

SKRIPSI

**SIFAT-SIFAT SUBMODUL FRAKSI ATAS DAERAH
TERTUTUP SECARA INTEGRAL**



TIARA ARIFAH
18106010044
STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

2022

**SIFAT-SIFAT SUBMODUL FRAKSI ATAS DAERAH
TERTUTUP SECARA INTEGRAL**

Untuk memenuhi sebagian persyaratan
mencapai derajat Sarjana S-1
Program Studi Matematika



diajukan oleh

TIARA ARIFAH

18106010044

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA**

2022



SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Tiara Arifah

NIM : 18106010044

Judul Skripsi : Sifat-Sifat Submodul Fraksi atas Daerah Tertutup Secara Integral

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 15 Agustus 2022

Pembimbing

Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si

NIP: 19660731 200003 2 001



PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-1898/Un.02/DST/PP.00.9/08/2022

Tugas Akhir dengan judul : Sifat-Sifat Submodul Fraksi atas Daerah Tertutup Secara Integral

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : TIARA ARIFAH
Nomor Induk Mahasiswa : 18106010044
Telah diujikan pada : Senin, 22 Agustus 2022
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang
Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6306a00eb89e3



Penguji I
Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si.,
M.Si.
SIGNED

Valid ID: 63059f04800ee



Penguji II
Arif Munandar, M.Sc.
SIGNED

Valid ID: 630429fa28794



Yogyakarta, 22 Agustus 2022
UIN Sunan Kalijaga
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.
SIGNED

Valid ID: 6306a00eb416a

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Tiara Arifah
NIM : 18106010044
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 08 Agustus 2022



Tiara Arifah

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA



Kupersembahkan karya sederhana ini
untuk ayahku tercinta dan juga ibuku tersayang
serta keluargaku terkasih



"Disetiap masalah, selalu ada banyak solusinya"

"Jangan pernah puas dengan ilmu"

PRAKATA

Assalamu'alaikum wr. wb.

Segala puji dan sangat syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya serta kemudahan dan kelancaran dalam menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul “Sifat-Sifat Submodul Fraksi atas Daerah Tertutup Secara Integral”. Penulis menyadari bahwa dalam melakukan penelitian ini banyak sekali kekurangan dan kesalahan serta jauh dari kata sempurna. Untuk itu, penulis menyampaikan terimakasih yang tak terhingga kepada:

1. Almamater UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta, tempat menuntut ilmu dan belajar berbagai ilmu kehidupan.
2. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi dan pembimbing skripsi yang memberikan persetujuan pelaksanaan Tugas Akhir Skripsi serta telah banyak memberikan masukan, koreksi, dan arahan yang alhamdulillah sangat bermanfaat dalam penyusunan Tugas Akhir dan sangat sabar dalam menghadapi mahasiswa yang sangat kekurangan ini.
3. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan bantuan dan fasilitas selama proses penyusunan Tugas Akhir Skripsi ini.
4. Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc., selaku dosen Aljabar yang sudah menyadarkan kecintaan saya pada bidang Aljabar.
5. Mohammad Farhan Quadratullah, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing aka-

demik Matematika 2018 yang selalu membimbing perkuliahan para mahasiswa agar berjalan dengan lancar.

6. Bapak dan Ibu dosen program studi matematika yang banyak memberikan ilmu pengetahuan dan motivasi selama proses perkuliahan.
7. Ayahku yang sangat aku cintai, Bapak Aang Iip Mubarok, S.Sy yang selalu membimbingku dalam segala keadaan dan selalu memberikan motivasi dan semangat.
8. Ibuku tersayang, Ibu Pupung Purmaningsih yang selalu mendukungku baik suka maupun duka
9. Saudara-saudaraku, Aa Tantan QB yang selalu mendampingiku dan adikku Hisyam Alkamal yang selalu aku banggakan.
10. Keluarga besar matematika 2018 selaku saudara dan teman seperjuangan tak bisa penulis sebutkan satu persatu.
11. Ambar teman seperjuangan yang sudah bersama-sama merasakan suka duka selama mengambil Aljabar dan sangat berpartisipasi dalam membantu penyusunan skripsi ini').
12. Risma dan Oza, teman yang selalu menemaniku sejak pertama kuliah dan sangat is the best.
13. Hanna, Mesa, Eteh, Gadis, yang selalu aku ganggu dan bersedia menampungku.
14. Semua pihak yang telah mendukung dalam proses penyusunan tugas akhir ini yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

15. Dan yang terakhir untuk diri saya sendiri terima kasih sudah berjuang hingga sampai saat ini:).

Penulis menyadari masih banyak sekali kesalahan dan kekurangan dalam penelitian skripsi ini, untuk itu diharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Namun demikian, penulis tetap berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan dapat membantu memberi suatu informasi yang baru bagi semua orang yang membacanya.

