

SKRIPSI

**EKSISTENSI TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKSI
ENRICHED DI RUANG METRIK KONVEKS**

**Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh derajat
Sarjana Ilmu Matematika**



MESALIANI NEGARA

NIM. 18106010013

**STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2022

HALAMAN PERSETUJUAN



Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga



FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu 'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Mesaliani Negara

NIM : 18106010013

Judul Skripsi : Eksistensi Titik Tetap Pada Pemetaan Kontraksi *Enriched* di Ruang Metrik Konveks

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu 'alaikum wr. wb.

Pembimbing I

Malahayati, S.Si., M.Sc

NIP. 19840412 201101 2 010

Yogyakarta, 3 Agustus 2022

Pembimbing II

Dr. M. Wakhid Muthofa, S.Si., M.Si.

NIP: 19800402 200501 1 003

HALAMAN PENGESAHAN



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1834/Uln.02/PP.00.9/08/2022

Tugas Akhir dengan judul : EKSISTENSI TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKSI ENRICHED DI RUANG METRIK KONVEKS

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MESALIANI NEGARA
Nomor Induk Mahasiswa : 18106010013
Telah diujikan pada : Kamis, 11 Agustus 2022
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Malahayati, S.Si., M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 630021716689



Penguji I
Dr. Muhammad Wakid Mursifa, S.Si.,
M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 630021687968



Penguji II
Aulia Khrifah Pathona, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 630063699388



Yogyakarta, 11 Agustus 2022
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Dr. Dra. Hj. Khuzul Wardani, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 630053877173

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mesaliani Negara
NIM : 18106010013
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 4 Agustus 2022



Mesaliani Negara

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya.”

-QS. Al-Baqarah : 286-

“Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan (sebesar biji dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan) nya.”

-QS. Al-Zalzalah : 7-

“Jalani, nikmati, syukuri.”

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini saya persembahkan untuk keluarga tercinta, khususnya kedua orang tua dan adik-adik yang saya sayangi.

Skripsi ini juga saya persembahkan kepada diri saya sendiri sebagai bentuk apresiasi dan wujud syukur karena telah berjuang sampai titik ini.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur kehadirat Allah SWT, Tuhan semesta alam yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi yang berjudul Eksistensi Titik Tetap dari Pemetaan Kontraksi *Enriched* di Ruang Metrik Konveks dengan tepat waktu. Shalawat serta salam tidak lupa penulis haturkan kepada junjungan Nabi Agung Muhammad SAW yang kita nantikan syafaatnya di yaumul akhir nanti.

Skripsi ini disusun dengan tujuan sebagai salah satu syarat mendapatkan gelar Sarjana Ilmu Matematika (S.Mat). Penyusunan skripsi ini tentunya tidak lepas dari bimbingan, dukungan, dan motivasi banyak orang kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Phil Al Makin, MA., selaku rektor UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dr. Khurul Wardati, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., dan Mohammad Farhan Qudratullah, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penasihat Akademik mahasiswa matematika angkatan 2018 UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
5. Malahayati, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing Skripsi I yang telah membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
6. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Skripsi II yang telah membimbing penulis dalam penyusunan skripsi ini.
7. Bapak Djaja Negara dan Ibu Lilih Aliyani selaku orang tua penulis yang telah memberikan dukungan, motivasi, cinta dan kasih sayang kepada penulis serta

tidak lupa mendoakan penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini. Terima kasih juga untuk adikku Junindra Cahya Negara dan Ramadan Septa Negara yang selalu mengingatkan penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.

