

# **KONSEP DASAR ALJABAR LIE**

**Skripsi**

Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1

**Program Studi Matematika**



diajukan oleh

**Tuti Qomariyah**

**05610004**

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UIN SUNAN KALIJAGA**

**YOGYAKARTA**

**2010**



### SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi  
Lamp : -

Kepada :  
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta  
Di Yogyakarta

*Assalamu 'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara :

Nama : Tuti Qomariyah  
NIM : 05610004  
Judul Skripsi : Konsep Dasar Aljabar Lie

sudah dapat diajukan kepada Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan/ Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu 'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 01 November 2010

Pembimbing II

Pembimbing I

Suroto, S.Si. M.Sc.  
NIP: 19801109 200912 1 003

Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.  
NIP: 19660731-200003-2-00-1



**PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/2242/2010

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Konsep Dasar Aljabar Lie

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :

Nama : Tuti Qomariyah

NIM : 05610004

Telah dimunaqasyahkan pada : 19 November 2010

Nilai Munaqasyah : B +

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

**TIM MUNAQASYAH :**

Ketua Sidang

Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si  
NIP. 19660731 200003 2 001

Penguji I

Luluk Mauluah, M.Si  
NIP.19700802 200312 2 001

Penguji II

Zenith Purisha, S.Si

Yogyakarta, 23 November 2010

UIN Sunan Kalijaga  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Dekan



Dra. Maizer Said Nahdi, M.Si  
NIP. 19550427 198403 2 001

## PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka

Yogyakarta, 03 November 2010



Tuti Qomariyah

NIM. 05610004

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

## KATA PENGANTAR



Penulis memanjatkan segala puji dan syukur ke Hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan *Rahman Rahim*-Nya, Ridlo-Nya, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam penulis haturkan kepada Nabi Muhammad SAW. yang memberikan penerangan hidup dan syafa'at dari zaman jahiliyah sampai akhir zaman.

Skripsi ini disusun guna memenuhi salah satu syarat untuk mencapai gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika. Skripsi ini berisi tentang pembahasan mengenai “ Konsep Dasar Aljabar Lie” yang disajikan dalam bab empat. Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak akan mencapai puncak penyelesaian tanpa bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Dra. Hj. Maizer Said Nahdi, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Ibu Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Pembantu Dekan I, Dosen Penasehat Akademik beserta pembimbing yang telah sabar memberikan bimbingan dan ilmunya dalam penyusunan skripsi ini.

3. Bapak Suroto, S.Si, M.Sc., selaku dosen pembimbing yang selalu mensupport dengan sabar serta meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyusunan skripsi ini.
4. Bapak/Ibu Dosen serta Staff Administrasi Program Studi Matematika Fakultas Sains & Teknologi atas bimbingan dan bantuan selama perkuliahan.
5. Ibu dan Bapak, kakak ku Mas Khud Amin beserta istrinya, mba Tuti beserta suaminya, adik-adik ku Dul, Harun, Sairoh dan Heni atas segala doa, cinta dan kasih sayangnya kepada penulis.
6. Suami ku tersayang Ahmad Imam Syatori, yang selalu menyemangati lahir dan batin dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Teman-teman Pembina MA Wahid Hasyim serta semua santri PP. Wahid Hasyim yang memberikan banyak pengalaman apa arti hidup yang sebenarnya.
8. Teman-teman Matematika angkatan kedua Sains dan Teknologi atas bantuan, motivasi, dan kenangan yang tak terlupakan.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Namun demikian, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, 25 Juni 2010

Penulis

Tuti Qomariyah

## PERSEMBAHAN

penulis mempersembahkan skripsi ini kepada:

Almamaterku Prodi Matematika, Fakultas Sains & Teknologi,  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

Pondok Pesantren Wahid Hasyim Yogyakarta

PP. Putri Ma'hadut Tholabah Babakan- Lebaksiu- Tegal

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## MOTTO

Andaikan ilmu dapat dicapai dengan lamunan, niscaya di dunia ini tidak ada seseorang yang tertinggal (bodoh).