Wassalamualaikum Wr Wb

Yogyakarta, 8 Agustus 2022

Penulis



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
PERSETUJUAN TUGAS AKHIR	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	v
HALAMAN MOTTO	vi
PRAKATA	vii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR LAMBANG	xii
INTISARI	xiii
ABSTRACT	xiv
I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang Masalah	1
1.2. Batasan Masalah	3
1.3. Rumusan Masalah	4
1.4. Tujuan dan Manfaat Penelitian	4
1.4.1. Tujuan	4
1.4.2. Manfaat Penelitian	4
1.5. Tinjauan Pustaka	5
1.6. Metode Penelitian	6
1.7. Sistematika Penulisan	7
II DASAR TEORI	9
2.1. Grup	9

2.2. Ring	16
2.3. Modul	27
III SUBMODUL FRAKSI DARI SUATU MODUL ATAS DAERAH TER-	
TUTUP SECARA INTEGRAL	33
3.1. Daerah Tertutup Secara Integral	33
3.2. Submodul Fraksi di KM	37
IV PENUTUP	50
4.1. Kesimpulan	50
4.2. Saran	51
DAFTAR PUSTAKA	52



STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR LAMBANG

$x \in A$: x anggota A
$x \notin A$: x bukan anggota A
$A \subset X$: A himpunan bagian dari X , tetapi $A \neq X$
$A \subseteq X$: A himpunan bagian atau sama dengan X
\mathbb{Z}	: himpunan semua bilangan bulat
\mathbb{Q}	: himpunan semua bilangan rasional
\mathbb{R}	: himpunan semua bilangan real
■	: akhir suatu bukti
\rightarrow	: menuju
$\sum_{i=1}^n a_i$: penjumlahan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$p \Rightarrow q$: jika p maka q
\Leftrightarrow	: jika dan hanya jika

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

INTISARI

SIFAT-SIFAT SUBMODUL FRAKSI ATAS DAERAH TERTUTUP SECARA INTEGRAL

Oleh

TIARA ARIFAH

18106010044

Submodul merupakan subgrup dari suatu modul dan tertutup terhadap perkalian skalar. Submodul yang dibahas pada penelitian ini merupakan submodul dari modul atas daerah tertutup secara integral. Suatu daerah integral R dikatakan tertutup secara integral atas lapangan hasil bagi K jika setiap elemen di K merupakan integral atas R , maka elemen tersebut juga berada di R . Modul atas daerah tertutup secara integral KM adalah himpunan dari perkalian antara lapangan hasil bagi K dan modul bebas torsi M dan merupakan fokus modul dari penelitian ini.

Submodul N pada suatu modul bebas torsi atas daerah integral D dikatakan submodul fraksi jika perkalian setiap elemen di N dengan suatu elemen di D berada di M . Definisi dari submodul fraksi atas daerah integral dapat dikembangkan menjadi submodul fraksi di KM atas daerah tertutup secara integral R . Jika N merupakan R -submodul fraksi di KM , maka $N_v = \{t \in KM \mid N^-t \subseteq M\}$ merupakan R -submodul fraksi di KM dengan $N^- = \{k \in K \mid kN \subseteq M\}$. Selanjutnya diperoleh juga $N \subseteq N_v$ dan $N^- = (N_v)^-$. Jika $N = N_v$, maka N dikatakan v -submodul.

Kata kunci: tertutup secara integral, submodul fraksi

ABSTRACT

FRACTIONAL SUBMODULE PROPERTIES OVER INTEGRALLY CLOSED

By

TIARA ARIFAH

18106010044

Submodule is a subgroup of a module and is closed to scalar multiplication. The submodule discussed in this study is a submodule of a module over integrally closed domains. An integral domain R is said to be integrally closed to the quotient field K if every element in K is an integral over R , then the element is also in R . Module over integrally closed domains KM is the set of the product of quotient fields K and torsion-free module M and it is focus of module of this studied.

Submodule N of a torsion-free module over integral domain D is said to fractional submodule if the product of each element in N by an element in D is in M . Definition of fractional submodule over integral domain can be developed into a fractional submodule of KM over integrally closed domain R . If N is a fractional R -submodule of KM , then $N_v = \{t \in KM \mid N^{-1}t \subseteq M\}$ is a fractional R -submodule of KM with $N^{-1} = \{k \in K \mid kN \subseteq M\}$. Then also obtained $N \subseteq N_v$ and $N^{-1} = (N_v)^{-1}$. If $N = N_v$, then N is v -submodul.

Keywords: integrally closed, fractional submodule

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan ilmu pasti yang selalu menuntut untuk berfikir logis. Salah satu cabang dari matematika adalah struktur aljabar atau aljabar abstrak. Sesuai dengan namanya, dalam aljabar abstrak dibahas mengenai konsep-konsep abstrak (Suryanti, 2017). Materi yang dibahas pada aljabar abstrak diantaranya adalah teori grup, teori ring, dan teori modul.

Grup dan ring sangat penting dalam penelitian ini karena merupakan modal untuk pembentukan suatu modul. Grup merupakan himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner yang memenuhi aksioma asosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers (Wardati dan Riyanto, 2019). Operasi biner seringkali dikatakan operasi dengan sifat tertutup. Salah satu contoh dari grup adalah himpunan semua bilangan bulat dengan operasi penjumlahan. Selain itu, himpunan bilangan bulat juga merupakan sebuah ring.

Menurut Wardati dan Riyanto (2019), ring adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian yang merupakan grup Abelian terhadap penjumlahan dan asosiatif terhadap perkalian serta memiliki sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Operasi pertama dan kedua bebas ditentukan, asalkan memenuhi syarat-syarat ring (Masoed, 2013). Dari suatu ring dengan tambahan beberapa sifat, akan didefinisikan lapangan dan daerah integral.

Ring yang komutatif atau disebut dengan ring komutatif dan merupakan ring

pembagian adalah definisi dari lapangan (Malik, 2007). Lapangan juga sangat penting dalam penelitian ini karena modul yang dibahas pada penelitian ini merupakan himpunan dari perkalian antara lapangan dan suatu modul. Lapangan yang dimaksud adalah lapangan hasil bagi. Lapangan hasil bagi merupakan perluasan dari lapangan (Sukarsih, 2008).

Setiap lapangan merupakan daerah integral. Daerah integral merupakan ring komutatif dengan elemen satuan dan tidak memiliki pembagi nol (Malik, 2007). Daerah integral sangat penting dalam penelitian ini karena modul yang diteliti merupakan modul atas daerah tertutup secara integral yang merupakan perluasan dari daerah integral. Oleh karena itu, untuk memahami definisi daerah tertutup secara integral diperlukan definisi mengenai daerah integral.

Modul yang akan dibahas pada penelitian ini adalah modul bebas torsi. Modul bebas torsi adalah modul yang elemen torsinya hanya nol (Rotman, 2009). Dalam penelitian Wijayanti dkk (2020) diketahui modul KM merupakan perkalian antara lapangan hasil bagi K dengan R -modul bebas torsi M . Ring R merupakan daerah tertutup secara integral dengan lapangan hasil bagi K . Modul KM juga digunakan dalam penelitian Nurwigantara dkk (2022) mengenai modul Krull.

Pembahasan mengenai modul sangat erat kaitannya dengan submodul karena submodul merupakan bagian dari modul. Himpunan N disebut dengan submodul dari R -modul M jika N merupakan subgrup dari M dan tertutup atas perkalian dengan skalar (Rotman, 2009). Submodul yang diteliti pada penelitian ini adalah submodul fraksi. Submodul fraksi atas daerah integral telah dijelaskan pada penelitian Moghaderi dan Nekooei (2010). Submodul fraksi pada penelitian tersebut dikaitkan dengan modul Dedekind. Suatu modul dikatakan modul Dedekind jika dan hanya jika setiap submodul fraksi tak nolnya *invertible*.

Berdasarkan penelitian Wijayanti dkk (2020), modul bebas torsi yang dibangun secara berhingga atas daerah Dedekind merupakan modul Dedekind. Hasil tersebut diperoleh dengan menggunakan relasi antara v -submodul dan ideal atas daerah Dedekind. v -submodul merupakan submodul fraksi dengan syarat tertentu dan daerah Dedekind merupakan daerah tertutup secara integral. Selanjutnya, dalam penelitian tersebut juga diperoleh bahwa himpunan semua submodul fraksi di KM merupakan grup Abelian dan isomorfik pada ideal fraksi di K . Untuk memperoleh hasil tersebut, diperlukan penjelasan dan beberapa sifat mengenai submodul fraksi di KM .

Submodul fraksi secara umum, yaitu submodul fraksi atas daerah integral akan dijelaskan pada penelitian ini. Pada submodul fraksi atas daerah integral dapat dibentuk definisi yang lebih khusus, yaitu submodul fraksi atas daerah tertutup secara integral di KM . Terdapat beberapa sifat mengenai submodul fraksi di KM dan akan dijelaskan pada penelitian ini.

1.2. Batasan Masalah

Pembahasan pada penelitian ini akan difokuskan pada sifat submodul fraksi pada modul KM . Modul KM merupakan modul perkalian antara lapangan hasil bagi K dan modul bebas torsi M atas daerah tertutup secara integral. Oleh karena itu, akan dibahas terlebih dahulu mengenai daerah tertutup secara integral. Fokus utama penelitian ini adalah submodul fraksi dari modul KM atas daerah tertutup secara integral. Pembahasan diawali dari submodul fraksi secara umum sebagai dasar terbentuknya submodul fraksi di KM atas daerah tertutup secara integral.

1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang dan batasan masalah, maka akan dirumuskan permasalahan berikut:

1. Bagaimana terbentuknya daerah tertutup secara integral?
2. Bagaimana kajian submodul fraksi secara umum menuju submodul fraksi di KM beserta sifat-sifatnya?

Pembahasan daerah tertutup secara integral dan submodul fraksi disertai dengan pemberian contoh untuk lebih memudahkan pemahaman terhadap pengertian daerah tertutup secara integral dan submodul fraksi. Contoh-contoh tersebut merupakan hasil kajian dari peneliti.

1.4. Tujuan dan Manfaat Penelitian

1.4.1. Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui proses terbentuknya daerah tertutup secara integral.
2. Mengetahui konsep submodul fraksi secara umum menuju submodul fraksi di KM beserta sifat-sifatnya.

1.4.2. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Manfaat bagi peneliti adalah dapat bertambahnya wawasan ilmu pada bidang aljabar dan dapat menerapkan hasil belajarnya.

2. Manfaat bagi pembaca adalah dapat menambah pengetahuan mengenai teori modul, diantaranya adalah modul bebas torsi dan submodul fraksi serta mengenai daerah tertutup secara integral.
3. Manfaat bagi lembaga adalah dapat menambah rujukan penelitian dalam bidang aljabar, terutama mengenai modul bebas torsi atas daerah tertutup secara integral.

1.5. Tinjauan Pustaka

Wijayanti dkk (2020) telah melakukan penelitian mengenai v -submodul pada modul KM . Modul KM merupakan perkalian antara lapangan hasil bagi K dan modul bebas torsi M . Dalam penelitiannya dijelaskan bahwa v -submodul merupakan submodul fraksi. Beberapa sifat submodul fraksi di KM juga dijelaskan pada penelitian tersebut. Menggunakan sifat-sifat submodul fraksi diperoleh bahwa semua submodul fraksi di KM merupakan grup Abelian dan isomorfik dengan ideal fraksi di K .

Penelitian Moghaderi dan Nekooei (2010) membahas mengenai kaitan antara modul Dedekind dan *valuation module* diskrit. *Valuation module* merupakan modul tertutup secara integral. Pada penelitian tersebut juga dijelaskan mengenai submodul fraksi atas daerah integral yang dibutuhkan pada teorema modul Dedekind. Suatu modul dikatakan modul Dedekind jika dan hanya jika setiap submodul fraksi tak nolnya *invertible*.