8. Sahabat-sahabat penulis ketika SMA, Ammalia, Indah, Ayu, Nahdah, Nova, Putri, Ravica, dan Tsaniya yang selalu mendengarkan keluh kesah penulis dan memberikan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat penulis semasa kuliah Nurul Amni, Gadis Mauli Latifa, Nisa Arofatul Aulia, yang selalu mendukung dan memberikan semangat kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2018 yang selalu memberikan dukungan, semangat, dan kenangan indah yang tak terlupakan selama masa perkuliahan.
11. Teman-teman KKN kelompok 173 Geger Hanjuang yang sudah seperti keluarga, terima kasih telah memberikan dukungan dan semangat kepada penulis, serta memberikan kenangan yang tak terlupakan kepada penulis.
12. Pihak-pihak lainnya yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah memberikan doa dan dukungan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna dan masih terdapat kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan segala kritik dan saran yang membangun. Penulis juga berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi banyak orang.

Yogyakarta, 23 Juli 2021

Penulis
Mesaliani Negara

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	iv
MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR LAMBANG	xi
INTISARI	xii
ABSTRACT	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Batasan Masalah.....	3
1.3 Rumusan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian.....	3
1.5 Manfaat Penelitian.....	3
1.6 Tinjauan Pustaka	4
1.7 Sistematika Penulisan.....	5
1.8 Metode Penelitian.....	6

BAB II LANDASAN TEORI	8
2.1 Konsep Dasar Analisis Real	8
2.2 Ruang Metrik.....	30
2.3 Teorema Titik Tetap	42
2.4 Ruang Bernorma.....	44
BAB III TEOREMA TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKSI <i>ENRICHED</i> DALAM RUANG METRIK KONVEKS	49
3.1 Ruang Metrik Konveks	49
3.2 Sifat-Sifat Dasar dari Ruang Metrik Konveks.....	53
3.3 Kontraksi <i>Enriched</i> di Ruang Metrik Konveks	59
3.4 Teorema Titik Tetap dari Kontraksi <i>Enriched</i> di Ruang Metrik Konveks..	60
BAB IV PENUTUP	76
4.1 Kesimpulan.....	76
4.2 Saran.....	77
DAFTAR PUSTAKA	78

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan	Lambang	Keterangan
\mathbb{R}	Himpunan bilangan real	\rightarrow	Menuju
\mathbb{N}	Himpunan bilangan asli	\sup	Supremum
$ a $	Nilai mutlak bilangan real a	\inf	Infimum
\in	Anggota	λ	Lamda
$>$	Lebih dari	θ	Teta
$<$	Kurang dari	ε	Epsilon
\geq	Lebih dari sama dengan	∞	Tak hingga
\leq	Kurang dari sama dengan	$X \times X$	X cros X
$=$	Sama dengan	$[a, b]$	Himpunan tertutup dari a hingga b
\neq	Tidak sama dengan	(X, d)	Ruang metrik pada himpunan X dengan metrik d
\subset	Subset	$(X, \ \cdot\)$	Ruang Banach pada himpunan X dengan norm $\ \cdot\ $
\Rightarrow	Syarat perlu	(X, d, W)	Ruang metrik konveks pada himpunan X dengan metrik d dan dengan struktur konveks W
\Leftarrow	Syarat cukup	$T(x)$	Titik tetap dari suatu fungsi T
\Leftrightarrow	Jika dan hanya jika		

INTISARI

EKSISTENSI TITIK TETAP PADA PEMETAAN KONTRAKSI ENRICHED DI RUANG METRIK KONVEKS

Oleh

Mesaliani Negara

NIM. 18106010013

Ruang metrik konveks merupakan salah satu perluasan dari konsep ruang metrik biasa. Ruang metrik konveks pertama kali diperkenalkan oleh Takahashi pada tahun 1970. Ruang metrik konveks merupakan suatu himpunan tak kosong X dengan suatu metrik d yang memiliki suatu struktur konveks W . Kemudian pada tahun 2021 Vasile dan Berinde memperkenalkan pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik yang merupakan perluasan dari prinsip pemetaan kontraksi Banach di ruang metrik.