Maka sesungguhnya di samping ada kesukaran terdapat pula kemudahan

(QS. Al Insiroh ayat: 5)

Derajat tinggi di sisi Allah diperoleh dengan *JER* (harus tunduk dan tawadlu'), *TANWIN* (niat yang benar-benar mencari Ridlo Allah), *NIDA'* (berdzikir), *AL* (berfikir), dan *MUSNAD ILAIH* (beramal nyata atau riil)

(Nadlom Alfiyah Ibnu Malik)

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	<b>i</b>
<b>SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI</b> .....	<b>ii</b>
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b> .....	<b>iii</b>
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	<b>iv</b>
<b>PERSEMBAHAN</b> .....	<b>vi</b>
<b>MOTTO</b> .....	<b>vii</b>
<b>DAFTAR ISI</b> .....	<b>viii</b>
<b>ARTI LAMBANG</b> .....	<b>x</b>
<b>ABSTRAK</b> .....	<b>xi</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1. Latar belakang .....	1
1.2. Rumusan masalah .....	4
1.3. Tujuan penelitian .....	4
1.4. Manfaat Penelitian .....	4
1.5. Tinjauan pustaka .....	5
<b>BAB II DASAR TEORI</b>	
2.1. Grup .....	6
2.2. Lapangan .....	12
2.3. Ruang Vektor .....	14
2.4. Pemetaan atau fungsi .....	21
2.5. Isomorfisma .....	22
2.6. Transformasi Linear .....	26

2.7. Modul .....	27
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b>	
3.1. Jenis penelitian .....	29
3.2. Sifat penelitian .....	29
3.3. Sumber data .....	29
3.4. Langkah-langkah penelitian .....	30
<b>BAB IV PEMBAHASAN</b>	
4.1. Non-Assosiatif Aljabar .....	31
4.2. Aljabar Lie .....	35
4.3. Aljabar Lie dari Transformasi linear .....	45
<b>BAB V PENUTUP</b>	
5.1. Simpulan .....	65
5.2. Saran-saran .....	66
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>67</b>
<b>DAFTAR RIWAYAT HIDUP .....</b>	<b>68</b>

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
 YOGYAKARTA

## ARTI LAMBANG

$\langle G, * \rangle$  : grup  $G$  terhadap operasi biner  $*$

$\forall$  : kuantor universal

$\exists$  : kuantor eksistensial

$\in$  : elemen dari

$a^{-1}$  : elemen invers  $a$

$H \leq G$  :  $H$  subgrup  $G$

$H \neq G$  :  $H$  tidak sama dengan  $G$

$\Sigma$  : notasi sigma

$(\Leftrightarrow)$  : biimplikasi

$(\Rightarrow)$  : bukti ke kanan

$(\Leftarrow)$  : bukti ke kiri

$+$  : penjumlahan

$<$  : kurang dari

$\cong$  : isomorfik

■ : pembuktian selesai

## KONSEP DASAR ALJABAR LIE

Oleh: Tuti Qomariyah (05610004)

### ABSTRAK

Struktur aljabar terbangun dari satu atau beberapa himpunan objek yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi. Setiap struktur aljabar terdapat aksioma, sifat maupun teorema yang berlaku. Konsep dasar *Aljabar Lie* adalah *Non Assosiatif Aljabar* yang dilengkapi dengan sifat assosiatif dan kondisi lie. Kondisi *Lie* akan berlaku jika dan hanya jika memenuhi  $x^2=0$  dan identitas Jacobi.

Berdasarkan konsep tersebut, skripsi ini membahas *Aljabar Lie* yang meliputi definisi, sifat dan struktur pada *Aljabar Lie*. Struktur pada *Aljabar Lie* yang dibahas antara lain mengenai konstruksi *Aljabar Lie* dari suatu *Aljabar Assosiatif* dan *Aljabar Lie* dari Transformasi linear.

**Kata kunci:** *Aljabar Lie*, *Aljabar Assosiatif* dan *Aljabar Lie* dari transformasi linear.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 LATAR BELAKANG MASALAH

Kemajuan yang terjadi pada ilmu pengetahuan dan teknologi di dunia terus berkembang sampai sekarang ini yang didasarkan oleh ilmu matematika. Sejalan dengan itu matematika sebagai *basic science* juga masih berkembang (skripsi Putri Rahmaningtyas UGM :2007). Sebagaimana Adisusilo (1983) menyatakan bahwa Ilmu pengetahuan atau *science* adalah suatu proses untuk menemukan kebenaran pengetahuan. Karena itu, ilmu pengetahuan harus mempunyai sifat ilmiah, yaitu pengetahuan yang diperoleh secara metodis, sistematis, dan logis. Metodis maksudnya adalah bahwa pengetahuan itu diperoleh dengan cara kerja yang terperinci, baik yang bersifat induktif maupun deduktif, sesuai dengan tahapan-tahapan metode ilmu, misalnya dimulai dengan observasi, perumusan masalah, mengumpulkan dan mengklasifikasi fakta, membuat generalisasi, merumuskan hipotesis, dan membuat verifikasi.

