SKRIPSI

ANALISIS TEORI TITIK TETAP PADA RUANG METRIK PRA-URUTAN

MOH SYAMSUL ARIFIN BAKRI
21106010066

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2025

ANALISIS TEORI TITIK TETAP PADA RUANG METRIK PRA-URUTAN

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh

MOH SYAMSUL ARIFIN BAKRI

21106010066

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2025

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Moh Syamsul Arifin Bakri
NIM : 21106010066
Judul Skripsi : Analisis Teori Titik Tetap Pada Ruang Metrik Pra-urutan

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 17 April 2025
Pembimbing

Malahayati, S.Si., M.Sc.,
NIP. 19840412 201101 2 010

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-601/Un.02/DST/PP.00.9/04/2025

Tugas Akhir dengan judul : Analisis Teori Titik Tetap Pada Ruang Metrik Pra-urutan

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MOH SYAMSUL ARIFIN BAKRI
Nomor Induk Mahasiswa : 21106010066
Telah diujikan pada : Kamis, 17 April 2025
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR

Ketua Sidang

Malahayati, S.Si., M.Sc
SIGNED

Valid ID: 680715ca7f7f0

Penguji I

Aulia Khifah Futhona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 68074bb2ae4e9

Penguji II

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.
SIGNED

Valid ID: 68076366a90c1

KEMENTERIAN AGAMA UIN SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI REPUBLIK INDONESIA

Yogyakarta, 17 April 2025
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 680a2b5ff1e39

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Moh Syamsul Arifin Bakri
NIM	: 21106010066
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 17 April 2025

Moh Syamsul Arifin Bakri

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini saya persembahkan untuk keluarga tercinta, diri sendiri dan almamater UIN Sunan Kalijaga.

HALAMAN MOTTO

"Kuliah itu bukan sekadar tempat menimba ilmu buat cari kerja, tapi proses panjang untuk membentuk pola pikir, melatih kesabaran, dan memahami cara berpikir yang sistematis."

PRAKATA

Allhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul *"Analisis Teori Titik Tetap Pada Ruang Metrik Pra-urutan"*. Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini terdapat banyak hambatan dan halangan. Namun berkat adanya motivasi, bantuan, bimbingan, dan dorongan dari berbagai pihak, *alhamdulillah* skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.

2. Ibu Dr. Epha Diana Supandi, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.

3. Ibu Pipit Pratiwi Rahayu, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan pengarahan kepada penulis selama menempuh pendidikan.

4. Ibu Malahayati, S.Si., M.Sc., dan Ibu Aulia Khifah Futhona, M.Sc., selaku dosen pembimbing skripsi yang telah menyediakan waktu, tenaga, dan pikiran untuk membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.

5. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan administrasi akademik.

6. Orang tua tersayang, Bapak Moh Bakri dan Ibu Zainiyah, yang selalu memberikan doa dan dukungan terbaiknya kepada anak-anaknya.

7. Untuk seseorang yang entah di mana dan entah kapan akan hadir sebagai pendamping hidup, terima kasih untuk doa yang mungkin belum terdengar dan untuk dukungan yang kelak akan menjadi sandaran.

8. Temen-teman Aljabar 2021, khususnya Amara yang senantiasa memberikan semangat selama pembuatan skripsi ini.

9. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan yang secara langsung maupun tidak langsung membantu terselesaikannya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua yang membacanya. Penulis juga berharap kritik dan saran yang membangun.

Yogyakarta, 17 April 2025

Moh Syamsul Arifin Bakri

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL . . . . **i**

HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR . . . . **ii**

HALAMAN PENGESAHAN . . . . **iii**

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN . . . . **iv**

HALAMAN PERSEMBAHAN . . . . **v**

HALAMAN MOTTO . . . . **vi**

PRAKATA . . . . **vii**

DAFTAR ISI . . . . **ix**

DAFTAR GAMBAR . . . . **xi**

DAFTAR LAMBANG . . . . **xii**

INTISARI . . . . **xiii**

ABSTRACT . . . . **xiv**

I PENDAHULUAN **1**

1.1. Latar Belakang Masalah 1

1.2. Batasan Masalah 3

1.3. Rumusan Masalah 3

1.4. Tujuan Penelitian 3

1.5. Manfaat Penelitian 4

1.6. Tinjauan Pustaka 4

1.7. Metode Penelitian 5

1.8. Sistematika Penulisan 6

II DASAR TEORI **8**

2.1. Dasar-Dasar Analisis Real 8

2.2. Ruang Metrik 21

2.3. Limit Superior dan Limit Inferior 31

2.4. Titik Tetap 43

III Analisis Teori Titik Tetap Pada Ruang Metrik Pra-urutan Dengan Tipe Kontraksi (ψ, φ) 49

3.1. Ruang Metrik Pra-urutan 49

3.2. Fungsi Tidak Turun-$\preceq$ dan Ruang Reguler Tidak Turun 53

3.3. Fungsi Kontinu Secara Orbit dan Fungsi Kontinu-k 56

3.4. Teorema Titik Tetap Pada Ruang Metrik Pra-urutan 59

IV PENUTUP 80

4.1. Kesimpulan 80

4.2. Saran 81

DAFTAR PUSTAKA 81

Curriculum Vitae 84

DAFTAR GAMBAR

1.1 Alur Penelitian 6

DAFTAR LAMBANG

$\mathbb{N}$	:	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	:	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Q}$	:	Himpunan bilangan rasional
∞	:	Tak hingga
$x \in E$	:	x anggota himpunan A
$E \subseteq X$	:	E himpunan bagian *(subset)* atau sama dengan X
$A \subset X$	:	A himpunan bagian X
$\lvert a \rvert$	:	Nilai mutlak a
$\rightarrow$	:	Menuju
$p \Rightarrow q$	:	Jika p maka q
$\Leftrightarrow$	:	Jika dan hanya jika
ε, δ	:	Epsilon, Delta
α,β	:	Alpha, Beta
ψ, φ	:	Psi, Varphi
$\sup, \inf$	:	Supremum, Infimum
$\preceq$	:	Relasi biner
$x \preceq y$	:	x mendahului y
$f^n(x_0)$	:	Komposisi fungsi f sebanyak n di titik x_0
$X \times X$	:	X cros X
$\blacksquare$	:	Akhir suatu bukti

INTISARI

ANALISIS TEORI TITIK TETAP PADA RUANG METRIK PRA-URUTAN

Oleh

Moh Syamsul Arifin Bakri

21106010066

Ruang metrik pra-urutan merupakan ruang metrik yang dilengkapi dengan relasi pra-urutan di dalamnya. Relasi pra-urutan adalah relasi biner yang bersifat refleksif dan transitif. Teori titik tetap dapat diterapkan dalam ruang metrik pra-urutan dengan memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Skripsi ini menganalisis sifat fungsi pada ruang metrik lengkap pra-urutan dengan membangun barisan komposisi fungsi yang memenuhi beberapa kondisi tertentu sehingga barisan tersebut konvergen ke suatu titik. Lebih lanjut, limit barisan tersebut kemudian menjadi titik tetap dari fungsi yang dibahas dan bersifat tunggal dengan kondisi tertentu. Selajutnya pada bagian akhir, akan dijelaskan teori titik tetap tersebut merupakan perluasan dari prinsip kontraksi Banach dan disajikan ilustrasinya dalam bentuk contoh.
Kata kunci : Ruang Metrik, Ruang Metrik Pra-urutan, Relasi Pra-urutan, Titik Tetap, Ruang Metrik Lengkap Pra-urutan.

ABSTRACT

AN ANALYSIS OF FIXED POINT THEORY IN PREORDERED METRIC SPACE

By

Moh Syamsul Arifin Bakri

21106010066

A preordered metric space is a metric space equipped with a preorder relation. A preorder relation is a binary relation that is reflexive and transitive. Fixed point theory can be applied in preordered metric spaces under certain conditions. This thesis analyzes the properties of functions in complete preordered metric spaces by constructing a sequence of function compositions that satisfy specific conditions, such that the sequence converges to a point. Furthermore, the limit of this sequence becomes a fixed point of the function under consideration and is unique under certain conditions. Finally, in the last part, it is explained that the fixed point theory presented is a generalization of the Banach contraction principle and is illustrated through an example.

Keyword : Metric Space, Preordered Metric Space, Preorder relation, Fixed Point, Complete Preordered Metric Space.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Salah satu konsentrasi dalam ilmu matematika adalah analisis. Pengembangan konsep dasar dan teori merupakan hal yang dilakukan dalam analisis. Oleh karena itu, penting menggunakan penalaran agar memperoleh aturan-aturan diantaranya definisi, aksioma, teorema serta pembuktiannya. Suatu teori dalam matematika tidak akan berlaku apabila tanpa disertai pembuktian secara matematis. Suatu ilmu pengetahuan tidaklah cukup hanya berbentuk ucapan, tulisan ataupun teori saja, melainkan harus dibuktikan kebenarannya. Hal tersebut telah dijelaskan dalam QS. Al-Baqarah ayat 111 sebagai berikut.

وَقَالُوْا لَنْ يَّدْخُلَ الْجَنَّةَ اِلَّا مَنْ كَانَ هُوْدًا اَوْ نَصٰرٰىۗ تِلْكَ اَمَانِيُّهُمْۗ قُلْ هَاتُوْا
بُرْهَانَكُمْ اِنْ كُنْتُمْ صٰدِقِيْنَ ﴿١١١﴾

Artinya: *"Mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata, "Tidak akan masuk surga kecuali orang Yahudi atau Nasrani." Itu (hanya) angan-angan mereka. Katakanlah (Nabi Muhammad), "Tunjukkan bukti kebenaranmu jika kamu orang-orang yang benar."."*(Kementerian Agama RI, 2025).

Berdasarkan ayat di atas, Allah memerintahkan pada umat-Nya agar tidak hanya berpegang pada klaim atau angan-angan semata, tetapi juga untuk selalu memberikan bukti yang jelas dan dapat dipertanggungjawabkan atas kebenaran yang diyakini.

Salah satu topik yang sering dibicarakan dalam analisis adalah ruang metrik. Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi suatu metrik didalamnya. Metrik merupakan suatu fungsi yang memenuhi 4 aksioma yaitu positivitas, kesamaan, simetri dan ketaksamaan segitiga. Perkembangan ruang metrik sampai saat ini sangat signifikan. Banyak Matematikawan yang telah mengembangkan konsep ruang metrik, salah satunya ruang metrik pra-urutan. Ruang metrik pra-urutan merupakan ruang metrik yang dilengkapi dengan relasi pra-urutan. Relasi pra-urutam merupakan relasi biner yang bersifat refleksif dan transitif. Selanjutnya, ruang metrik pra-urutan yang lengkap disebut ruang metrik lengkap pra-urutan.

Konsep teori titik tetap dapat diaplikasikan dalam ruang metrik. Teori titik tetap sangat menarik untuk dikaji, sebab dapat diterapkan dalam berbagai bidang diantaranya bidang ekonomi dan sosial lainnya. Sama halnya di ruang metrik, eksistensi teori titik tetap juga menarik untuk dibahas pada ruang metrik pra-urutan. Konsep ini dikenalkan oleh Górnicki, 2021 dalam artikelnya. Artikel tersebut menyajikan perluasan dari prinsip kontraksi Banach yang sudah ada ke prinsip tipe kontraksi (ψ, φ), tipe kontraksi (ψ, φ) yang diperumum dan fungsi tipe Kannan pada ruang pra-urutan dimana relasi pra-urutan lebih lemah dibandingkan relasi terurut parsial.

Ide penelitian yang dilakukan oleh Górnicki, 2021 sangat menarik dan inspiratif, sebab penelitian tersebut masih terbilang baru. Oleh karena itu, skripsi ini akan membahas sebagian dari ide penelitian tersebut. Karena keterbatasan waktu dan cakupan materi yang luas, maka skripsi ini hanya akan membahas eksistensi teori titik tetap dengan tipe kontraksi (ψ, φ). Skripsi ini akan merekonstruksi ulang langkah-langkah pembuktiannya secara matematis yang tidak disertakan secara lengkap pada artikel Górnicki, 2021 dan hubungan dengan prinsip kontraksi Banach yang sudah ada serta disajikan ilustrasinya dalam bentuk contoh.

1.2. Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan sebelumnya, batasan masalah paada skripsi ini mencakup teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan dengan tipe kontraksi (ψ, φ). Adanya batasan masalah pada skripsi ini guna menghindari pembahasan objek yang meluas dari topik utama tersebut.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah dijelaskan sebelumnya, maka rumusan masalah disajikan sebagai berikut:

1. Bagaimana analisis teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan?
2. Bagaimana hubungan hasil nomor 1 dengan prinsip kontraksi Banach?
3. Bagaimana ilustrasi dalam bentuk contoh teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan?

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis berlakunya teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan.
2. Mengidentifikasi dan menjelaskan hubungan antara hasil nomor 1 dengan prinsip kontraksi Banach.
3. Memberikan ilustrasi dalam bentuk contoh teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan.

1.5. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat, antara lain:

1. Memberikan pandangan tentang teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan
2. Memberikan pemahaman mengenai hubungan hasil nomor 1 dengan prinsip kontraksi Banach.
3. Memberikan pemahaman mengenai ilustrasi contoh teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan.

1.6. Tinjauan Pustaka

Rujukan dalam penulisan skripsi ini diperoleh dari berbagai sumber, termasuk buku, makalah, dan jurnal ilmiah. Konsep relasi pra-urutan dibahas oleh James Dugundji dalam bukunya *"Topology"*(Dugundji, 1978), sementara dasar-dasar analisis real dijelaskan secara rinci dalam *"Introduction to Real Analysis"*(Bartle & Sherbert, 2010) dan *"Integration"*(McShane, 1947). Untuk pemahaman lebih lanjut mengenai ruang metrik, referensi utama yang digunakan adalah *"Metric Spaces"*(Shirali & Vasudeva, 2006). Selain itu, konsep limit superior dan limit inferior dapat ditemukan dalam buku yang berjudul *"Integration"*(McShane, 1947), *"Real Analysis"*(Folland, 1999) dan *"Elementary Real Analysis"*(Brian S. Thomson, 2008).

Pembahasan tentang teori titik tetap secara umum dikaji dalam *"Introductory Functional Analysis with Applications"*(Kreyszig, 1991), sedangkan prinsip kontraksi Banach sebagai salah satu hasil penting dalam teori ini dapat dipelajari lebih lanjut dalam *"Fixed Point Theory and Applications"*(Agarwal et al., 2001).

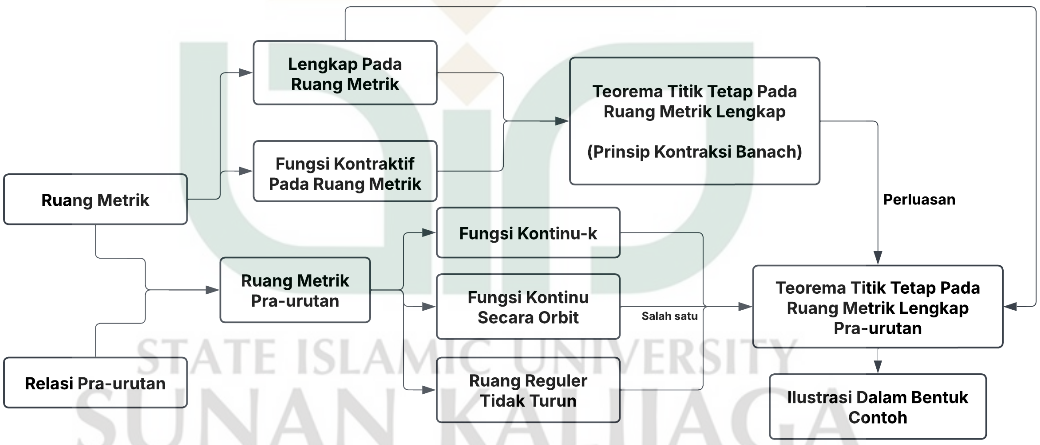
Konsep ruang reguler tidak turun, fungsi kontinu secara orbit, dan fungsi kontinu-k yang relevan dengan penelitian ini dijelaskan dalam beberapa makalah, di antaranya *"Caristi Type and Meir-keeler Type Fixed Point Theorems"*(Pant et al., 2019), *"On Some Mappings with a Unique Common Fixed Point"*(Khan & Muhammed, 2020), dan *"Fixed Points and Continuity of Contractive Maps"*(Pant & Pant, 2017).

Skripsi ini berlandaskan pada literatur utama yang ditulis oleh Jarosław Górnicki dalam artikelnya yang berjudul *"Fixed Point Theorems in Preordered Sets"*(Górnicki, 2021) pada tahun 2021. Dalam penelitian tersebut, Górnicki mengembangkan prinsip kontraksi Banach ke dalam tipe kontraksi (ψ, φ), tipe kontraksi (ψ, φ) yang diperumum, serta fungsi tipe Kannan pada ruang metrik pra-urutan. Skripsi ini secara khusus membahas eksistensi titik tetap dalam ruang metrik lengkap pra-urutan dengan tipe kontraksi (ψ, φ). Sebelum membahas eksistensi tersebut, dijelaskan lemma berdasarkan referensi dari *"Fixed Point Theorems for Generalized Contractive Mappings in Metric Spaces"*(Proinov, 2020) yang ditulis oleh Petko D. Proinov berguna dalam membuktikan eksistensi titik tetap tersebut.

1.7. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dengan pendekatan kualitatif untuk menganalisis teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan dengan tipe kontraksi (ψ, φ). Kajian diawali dengan konsep dasar ruang metrik, kelengkapannya, serta fungsi kontraktif. Selanjutnya, penelitian memperkenalkan ruang metrik yang dilengkapi relasi pra-urutan yang disebu ruang metrik pra-urutan dan sifat-sifat fungsi seperti kontinu secara orbit dan kontinu-k dan ruang metrik pra-urutan bersifat reguler tidak turun, yang menjadi dasar dalam pembuktian teorema titik tetap.

Hasil penelitian ini membahas teorema titik tetap pada ruang metrik pra-urutan dengan tipe kontraksi (ψ, φ) dan hubungannya dengan prinsip kontraksi Banach serta ilustrasi dalam bentuk contoh teorema titik tetap tersebut. Untuk memastikan pemahaman yang jelas, penelitian disusun secara sistematis dengan penjelasan rinci mengenai alur penelitian, tahapan pembuktian, serta lemma pendukung yang relevan. Selain itu, penelitian ini menyajikan analisis setiap langkah pembuktian secara terstruktur agar pembaca dapat memahami konsep yang digunakan dan hubungan antar hasil yang diperoleh. Dengan pendekatan ini, penelitian diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap pengembangan teori titik tetap dalam ruang metrik pra-urutan. Berikut diberikan flowchart yang menggambarkan alur penelitian sehingga mempermudah pemahaman pembaca.



Gambar 1.1 Alur Penelitian

1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada skripsi ini dibagi menjadi empat bab. Bab pertama membahas mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, mamfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab dua menjelaskan dasar-dasar teori untuk memudahkan dalam memahami pembahasan yang akan diuraikan pada bab-bab selanjutnya. Dasar-dasar teori yang dimaksud antara lain dasar-dasar analisis real, definisi ruang metrik beserta sifat-sifat yang berlaku didalamnya, limit superior dan limit inferior beserta sifat-sifatnya dan penjelasan teorema titik tetap pada ruang metrik.

Bab tiga menjelaskan tentang ruang pra-urutan beserta ruang metrik pra-urutan, ruang reguler tidak turun, fungsi kontinu secara orbit dan fungsi kontinu-k serta teorema titik tetap yang berlaku pada ruang metrik pra-urutan beserta hubungannya dengan prinsip kontraksi Banach dan ilustrasinya dalam bentuk contoh.

Bab empat merupakan penutup yang berisi kesimpulan dari pembahasan bab-bab sebelumnya serta saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab-bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Fungsi yang terdefinisi pada ruang metrik lengkap pra-urutan mempunyai titik tetap jika memenuhi salah satu dari 3 kondisi yaitu kontinu-k, kontinu secara orbit atau ruang metrik pra-urutannya mempunyai sifat reguler tidak turun. Pembuktian dimulai dengan membentuk barisan komposisi fungsi secara rekursif (induktif) dan ditunjukkan bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy dalam ruang metrik pra-urutan. Karena ruang metrik pra-urutannya lengkap, maka barisan Cauchy tersebut konvergen. Limit barisan tersebut merupakan titik tetap apabila memenuhi salah satu dari 3 kondisi yaitu kontinu-k, kontinu secara orbit atau ruang metrik pra-urutannya mempunyai sifat reguler tidak turun. Selanjutnya, fungsi tersebut mempunyai titik tetap tunggal apabila setiap pasangan (x, y) dalam domain metrik pra-urutannya terdapat titik w sehingga $x \preceq w$ dan $y \preceq w$. Jika titik tetapnya tunggal, maka barisan komposisi fungsi nya konvergen titik demi titik ke titik tetap tersebut.