Daerah tertutup secara integral telah dijelaskan pada penelitian Susilowati (2016). Daerah tertutup secara integral merupakan perluasan integral dari daerah ideal utama. Dalam penelitian tersebut dijelaskan bahwa jika suatu daerah integral merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka daerah integral tersebut merupakan

daerah tertutup secara integral. Selanjutnya jika daerah integral tersebut merupakan daerah ideal utama, maka juga merupakan daerah tertutup secara integral.

Fokus penelitian ini adalah submodul fraksi di KM atas daerah tertutup secara integral. Dibandingkan dengan penelitian di atas, penelitian ini memiliki persamaan dan perbedaan. Penjelasan mengenai persamaan dan perbedaan dari penelitian ini dengan penelitian lainnya akan disajikan dalam bentuk tabel berikut ini.

No	Nama Peneliti	Judul Penelitian	Persamaan	Perbedaan
1	Indah Emilia Wijayanti, Hidetoshi Marubayashi, Iwan Ernanto, dan Sutopo	Finitely generated torsion-free modules over integrally closed domains	Konsep submodul fraksi di KM	Penjelasan daerah tertutup secara integral dan contoh yang belum disebutkan oleh peneliti sebelumnya
2	J. Moghaderi dan R. Nekooei	Valuation, discrete valuation and Dedekind modules	Konsep submodul fraksi atas daerah integral	Submodul fraksi secara khusus dengan syarat tambahan
3	Eka Susilowati	Karakteristik Gelanggang Bilangan Bulat dan Pengaitannya dengan Tiga Struktur Khusus Daerah Integral	Definisi dan sifat daerah tertutup secara integral	Definisi lapangan hasil bagi yang belum dibahas oleh peneliti sebelumnya

1.6. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur. Studi literatur merupakan metode penelitian dengan cara mengumpulkan berbagai sumber, seperti definisi, teorema, sifat, dan contoh dari sumber berupa jurnal, buku, artikel, dan yang lainnya. Langkah awal penelitian ini adalah mempelajari dan membahas mengenai grup, subgrup, ring, ideal, lapangan, dan daerah integral. Selanjutnya subgrup dan ring digunakan untuk menjadi modal dasar pembentukan modul.

Setelah memahami konsep dasar mengenai teori grup, ring, dan modul, selanjutnya akan dibahas mengenai modul bebas torsi. Modul yang digunakan dalam penelitian ini merupakan hasil perkalian antara lapangan hasil bagi dan modul bebas torsi. Lapangan hasil bagi merupakan perluasan dari lapangan dan akan dibahas pada pembahasan awal. Lapangan hasil bagi digunakan dalam definisi daerah tertutup secara integral.

Langkah selanjutnya akan dibahas mengenai submodul fraksi secara umum, yaitu submodul fraksi atas daerah integral. Setelah itu, akan dijelaskan pembahasan submodul fraksi di KM atas suatu daerah tertutup secara integral. Akan diberikan juga sifat-sifat submodul fraksi di KM . Berikut akan disajikan skema keterkaitan antar konsep.



Gambar 1.1 Skema Keterkaitan antar Konsep

1.7. Sistematika Penulisan

Penyusunan hasil penelitian ini akan dibagi menjadi empat bab yang disusun secara sistematis. Adapun rincian setiap bab akan dijelaskan sebagai berikut.

1. **BAB I (Pendahuluan):** Bab ini membahas mengenai latar belakang penelitian, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan dan manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
2. **BAB II (Dasar Teori):** Bab ini membahas mengenai beberapa teori yang di-

gunakan dalam penelitian ini. Teori yang digunakan adalah teori grup, teori ring, dan teori modul.

3. BAB III (Pembahasan): Bab ini membahas mengenai penelitian yang dilakukan mengenai daerah tertutup secara integral dan submodul fraksi di KM .
4. BAB IV (Penutup): Bab ini membahas mengenai kesimpulan penelitian dan saran dari peneliti.



BAB IV

PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian, terdapat beberapa sifat submodul fraksi atas daerah tertutup secara integral yang ditemukan. Berikut akan disampaikan kesimpulan dari penelitian ini.

4.1. Kesimpulan

Suatu lapangan yang setiap elemennya berbentuk a/b dengan a dan b tak nol merupakan elemen dari suatu daerah integral, maka lapangan tersebut dinamakan lapangan hasil bagi. Oleh karena itu, jika K merupakan lapangan hasil bagi dari daerah integral R , maka R merupakan subhimpunan tak kosong di K . Suatu daerah integral dikatakan tertutup secara integral atas lapangan hasil bagi K jika setiap elemen di K yang merupakan integral atas R , maka elemen tersebut juga berada di R . Jika daerah integral merupakan daerah faktorisasi tunggal, maka daerah integral tersebut tertutup secara integral. Jika daerah integral merupakan daerah ideal utama, maka daerah integral tersebut tertutup secara integral.

Himpunan KM merupakan modul atas daerah tertutup secara integral. Modul KM merupakan perkalian antara lapangan hasil bagi K dan modul bebas torsi M . Submodul N pada R -modul KM dikatakan R -submodul fraksi jika terdapat $r \in R$ sehingga $rN \subseteq M$. Diberikan $N^- = \{k \in K \mid kN \subseteq M\}$. Jika N merupakan R -submodul fraksi di KM , maka $N_v = \{t \in KM \mid N^-t \subseteq M\}$ merupakan R -submodul fraksi di KM . Selain itu, diperoleh juga bahwa $N \subseteq N_v$ dan $N^- = (N_v)^-$. Jika $N = N_v$, maka N merupakan v -submodul.

4.2. Saran

Penelitian ini membahas mengenai submodul fraksi di KM atas daerah tertutup secara integral. Pembahasan mengenai daerah tertutup secara integral pada penelitian ini hanya dijelaskan secara umum dan belum disertai sifat-sifatnya. Hubungan antara submodul fraksi atas daerah integral dan submodul fraksi atas daerah tertutup secara integral dapat dikaitkan melalui sifat submodul fraksi atas daerah integral.



DAFTAR PUSTAKA

- Alaca, S., Williams, K. S., 2003, *Introductory algebraic number theory*, Cambridge University, Inc., UK.
- Andari, Ari, 2015, *Pengantar Teori Modul*, Brawijaya University, Inc., Indonesia.
- Dummit, D. S., Foote, R. M., 2004, *Abstract algebra*, John Wiley Sons, Inc., USA.
- Keating, M.E., 1998, *A first course in module theory*, World Scientific, Inc., UK.
- Malik, D. S., 2007, *Introduction to Abstract Algebra*, Department of Mathematics Creighton University, Inc., USA.
- Masoed, Fadli, 2013, *Struktur Aljabar*, Akademia Permata, Inc., Indonesia.
- Moghaderi, J., and Nekooei, 2010, R., *Valuation, discrete valuation and dedekind modules*, Int. Electronic J. Algebra.
- Nurwigantara, Mu'amar Musa, et al., 2021, *Krull modules and completely integrally closed modules*, World Scientific, Inc., Indonesia.
- Persulesy, E. R., Novita Dahoklory, 2015, *Karakterisasi Daerah Dedekind*, Pattimura University, Inc., Indonesia.
- Rotman, J. J., 2009, *An introduction to homological algebra (Vol. 2)*, Springer-Verlag New York, Inc., USA.
- Shinta, D.A., Sumanto, Y.D., 2013, *Perluasan Dari Ring Regular*, Diponegoro University, Inc., Indonesia.

- Stein, William, 2005, *Introduction to Algebraic Number Theory*, Harvard University, Inc., USA.
- Sukarsih, I., 2008, *Lokalisasi Ring Nonkomutatif Atas Himpunan Bagian Multiplikatifnya*, Bandung Islamic University, Inc., Indonesia.
- Sukirman, 2016, *Teori Grup (Aljabar Abstrak I)*, Yogyakarta State University, Inc., Indonesia.
- Suryanti, S., 2017, *Teori Grup (Struktur Aljabar I)*, Muhammadiyah Gresik University, Inc., Indonesia.
- Susilowati, Eka, 2016, *Karakteristik Gelanggang Bilangan Bulat dan Pengaitannya dengan Tiga Struktur Khusus Daerah Integral*, PGRI Adi Buana Surabaya University, Inc., Indonesia.
- Wardati, Khurul, Riyanto, M. Zaki, 2019, *Terapan Grup Matriks Atas Ring Komutatif pada Protokol Perjanjian Kunci*, Matematika, Inc., Indonesia.
- Wijayanti, Indah Emilia, et al., 2020, *Finitely generated torsion-free modules over integrally closed domains*, *Communications in Algebra*.