Penelitian ini membahas tentang ruang metrik konveks, pemetaan kontraksi *enriched* dan teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks. Pembuktian teorema titik tetap tersebut memiliki langkah-langkah sebagai berikut. Pertama dibentuk barisan Picard sehingga dari barisan tersebut diperoleh barisan Cauchy yang konvergen ke suatu titik. Selanjutnya titik tersebut merupakan salah satu calon titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched*. Kemudian ditunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan tersebut memiliki titik tetap tunggal. Pada penelitian ini diperoleh bahwa setiap pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks mempunyai titik tetap tunggal dengan membentuk barisan Picard melalui pemetaan yang mendefinisikan struktur konveks di ruang metrik konveks. Selain itu akan diberikan beberapa contoh dari definisi ruang metrik konveks dan pemetaan kontraksi *enriched* yang belum diberikan oleh peneliti sebelumnya.

Kata Kunci: Titik Tetap, Ruang Metrik Konveks, Kontraksi *Enriched*

ABSTRACT

EXISTENCE OF FIXED POINT OF ENRICHED CONTRACTION MAPPINGS IN CONVEX METRIC SPACE

By

Mesaliani Negara

18106010013

Convex metric spaces is one of the extensions of the usual metric concept. The convex metric space introduced by Takahashi in 1970. The convex metrik space is non-empty set X with metric d that have a convex structure. Then in 2021 Vasile and Berinde introduced the mapping of Enriched Contractions in the metric space which is an extension of the Banach contraction mapping principle in the metric space.

This study discusses the convex metric space, mapping of enriched contractions and fixed point theorem of enriched contraction mappings in convex metric space. The proof of the fixed point theorem has the following steps. First, a Picard's sequence is formed so from that sequence we get a Cauchy sequence that converges to a point. Furthermore, this point is one of the candidate fixed points in enriched contraction mapping. Then it is shown that the fixed point of the mapping has a unique fixed point. In this study, it was found that every enriched contraction mappings in convex metric space has a single point by forming a Picard sequence through mapping that defines convex structure in the convex metric space. In addition, it will given an example of the definition of convex metric space and the mapping of enriched contractions that has not been given by the previous author.

Keywords: *Fixed Point, Convex Metric Space, Enriched Contraction*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika dalam kehidupan manusia merupakan salah satu ilmu penting, tanpa disadari matematika menjadi salah satu bagian dalam diri manusia. Mengetahui angka dan berhitung merupakan salah satu bagian kecil dari matematika. Matematika merupakan ilmu yang berhubungan dengan penalaran, di dalam matematika kita diajarkan untuk menyelesaikan suatu permasalahan secara terstruktur dan sistematis (Turmudi, 2010). Matematika membahas tentang konsep bilangan, besaran, bangun, dan ruang. Seiring dengan berkembangnya ilmu pengetahuan, matematika murni terbagi menjadi empat cabang ilmu, diantaranya adalah aljabar, analisis, statistika, dan matematika terapan.

Analisis merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari analisis real dan analisis fungsional. Analisis real membahas tentang konsep bilangan, barisan, limit, turunan, dan integral (Khusna, 2020). Sedangkan analisis fungsional membahas tentang konsep ruang metrik, ruang topologi, dan ruang bernorma. Salah satu konsep yang menarik untuk dibahas karena selalu mengalami perkembangan adalah ruang metrik.

Konsep ruang metrik pertama kali diperkenalkan pada tahun 1906 oleh Maurice Rene Frechet yang merupakan matematikawan Perancis. Ruang metrik merupakan suatu himpunan tak kosong X dengan fungsi jarak yang memiliki beberapa sifat (Ekayanti dan Putri, 2018). Konsep ruang metrik ini menjadi dasar bagi ilmuwan matematika lain untuk mengembangkan ruang metrik lain, salah satunya adalah ruang metrik konveks. Ruang metrik konveks pertama kali diperkenalkan oleh Takahashi (1970) yang merupakan matematikawan Jepang dalam

penelitiannya yang berjudul “*A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings*” yang membahas tentang struktur konveks dalam ruang metrik. Pada penelitian tersebut disebutkan bahwa ruang metrik dikatakan konveks apabila ruang metrik tersebut memiliki struktur konveks.

