$$

$$\leq b^{i-2}[a^{n+2i-2}d(x_2,x_0)]+b^{i-2}[a^{n+2i-3}d(x_1,x_0)+$$
$$a^{n+2i-4}d(x_1,x_0)]+b^{i-3}[a^{n+2i-5}d(x_1,x_0)+a^{n+2i-6}d(x_1,x_0)]+\cdots+$$
$$b[a^{n+1}d(x_1,x_0)+a^nd(x_1,x_0)].$$

3. Penerapan ketaksamaan (3.6) pada ketaksamaan (3.27), dimana pada penelitian sebelumnya pada ketaksamaan (A.5) ditulis

$$b^{i-2}[d(x_{n+2i-1},x_{n+2i-2})]+b^{i-2}[d(x_{n+2i-2},x_{n+2i-3})+$$
$$d(x_{n+2i-3},x_{n+2i-4})]+b^{i-3}[d(x_{n+2i-4},x_{n+2i-5})+$$
$$d(x_{n+2i-5},x_{n+2i-6})]+\cdots+b[d(x_{n+2},x_{n+1})+d(x_{n+1},x_n)]$$

$$\leq b^{i-2}[a^{n+2i-2}d(x_1,x_0)]+b^{i-2}[a^{n+2i-3}d(x_1,x_0)+$$
$$a^{n+2i-4}d(x_1,x_0)]+b^{i-3}[a^{n+2i-4}d(x_1,x_0)+a^{n+2i-5}d(x_1,x_0)]+\cdots+$$
$$b[a^{n+1}d(x_1,x_0)+a^nd(x_1,x_0)]$$

yang seharusnya

$$b^{i-2}[d(x_{n+2i-1},x_{n+2i-2})]+b^{i-2}[d(x_{n+2i-2},x_{n+2i-3})+$$
$$d(x_{n+2i-3},x_{n+2i-4})]+b^{i-3}[d(x_{n+2i-4},x_{n+2i-5})+$$
$$d(x_{n+2i-5},x_{n+2i-6})]+\cdots+b[d(x_{n+2},x_{n+1})+d(x_{n+1},x_n)]$$

$$\leq b^{i-2}[a^{n+2i-2}d(x_1,x_0)]+b^{i-2}[a^{n+2i-3}d(x_1,x_0)+$$
$$a^{n+2i-4}d(x_1,x_0)]+b^{i-3}[a^{n+2i-5}d(x_1,x_0)+a^{n+2i-6}d(x_1,x_0)]+\cdots+$$

$b[a^{n+1}d(x_1, x_0) + a^n d(x_1, x_0)]$.

4. Penerapan ketaksamaan (3.3) yaitu

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) \text{ untuk } 0 \leq a \leq \frac{1}{b} \text{ dengan } b > 1.$$

Pada penelitian sebelumnya pada ketaksamaan (A.7) ditulis

$$d(u, u') = d(Tu, Tu') \leq ad(u, u') < d(u, u').$$

Jelas untuk $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$ dengan $b > 1$ ketaksamaan diatas salah karena ketaksamaan diatas tidak berlaku untuk $a = 0$. Selanjutnya dalam skripsi ini untuk menyelesaikan ketaksamaan diatas untuk $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$ dengan $b > 1$, dibuktikan terlebih dahulu untuk $a = 0$ dan dilanjutkan untuk $0 < a \leq \frac{1}{b}$ dengan $b > 1$.

5. Penerapan ketaksamaan (3.3) yaitu

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, y) \text{ untuk } 0 \leq a \leq \frac{1}{b} \text{ dengan } b > 1.$$

Pada penelitian sebelumnya pada ketaksamaan (A.8) ditulis

$$d(u', u) = d(Tu', Tu) \leq ad(u', u) < d(u', u).$$

Jelas untuk $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$ dengan $b > 1$ ketaksamaan diatas salah karena ketaksamaan diatas tidak berlaku untuk $a = 0$. Selanjutnya dalam skripsi ini untuk menyelesaikan ketaksamaan diatas untuk $0 \leq a \leq \frac{1}{b}$ dengan

$b > 1$, dibuktikan terlebih dahulu untuk $a = 0$ dan dilanjutkan untuk $0 < a \leq \frac{1}{b}$ dengan $b > 1$.

4.2 Saran

Berdasarkan kesimpulan diatas, penulis menyarankan:

1. Mengembangkan penelitian tentang ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing dan aplikasinya.

2. Menyelidiki atau mencari referensi selanjutnya apakah definisi barisan konvergen di ruang metrik-b segi empat terasing adalah diberikan barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik-b segi empat terasing (X, d). Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = d(x, x)$. Selanjutnya $x \in X$ disebut limit barisan x_n.?

3. Menyelidiki atau mencari referensi selanjutnya apakah definisi barisan Cauchy di ruang metrik-b segi empat terasing adalah diberikan barisan $\{x_n\}$ di ruang metrik-b segi empat terasing (X, d). Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan Cauchy jika dan hanya jika nilai $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+i})$ dan nilai $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+i}, x_n)$ ada, berhingga, dan sama untuk setiap $i \in \mathbb{N}$.?

4. Menyelidiki berdasarkan saran nomor 2 dan 3, apakah teorema yang dibahas selanjutnya menghasilkan titik tetap tunggal di ruang metrik-b segi empat terasing lengkap?.

5. Menyelidiki atau mencari referensi selanjutnya apakah pemetaan T pada Teorema 3.3.1. merupakan pemetaan kontraktif.?

   Dimana definisi *Lipschitzian* (Agarwal, 2004: 1) yaitu diberikan ruang metrik (X, d). Pemetaan $T : X \to X$ memenuhi kondisi *Lipschitzian* apabila terdapat suatu konstanta $a \geq 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$. Selanjutnya apabila kondisi *Lipschitzian* mempunyai konstanta *Lipschitzian* $a < 1$, maka pemetaan T merupakan pemetaan kontraktif *(Contraction Mapping).*

Semoga skripsi ini dapat menjadi inspirasi bagi pembaca untuk mengembangkan lebih lanjut tentang teorema ketunggalan titik tatap di ruang *quasi* metrik-b segi empat terasing lengkap khususnya dan konsep ruang metrik yang lain pada umumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P., dkk. 2004. *Fixed Point Theory and Applications*. London: Cambridge University Press.

Banach, Stefan. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fundamenta Mathematicae 3.1 (1922): 133-181.

Bartle, R.G., dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* Third Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Czerwik, Stefan. 1993. *Contraction Mappings in b-metric Spaces*. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 1(1993)5-11.

Ding, Hui-Sheng., dkk. 2016. *On some fxed point results in b-metric, rectangular and b-rectangular metric spaces.* Arab J Math Sci 22 (2016) 151–164.

Ege, Ozgur dan Karaca, Ismet. 2015. *Banach Fixed Point Theorem for Digital Images*. Available online at www.tjnsa.com. Nonlinear Sci. Appl. 1-9.

George, R. 2015. *Rectangular b-metric space and contraction principles*. Nonlinear Sci. Appl. 8 (2015), 1005-1013.

Giray, Cem. 2008. *Arithmetic and Geometri Sequences*. Istanbul: Zambak Yayinlari.

Golhare, P.G. dan Aage, C.T. 2019. *Dislocated Quasi Rectangular b-Metric Spaces and Related Fixed Point Theorems*. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 7(2) July 2019, pp. 309-331.

Hausdorff, Felix. 1914. *Grundzuge Der Mengenhere*. Leipzig Verlag Von Veit & Comp.

Hitzler, Pascal dan Seda, Anthony. 2000. *Dislocated Topologies*. Slides for Presentation at SCAM 2000, Bratislava Slovak Republic April 2000.

Hitzler, Pascal. 2001. *Generalized Metrics and Topology in Logic Programming Semantics.* National University of Ireland, University Collage Cork. Januari 2001.

Karapinar, Erdal. 2014. *Discussion on Contraction on $\alpha - \psi$ Generalized Metric Spaces*. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 962784, 7 pages.

Hussain, Nawab dkk. 2013. *Common fixed point results for weak contractive mappings in ordered b-dislocated metric spaces with applications*. Hussain et al. Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:486.

Klin-eam, Chakkrid dan Suanoom, Cholatis. 2015. *Dislocated Quasi-b-Metric Spaces and Fixed Point Theorems for Cyclic Contractions*. Klin-eam and Suanoom Fixed Point Theory and Applications (2015) 2015:74.

Kreyszig, Erwin. 1978. *Introduction to Functional Analysis with Application.* New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lawvere, F.W. 2002. *Metric Spaces, Generalized Logic, and Closed Categories.* Reprints in Theory and Applications of Categories, No. 1, 2002, pp. 1–37.

Listiawati, Sinta. 2017. *Teorema Ketunggalan Titik Tetap Di Ruang Metrik-b Lengkap*. *Skripsi.* UIN Sunan Kalijaga, Yogyakarta.

Malahayati. 2017. *Ketunggalan Titik Tetap di Ruang Dislocated Quasi b-Metrik pada Pemetaan Siklik*. JURNAL MATEMATIKA “MANTIK” Vol. 03 No. 01. Mei 2017.

Rahman, M.U dan Sarwar, M. 2016. *Dislocated Quasi b-Metric Space and Fixed Point Theorems*. Electronic Journal og Mathematical Analysis and Applications, Vol. 4(2) July 2016, pp. 16-24.

Roshan. J. R dkk. 2016.. *New fixed point results in b-rectangular metric spaces.* Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2016, Vol. 21, No. 5, 614–634.

Samet, Bessem. 2010. *Discussion on "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces" by A. Branciari.* Publ. Math. Debrecen 76/4 (2010), 493-494.

Shah, H.M. dan Hussain, Nawab. 2012. *Nonlinear Contractions in Partially Ordered Quasi b-Metric Spaces*. Commun. Korean Math. Soc. 27 (2012), No. 1, pp. 117-128.

Shirali, Satish., dan Vasudeva, H. L. 2006. *Metric Spaces.* London: Springer-Verlag.

Wilson, W.A. 1931. *On Quasi Metric Spaces*. Am. J. Math.53(3),673-684(1931).

Zeyada, F.M. 2005. A *Generalization of a Fixed Point Theorem Due to Hitzler and Seda in Dislocated Quasi-Metric Spaces*. The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 31, Number 1A.