Matematika erat sekali hubungannya dengan fisika teori yang berusaha menelusuri hukum-hukum fisika secara matematis. Matematika sendiri berupaya untuk menelaah permasalahan mengenai bilangan, kaitan, bentuk serta penggunaan hal-hal tersebut secara terpadu yang diharapkan dapat mengungkap

lebih banyak rahasia alam, memahaminya serta memanfaatkannya bagi pengembangan fisika selanjutnya atau penerapannya di bidang keilmuan yang lain dan juga dalam teknologi.

Sebagaimana pentingnya peranan Matematika dalam Fisika semakin disadari ketika Newton memperkenalkan perumusan mekanik klasik pada akhir abad ke-17, selanjutnya pada akhir abad ke-18 Lagrange mengemukakan formalisme Hamilton-Lagrange, dan Sophus Lie (1842 - 1899) dan Felix Klein (1849 – 1925) mempelajari serta menyelidiki sifat-sifat transformasi geometris dalam suatu sistem koordinat dan konsep grup transformasi (Jansen, 1967). Hasil penyelidikan itu kemudian menghasilkan suatu disiplin ilmu matematika yang dikenal sebagai teori grup (*group theory*).

Istilah *aljabar* diperkenalkan oleh Herman Weyl pada tahun 1933 – 1934 setelah dia mempelajari lebih lanjut tentang teori Lie atas grup kontinu. Aljabar abstrak dikembangkan pada abad ke-19, mula-mula berfokus pada teori Galois dan pada masalah keterkonstruksian (*constructibility*). Klasifikasi Aljabar secara garis besar dapat dibagi dalam empat kategori yaitu: 1. Aljabar elementer, yang mempelajari sifat-sifat operasi pada bilangan riil yang ditunjukkan dalam simbol sebagai konstanta dan variabel, dan aturan yang membangun ekspresi dan persamaan Matematika yang melibatkan simbol-simbol (bidang ini juga mencakup materi yang biasanya diajarkan di sekolah menengah yaitu '*Intermediate Algebra*' dan '*college algebra*'); 2. Aljabar abstrak, kadang-kadang

disebut Aljabar Modern, yang mempelajari struktur aljabar semacam grup, ring dan medan (*fields*) yang didefinisikan dan diajarkan secara aksiomatis; 3. Aljabar linear, yang mempelajari sifat-sifat khusus dari ruang vektor (termasuk matriks); 4. Aljabar universal, yang mempelajari sifat-sifat bersama dari semua Struktur aljabar. Dalam studi Aljabar lanjut, sistem aljabar aksiomatis semacam grup, ring, medan dan Aljabar atas sebuah Medan (*algebras over a field*) dipelajari bersama dengan telaah Struktur Geometri Natural yang kompatibel dengan struktur aljabar tersebut dalam bidang Topologi.

Struktur aljabar adalah struktur yang terdiri dari satu atau banyak himpunan objek yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi. Setiap struktur aljabar terdapat sifat-sifat serta aksioma-aksioma yang berlaku.

Teori *Aljabar Lie* adalah perkembangan dari teori lie pada grup kontinu. Salah satu struktur aljabar yakni *Aljabar Lie*, *Aljabar Lie* merupakan aljabar atas suatu lapangan dimana ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  yang dilengkapi dengan operasi biner dengan memenuhi aksioma-aksioma: bilinear, perkalian di  $V$ , dan identitas jacobii. Berdasarkan uraian diatas, penulis akan melakukan studi literatur mengenai *Aljabar Lie*. Diharapkan dari penelitian ini, dapat memberikan gambaran tentang konsep *Aljabar Lie*.

## 1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka yang menjadi rumusan masalah dalam penulisan ini adalah:

1. Bagaimanakah struktur pembentukan *Aljabar Lie*?
2. Bagaimanakah *Aljabar Lie* dari transformasi linear?

## 1.3 TUJUAN PENELITIAN

Sesuai dengan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mempelajari dan mengetahui struktur *Aljabar Lie*.
2. Mempelajari dan mengetahui tentang *Aljabar Lie* dari transformasi linear.

## 1.4 MANFAAT PENELITIAN

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Memberikan pengetahuan tentang *Aljabar Lie*.
2. Memberikan kontribusi ilmiah di dunia pendidikan khususnya matematika dalam mempelajari aljabar abstrak dan aljabar linear.
3. Memberikan motivasi kepada para peneliti untuk lebih banyak mengembangkan tentang *Aljabar Lie*.