Salah satu teorema penting yang selalu dibahas dalam ruang metrik adalah teorema titik tetap. Teorema yang pertama kali di’cetuskan oleh Stefan Banach ini menjelaskan bahwa jika diberikan pemetaan fungsi T dari himpunan X ke dirinya sendiri akan memiliki titik tetap apabila terdapat $x \in X$ sehingga berlaku $Tx = x$, dengan x merupakan titik tetap dari T . Selanjutnya teorema titik tetap dari pemetaan yang didefinisikan pada ruang metrik akan menunjukkan eksistensi dan ketunggalan dari suatu titik tetap. Lalu pemetaan T yang memenuhi $d(Tx, Ty) \leq c \cdot d(x, y)$ disebut pemetaan kontraksi. Oleh karena itu teorema titik tetap dikenal juga sebagai teorema pemetaan kontraksi.

Pemetaan kontraksi di ruang metrik terus berkembang menjadi pemetaan kontraksi lain, seperti pemetaan kontraksi Kannan, pemetaan kontraksi Chatterjea, dan pemetaan kontraksi *enriched*. Pemetaan kontraksi *enriched* merupakan pemetaan kontraksi yang diperkenalkan pada tahun 2020 oleh Vasile Berinde dan Madalina Pacurar dalam jurnal yang berjudul “*Approximating fixed points of enriched contractions in Banach spaces*” yang membahas teorema titik tetap dari pemetaan kontraksi *enriched* di ruang Banach. Lalu pada tahun 2021 Vasile berinde dan Madalina Pacurar dalam jurnal yang berjudul “*Existence and Approximation of Fixed Points of Enriched Contractions and Enriched φ -Contractions*” memperkenalkan teorema titik tetap dari pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

Berdasarkan perkembangan ruang metrik dan teorema titik tetap akan menjadi topik yang menarik untuk diteliti apabila keduanya dikaitkan. Oleh karena itu, penelitian ini akan membahas tentang “Eksistensi Titik Tetap pada Pemetaan Kontraksi *Enriched* di Ruang Metrik Konveks” yang merupakan penjabaran dari

jurnal karya Vasile Berinde dan Madalina Pacurar (2021) yang berjudul “*Existence and Approximation of Fixed Points of Enriched Contractions and Enriched φ -Contractions*”. Dalam penelitian ini akan di bahas konsep dari ruang metrik konveks beserta contohnya, sifat dari ruang metrik konveks, konsep dari pemetaan kontraksi *enriched* beserta contohnya, teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks, dan melengkapi langkah-langkah pembuktian pada teorema yang terdapat dalam jurnal tersebut.

1.2 Batasan Masalah

Sebuah penelitian memerlukan batasan masalah supaya fokus pada inti pembahasan yang sesuai dengan tujuan penelitian sehingga terhindar dari pembahasan objek yang meluas. Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka penelitian pada skripsi ini akan dibatasi pada teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

1.3 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini berdasarkan uraian latar belakang dan batasan masalah di atas adalah bagaimana eksistensi titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis konsep ruang metrik konveks.
2. Menganalisis pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.
3. Menganalisis teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat antara lain sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang konsep ruang metrik konveks.

2. Memberikan pengetahuan tentang pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.
3. Memberikan pengetahuan tentang teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

1.6 Tinjauan Pustaka

Struktur konveks dalam ruang metrik pertama kali diperkenalkan oleh Takahashi (1970) kemudian Abbas (2007) memperkenalkan titik tetap dan aproksimasi dalam ruang metrik konveks. Selanjutnya pada tahun 2020 Vasile Berinde dan Madalina Pacurar memperkenalkan pemetaan kontraksi *enriched* dalam penelitian tentang titik tetap di ruang Banach, yang kemudian akan berkaitan dengan penelitian ini. Selanjutnya pada tahun 2021 Vasile Berinde dan Madalina Pacurar juga melakukan penelitian tentang eksistensi dan aproksimasi titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* dan kontraksi- φ *enriched*. Penelitian inilah yang menjadi rujukan utama peneliti dalam menganalisis teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

Penjelasan mengenai persamaan dan perbedaan dari penelitian ini dengan penelitian lainnya yang disajikan dalam bentuk tabel berikut ini.

Nama Peneliti	Judul Penelitian	Persamaan	Perbedaan
Wataru Takahashi	<i>A Convexity in MetricSpace and Nonexpansive Mappings</i>	Konsep dan beberapa sifat di ruang metrik konveks	Pemetaan dan teorema titik tetap yang akan dibahas
Ismat Beg dan Mujahid Abbas	<i>Common Fixed Points and Best Approximation in Convex Metric Spaces</i>	Konsep ruang metrik konveks	Teorema titik tetap yang akan dibahas.

Vasile Berinde dan Madalina Pacurar	<i>Approximating fixed points of enriched contractions in Banach spaces</i>	Pemetaan kontraksi <i>enriched</i> yang akan dibahas	Konsep ruang yang akan dibahas.
Vasile Berinde dan Madalina Pacurar	<i>Existence and Approximation of Fixed Points of Enriched Contractions and Enriched φ-Contractions</i>	Teorema titik tetap dan pemetaan kontraksi <i>enriched</i> yang akan dibahas	Contoh yang belum disebutkan oleh peneliti sebelumnya.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini terdiri atas empat bab dengan rincian sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan mengenai latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, sistematika penulisan, dan metode penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan mengenai dasar - dasar analisis real dan analisis fungsional yang berisi tentang definisi, teori, dan sifat yang menjadi dasar dalam memahami isi dari pembahasan dan mendukung pembuktian pada bab berikutnya.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan mengenai dasar ruang metrik konveks beserta contohnya, sifat dasar dari ruang metrik konveks, definisi kontraksi *enriched* beserta contohnya, dan teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

BAB IV PENUTUP

Bab penutup merupakan bab yang berisi kesimpulan dari hasil penelitian serta saran-saran dari penulis yang ingin disampaikan kepada pembaca dan kepada peneliti selanjutnya.

1.8 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu dengan menganalisis beberapa sumber tertulis mengenai konsep ruang metrik konveks beserta contohnya, konsep kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks, dan teorema titik tetap dari kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks. Penulis menggunakan pendekatan ilmiah yang bersifat kualitatif yang berarti pendekatan ini sebagai penilaian dan pendapat peneliti yang tertuang secara eksplisit di dalam penelitian ini.

Pada penelitian ini diawali dengan penjelasan konsep dasar analisis real, konsep analisis fungsional seperti ruang metrik dan teorema titik tetap sebagai landasan teori. Kemudian akan dijelaskan juga mengenai konsep barisan konvergen, barisan Cauchy, barisan kontraktif, barisan Picard, sifat asimtotik regular, itetasi Krasnoselskij, iterasi Picard, konsep titik tetap, konsep pemetaan kontraktif di ruang metrik dan hubungan antara ruang metrik dengan ruang Banach. Langkah selanjutnya adalah penjelasan mengenai konsep ruang metrik konveks dan konsep pemetaan kontraksi *enriched* beserta contohnya yang akan membantu dalam pembuktian teorema titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks.

Pembahasan inti pada penelitian ini adalah tentang teorema titik tetap dari pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks. Dijelaskan juga penjabaran langkah-langkah pembuktian teorema titik tetap pada kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks yang mengacu pada penelitian Berinde dan Pacurar (2021).



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa ruang metrik dikatakan konveks apabila ruang metrik tersebut memiliki struktur konveks. Perbedaan antara metrik dengan metrik konveks terletak pada struktur konveks.

Pembuktian pada ketiga teorema utama titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* dalam ruang metrik konveks dimulai dari membentuk suatu barisan Picard sehingga barisan tersebut memiliki sifat asimtotik regular dan barisan tersebut merupakan barisan Cauchy yang konvergen ke suatu titik. Selanjutnya titik tersebut merupakan salah satu calon titik tetap pada pemetaan kontraksi *enriched* dan dibuktikan juga bahwa titik tetap tersebut tunggal. Berdasarkan ketiga teorema utama tersebut dapat ditunjukkan bahwa setiap pemetaan kontraksi *enriched* di ruang metrik konveks mempunyai titik tetap tunggal dengan membentuk barisan Picard melalui pemetaan yang mendefinisikan struktur konveks di ruang metrik konveks. Lalu terdapat akibat dari teorema titik tetap tersebut, dengan pengaturan ruang Banach. Pada penelitian sebelumnya oleh Vasile Berinde dan Madalina Pacurar belum disertakan contoh dari ruang metrik konveks dan pemetaan kontraksi *enriched*, sehingga pada penelitian ini diberikan contoh dari definisi ruang metrik konveks dan pemetaan kontraksi *enriched* sebagai ilustrasi dalam memahami definisi tersebut.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka saran yang dapat diberikan oleh penulis diantaranya yaitu

1. Mengembangkan penelitian tentang ruang metrik konveks dan pemetaan kontraksi *enriched*.
2. Meneliti Akibat 3.4.2 dengan menggunakan $\lambda = \frac{b}{b+1}$
3. Mengembangkan penelitian tentang teorema titik tetap.
4. Meneliti apakah terdapat penerapan dari teorema utama.
5. Mengembangkan contoh-contoh supaya pembaca lebih mudah memahami materi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbas, M. 2008. *Common Fixed Point Results with Applications in Convex Metric Space*. Fasc. Math, 39, 5-15.
- Abdelhakim, A. A. 2016. *A Convexity of Functions on Convex Metric Spaces of Takahashi and Applications*. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 24(3), 348-354.
- Abdussakir, A. 2009. *Umat Islam perlu menguasai matematika*. UIN Maliki Malang Repository.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis* (Vol. 2). New York: Wiley.
- Berinde, V., & Takens, F. 2007. *Iterative Approximation of Fixed Points* (Vol. 1912). Berlin: Springer.
- Berinde, V., & Păcurar, M. 2020. *Approximating Fixed Points of Enriched Contractions in Banach Spaces*. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22(2), 1-10.
- Berinde, V., & Păcurar, M. 2021. *Existence and Approximation of Fixed Points of Enriched Contractions and Enriched ϕ -Contractions*. Symmetry, 13(3), 498.
- Demma, M., & Vetro, P. 2015. *Picard Sequence and Fixed Point Results on-Metric Spaces*. Journal of Function Spaces.
- Górnicki, J. 2019. *Remarks on Asymptotic Regularity and Fixed Points*. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 21(1), 1-20.
- Khusna, A. H. 2020. *Pengantar Analisis Real* : Malang. Universitas Muhammadiyah Malang.
- Kreyszig, E. 1991. *Introductory Functional Analysis with Applications* (Vol. 17). John Wiley & Sons.
- Moosaei, M. 2012. *Fixed point theorems in convex metric spaces*. Fixed point theory and applications, 2012(1), 1-6.

- Putri, D. I., & Ekayanti, A. 2019. *Sifat Kelengkapan dan Kekompakan pada Ruang Metrik Hausdorff*. Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajaran, 3(2), 78-87.
- Rahmah, A. 2019. *Kekonveksan Suatu Fungsi pada Ruang Metrik Konveks*. Mathunesa: Jurnal Ilmiah Matematika, 7(1).
- Shirali, S., & Vasudeva, H. L. 2006. *Metric Spaces*. Springer Science & Business Media.
- Takahashi, W. (1970). *A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings*, I. Kodai Mathematical Seminar Reports (Vol. 22, No. 2, pp. 142-149). Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology.
- Turmudi. 2010. *Pembelajaran Matematika Kini dan Kecenderungan Masa Mendatang*. Bandung: JICA FPMIPA UPI.