2. Setiap ruang metrik pra-urutan merupakan ruang metrik. Semua kondisi hipotesa pada Teorema 3.4.2 dipenuhi dan apabila mengulang kondisi $\psi(t) = t$ dan $\varphi(t) = \alpha t$ dengan $\alpha \in [0, 1)$ untuk setiap $t > 0$, maka hasil pada nomor

1 merupakan perluasan dari prinsip kontraksi Banach.

3. Diberikan suatu contoh sebagai ilustrasi dengan ruang metrik pra-urutannya merupakan ruang metrik biasa (*usual metric*). Selain itu, relasi pra-urutan dalam ruang metriknya didefinisikan yaitu

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x = y \text{ atau } 0 \leq x < y), \forall x, y \in \mathbb{R},$$

dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \frac{x+2}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$. Didefinisikan juga fungsi $\psi, \varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dengan $\psi(t) = t$ dan $\varphi(t) = \frac{t}{2}$, untuk setiap $t > 0$ dan ditunjukkan memenuhi semua hipotesa dalam Teorema 3.4.2. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.4.2 diperoleh fungsi f mempunyai suatu titik tetap.

4.2. Saran

Setelah menyelesaian penelitian ini, penulis menyarankan:

1. Penelitian ini masih terbatas pada tipe kontraksi (ψ, φ). Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk mengembangkan hasil ini pada tipe kontraksi lainnya, seperti tipe kontraksi (ψ, φ) yang diperumum dan fungsi tipe Kannan pada ruang metrik pra-urutannya.

2. Toerema titik tetap pada ruang metrik lengkap pra-urutan dapat dicari lebih lanjut hubungannya dengan teorema titik tetap yang lain seperti teorema titik tetap Ran-Reurings dan teorema titik tetap Boyd-Wong's.

3. Contoh-contoh yang diberikan pada ruang metrik lengkap pra-urutan masih relatif sederhana. Oleh karena itu, sangat diperlukan penelitian lebih lanjut agar memperoleh contoh-contoh ruang metrik lengkap pra-urutan yang lebih beragam dan memiliki tingkat kesulitan yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P., Meehan, M., & O'Regan, D. (2001). *Fixed Point Theory and Applications*. Cambridge University Press.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons.

Brian S. Thomson, Judith B. Bruckner, A. M. B. (2008). *Elementary Real Analysis*. ISBN 1-434841-61-8, Available at `https://classicalrealanalysis.info/`.

Dugundji, J. (1978). *Topology*. Printed in the United States of America.

Folland, G. B. (1999). *Real Analysis:Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley & Sons.

Górnicki, J. (2021). Fixed point theorems in preordered sets. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 23:71:20 pages, DOI: `10.1007/s11784-021-00909-6`.

Kementerian Agama RI (2025). Al-qur'an digital. `https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/2?from=1&to=286`. Diakses pada 17 Januari 2025.

Khan, A. & Muhammed, D. (2020). On some mappings with a unique common fixed point. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22, DOI: `10.1007/s11784-020-00781-w`.

Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications,*. John Wiley Sons.

McShane, E. J. (1947). *Integration*. Princeton University Press, Princeton.

Pant, A. & Pant, R. (2017). Fixed points and continuity of contractive maps. *Filomat*, 31:3501–3506, DOI: 10.2298/FIL1711501P.

Pant, A., Pant, R., & Joshi, M. (2019). Caristi type and meir-keeler type fixed point theorems. *Filomat*, 33:3711–3721, DOI: 10.2298/FIL1912711P.

Proinov, P. (2020). Fixed point theorems for generalized contractive mappings in metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22, DOI: 10.1007/s11784-020-0756-1.

Shirali, S. & Vasudeva, H. L. (2006). *Metric Spaces*. Springer Science & Business Media.