## 1.5 TINJAUAN PUSTAKA

Penulisan skripsi ini adalah mengacu pada literatur utama yaitu buku yang ditulis oleh Nathan Jacobson (1962) yang berjudul *Lie Algebras*. Nathan Jacobson salah satunya menjelaskan tentang konsep dasar dan sifat-sifat *Aljabar Lie*.

Literatur yang menunjang dalam penelitian pada buku yang berjudul "*A First Course In Abstract Algebra 5-th Edition*" yang ditulis oleh Fraleigh (1997) menjelaskan tentang grup, buku yang berjudul "*Aljabar Abstrak*" yang ditulis oleh Saih Suwilo (1997) menjelaskan tentang grup, buku yang berjudul "*Logika dan Himpunan*" yang ditulis oleh Sukirman(2006) menjelaskan tentang fungsi, buku yang berjudul "*Aljabar Linier*" yang ditulis oleh Setiadji (2008) membahas ruang vektor dan transformasi linear, dan buku yang berjudul "*Elementary Linier Algebra*" yang ditulis oleh Howard Anton (1987) membahas tentang transformasi linear dan ruang vektor yang dijadikan sebagai landasan teori.

## BAB V

### PENUTUP

#### A. Simpulan

Berdasarkan hasil studi literatur yang telah dilakukan penulis mengenai Konsep Dasar Aljabar Lie, maka dapat diambil simpulan sebagai berikut:

1. *Aljabar lie* terbentuk dari *Non-Assosiatif Aljabar* yang memiliki sifat asosiatif dan memenuhi dua kondisi *Lie*. *Non-Assosiatif Aljabar* adalah ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  yang dilengkapi operasi biner  $*$  serta memenuhi operasi bilinear, untuk setiap  $x, y \in V$  dan  $\alpha \in F$  dimana  $x * y \in V$  memenuhi aksioma : 1.  $(x_1 + x_2) * y = x_1 * y + x_2 * y$ ,  $x * (y_1 + y_2) = x * y_1 + x * y_2$  dimana  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$  dan 2.  $\alpha * (xy) = (\alpha * x)y = x(\alpha * y)$ . *Non-Assosiatif Aljabar*  $V$  yang memiliki sifat asosiatif dinamakan *Aljabar Assosiatif* dan dua kondisi *Lie* adalah (i)  $x^2 = 0$ , (ii) identitas jacobii, yaitu untuk  $\forall x, y, z \in V$  berlaku :  $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$ .
2. Aljabar atas transformasi linear merupakan *Aljabar Asosiatif* sehingga *Aljabar Lie* atas transformasi linier merupakan *Aljabar Lie* dengan kondisi *Lie* yang operasi perkaliannya komposisi fungsi.

## B. Saran-saran

Berdasarkan hasil penelitian tersebut di atas maka penulis dapat memberikan saran. Penelitian ini, diharapkan menjadi sebuah langkah awal dalam mengkaji konsep-konsep lebih lanjut dari *Aljabar Lie*. Proses penelitian ini hanya terbatas pada bagaimana membentuk struktur dasar *Aljabar Lie*, yaitu dengan memahami serta menganalisa definisi, sifat maupun teorema yang ada dan tentang *Aljabar Lie* dari transformasi linear.

Banyak hal yang masih dapat dikaji dan dikembangkan lagi dari *Aljabar Lie* tersebut di atas misalnya modul *Aljabar Lie*, ideal *Aljabar Lie* dan lainnya.

Demikian saran-saran yang dapat disampaikan oleh penulis. Semoga dapat menjadi inspirasi bagi para pembaca untuk mengembangkan konsep-konsep lebih lanjut dari *Aljabar Lie* pada khususnya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton. H, 1987, *Elementary Linear Algebra*, John Will & Sons, Inc. New York
- Fraleigh J.B 1997, *A First Course In Abstract Algebra 5-th Edition*, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America
- Gupta S.L., Nisha Rani, 1988, *Fundamental Real Analysis*. New Delhi: Vikas Publishing House PVT LTD
- Hall. B. C. 2003, *Lie Groups Lie Algebra and Representation An Elementary Introduction*, Springer-Verlag, Inc. New York
- Jacobson , N. 1962, *Lie Algebra*, John Wiley and Sons , New York
- Setiadji, 1990, *Pengantar Aljabar Linear*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Gajah Mada
- , 2008, *Aljabar Linear*, Yogyakarta: Graha Ilmu
- Sukirman, 2006, *Logika dan himpunan*, Yogyakarta: Hanggar Kreator
- Suwilo Saih, 1997, *Aljabar Abstrak*, Perpustakaan Pribadi Soleman Saidi

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA