BAB II

DASAR TEORI

Dasar teori ini akan memberikan beberapa definisi, teorema dan sifat-sifat yang menjadi dasar dalam pembahasan pada bab berikutnya. Pada definisi-definisi tertentu akan diberikan contoh untuk mempertegas maksud dari definisi tersebut.

2.1 GRUP

Grup adalah salah satu dari beberapa struktur aljabar yaitu suatu himpunan dengan operasi biner yang memiliki sifat tertentu. Berikut ini akan diberikan definisi tentang grup.

Definisi 2.1.1:Operasi Biner (Sukirman,2003;27)

Misalkan S suatu himpunan tidak kosong. Operasi $*$ pada elemen-elemen S disebut operasi biner, apabila setiap pasangan berurut $a, b \in$ S maka $(a * b) \in$ S. Operasi $*$ pada S merupakan operasi biner dapat pula dikatakan bahwa operasi $*$ pada S bersifat tertutup.

Definisi 2.1.2: Grup (Saih Suwilo, 1997;27)

Suatu grup adalah suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan atas G atau ditulis $\langle G,* \rangle$ sehingga $*$ memenuhi aksioma-aksioma:

1) Operasi biner $*$ pada himpunan G bersifat asosiatif,

$\forall a, b, c \in \mathrm{G}$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

2) G mempunyai elemen identitas terhadap $*$, misal e

   $\exists e \in \mathrm{G}\ \forall a \in \mathrm{G}$ berlaku $a * e = e * a = a$

3) Setiap elemen G mempunyai invers di terhadap $*$,

   $\forall a \in \mathrm{G}\ \exists a^{-1} \in \mathrm{G}$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

Teorema 2.1.3: **Hukum Kanselasi (Saih Suwilo, 1997; 35)**

Andaikan <G, $*$> adalah suatu grup:

i) Jika $a * x = b * x$ maka $a = b$ (kanselasi kanan)

ii) Jika $y * a = y * b$ maka $a = b$ (kanselasi kiri)

Untuk setiap $a, b, x, y \in \mathrm{G}$

Bukti:

Ambil sebaran $x, y \in \mathrm{G}$ sehingga terdapat $x^{-1}, y^{-1} \in \mathrm{G}$ (definisi grup aksioma 3).

i) Karena $a * x = b * x$, maka diperoleh:

$(a * x) * x^{-1} = (b * x) * x^{-1}$ karena G grup dan $x \in \mathrm{G}$ maka $x \in \mathrm{G}$

$a * (x * x^{-1}) = b * (x * x^{-1})$ sifat assosiatif

$a * e = b * e$ e adalah elemen identitas

$a = b$

ii) Karena $y * a = y * b$, maka diperoleh:

$y^{-1} * (y * a) = y^{-1} * (y * b)$

$(y^{-1} * y) * a = (y^{-1} * y) * b$

$$e * a \quad = e * b$$

$$a = b$$

dari 1) dan 2) terbukti bahwa dalam suatu grup berlaku hukum kanselasi kanan & kanselasi kiri.■

Teorema 2.1.4.

Bila <G, ∗> adalah suatu grup, maka hanya mempunyai tepat satu elemen identitas dan hanya mempunyai tepat satu elemen invers untuk setiap $a \in G$.

Bukti:

i. Grup <G, ∗> hanya mempunyai tepat satu elemen identitas

Misalkan e adalah elemen identitas di G. Andaikan terdapat elemen identitas yang lain, namakan e' di G. Untuk $\forall a \in G$ berlaku:

$a * e = e * a = a$ dan

$a * e' = e' * a = a.$

karena $e, e' \in G$, maka $e' * e = e * e' = e'$ dan

$$e * e' = e' * e = e.$$

Sehingga $e = e'$. jadi elemen identitas dari <G, ∗> tunggal.■

ii. Grup <G, ∗> hanya mempunyai tepat satu elemen invers

Ambil sebarang $a \in G$, invers dari a adalah u. Misalkan terdapat invers yang lain yaitu v, maka $a * u = u * a = e$ dan $a * v = v * a = e$ berlaku teorema 2.1.3.

$u = u * e$

$= u * (a * v)$

$= (u * a) * v$ (sifat assosiatif)

$= e * v$

$u = v$, sehingga terbukti invers dari $a \in$ G adalah tunggal.■

Selain memiliki sifat di atas, operasi biner $*$ pada grup sering kali juga memiliki sifat komutatif. Berikut definisi grup komutatif atau abelian.

Definisi 2.1.5: Grup Komutatif (Fraleigh, 1995:52)

Suatu grup <G, $*$> dikatakan komutatif atau abelian jika operasi biner pada G bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in$ G, berlaku: $a * b = b * a$.

Definisi 2.1.6: Subgrup(Saih Suwilo, 1997:47)

Andaikan G adalah suatu grup. Himpunan bagian tak kosong H dari G disebut subgroup dari G jika H dengan operasi biner yang sama pada G adalah suatu grup. Jika H adalah subgrup dari G, maka dinotasikan dengan $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$, dapat juga dinotasikan dengan $\mathrm{H} < \mathrm{G}$ yang berarti $\mathrm{H} \leq \mathrm{G}$, tetapi $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}$.

Teorema 2.1.7:

Andaikan G adalah suatu grup. H himpunan bagian dari G adalah subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi aksioma-aksioma:

i) $\forall a, b \in \mathrm{H}, a * b \in \mathrm{H}$

ii) $\forall a \in \mathrm{H}, a^{-1} \in \mathrm{H}$

Bukti :

$(\Rightarrow)$ akan dibuktikan jika H subgrup dari G, maka aksioma i) & ii) terpenuhi. Karena H subgrup dari G maka H juga grup sehingga jelas terbukti aksioma-aksioma i) & ii) diatas terpenuhi.

$(\Leftarrow)$ akan dibuktika jika aksioma i) & ii) maka H subgrup dari G

a. Dari aksioma i), operasi $*$ atas G adalah tertutup pada H, sehingga operasi $*$ yang didefinisikan atas G adalah juga oparasi $*$ atas H.
b. Sudah diketahui bahwa H himpunan bagian dari G. Karena H$\subset$ G, untuk $\forall a,b,c \in \mathrm{H}$ maka $a,b,c \in \mathrm{H}$. Hal ini berakibat $a * (b * c) = (a * b) * c$ di H, sehingga operasi $*$ atas H adalah assosiatif.
c. Dari aksioma ii) diketahui untuk $\forall a \in \mathrm{H}, a^{-1} \in \mathrm{H}$, karena H tertutup terhadap operasi $*$ dari G maka pasangan elemen a dan a^{-1} berlaku $a * a^{-1} = e \in$ H.
d. Setiap elemen di G mempunyai elemen invers terhadap operasi $*$ terbukti dari aksioma ii).

sehingga terbukti bahwa H adalah subgrup dari G.■

Definisi 2.1.8: Homomorfisme Grup (Saih Suwilo,1997;138)

Misalkan G dan F adalah dua buah grup. Suatu homomorfisme $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{F}$, sehingga untuk $\forall a,b \in \mathrm{G}$ berlaku $\phi(a*b) = \phi(a)*\phi(b)$.

Contoh:

Diberikan G adalah grup Q terhadap operasi perkalian biasa yang dinotasikan G= <Q, $\cdot$> dan G'=<Q, $*$> dengan $*$ didefinisikan $\forall a, b \in Q \quad a * b = \frac{ab}{2}$. Diberikan G dan G' adalah grup, $f : G \to G'$ yang didefinisikan $a \to f(a) = 2a.$ Tunjukkan bahwa f adalah homomorfisme?

Penyelesaian:

i) Akan ditunjukkan bahwa f fungsi

ambil sebarang $a, b \in G$ diperoleh

$a = b \Rightarrow 2a = 2b$

$f(a) = f(b)$

jadi terbukti bahwa f fungsi.

ii) Akan ditunjukkan bahwa f homomorfisme grup

ambil sebarang $a, b \in G$ diperoleh

$f(ab) = 2(ab)$

$= \frac{2a2b}{2}$

$= 2a * 2b$

$= f(a) * f(b)$

jadi terbukti f homomorfisme grup.

2.2 LAPANGAN

Sebelum membahas definisi ruang vektor secara inti, lebih dahulu diperkenalkan pengertian lapangan (*field*).

Definisi 2.2.1. (Setiadji, 2008: 3)

Himpunan tak kosong F dinamakan lapangan jika memenuhi dua operasi yang dinamakan "*addisi*" (dengan notasi +) dan "*multiplikasi*" (dengan notasi *),:

I. Terhadap addisi (+)

1.1 Tertutup: $\forall a, b \in \mathrm{F}$ dapat ditemukan tunggal elemen $c \in \mathrm{F} \ni a + b = c$

1.2 Assosiatif: $\forall a, b, c \in \mathrm{F}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$

1.3 Ada elemen netral: $\exists\, 0 \in \mathrm{F}\ \forall a \in \mathrm{F}\quad a + 0 = 0 + a = a$, 0 disebut elemen netral

1.4 Setiap elemen mempunyai invers:

$\forall a \in \mathrm{F}\ \exists (\text{-}a) \in \mathrm{F} \ni a + (-a) = (-a) + a = 0$

1.5 Komutatif: $\forall a, b \in \mathrm{F}$ berlaku $a + b = b + a$

II. Terhadap multiplikasi (*)

2.1 Tertutup: $\forall a,b \in \mathrm{F}$ dapat ditemukan tunggal elemen $c \in \mathrm{F} \ni a * b = c$

2.2 Assosiatif: $\forall a,b,c \in \mathrm{F}$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$

2.3 Ada elemen satuan : $\exists 1 \in \mathrm{F}\ \forall a \in \mathrm{F}$ berlaku $a * 1 = 1 * a = a$

2.4 Setiap elemen yang bukan 0 (elemen netral) mempunyai invers berlaku $\forall a \in \mathrm{F}\ \exists a^{-1} \in \mathrm{F}$ dan $a \neq 0$ sehingga berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$

2.5 Komutatif: $\forall a,b \in \mathrm{F}$ berlaku $a * b = b * a$

III. Distributif

Sifat distributif operasi * terhadap +, yaitu untuk setiap $a,b,c \in \mathrm{F}$ berlaku

i. $a * (b + c) = a * b + a * c$

ii. $(b + c) * a = b * a + c * a$

Secara matematis lapangan dilambangkan <F, +, *>. Sebagai contoh setruktur aljabar yang merupakan lapangan yang sering dijumpai: <Q; +, * > yaitu himpunan semua bilangan rasional terhadap penjumlahan dan pergandaan biasa.

Selanjutnya akan didefinisikan tentang ruang vektor yang merupakan dasar teori untuk pembahasan.

2.3 RUANG VEKTOR

Definisi 2.3.1.: (Howard Anton, 1987: 137)

Diberikan V sebarang himpunan, didefinisikan dua operasi di dalamnya yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar. V dikatakan ruang vektor atas lapangan F jika untuk setiap u, v, w pada V dan setiap skalar k & l pada F memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1) Jika u, v $\in$ V maka u + v $\in$ V
2) u + v = v + u
3) u + (v + w) = (u + v) + w
4) $\exists$ 0 $\in$ V, sehingga 0 + u = u + 0 = u
5) $\forall$ u $\in$ V $\exists$ -u $\in$ V sehingga u + -u = -u + u = 0
6) $\forall$ u $\in$ V, dan sebarang skalar k maka ku $\in$ V.
7) k (u + v) = ku + kv
8) $(k + l)$u = ku + lu
9) $k(lu) = (kl)u$
10) 1u = u

Contoh:

Himpunan semua bilangan riil R dengan operasi penjumlahan dan perkalian bilangan riil merupakan ruang vektor atas R dirinya sendiri.

Jika dalam grup dikenal suatu subgrup, maka dalam ruang vektor dikenal adanya subruang. Untuk lebih jelasnya berikut diberikan definisi dari subruang.

Definisi 2.3.2: **Subruang (Howard anton, 1987: 142)**

Subhimpunan W dari ruang vektor V dinamakan subruang(*subspace*) V jika W itu sendiri adalah ruang vektor dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Contoh:

Misalkan A adalah ruang vektor dalam R^3. Misalkan W=$\left\langle B \in R^3 \middle| B \bullet A = 0 \right\rangle$. Maka W adalah ruang bagian dari R^3.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $B_1, B_2 \in W$ maka diperoleh

$B_1 \bullet A = 0$ dan $B_2 \bullet A = 0$ sehingga $(B_1 + B_2) \bullet A = B_1 \bullet A + B_2 \bullet A$

$$= 0$$

jadi $B_1+B_2 \in W$.

Ambil sklar $k \in R$ dan $B \in W$ maka diperoleh $kB \bullet A = k(B \bullet A) = 0,\ kB \in W$.

Jadi W suatu ruang bagian dari V.

Berdasarkan definisi di atas dapat diturunkan beberapa teorema untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan bagian tak kosong dari ruang vektor adalah subruang. Berikut diberian salah satu teorema tersebut.

Teorema 2.3.3: (Howard anton, 1987: 143)

Jika W adalah himpunan dari satu atau lebih vektor dari sebuah ruang vektor V, maka W adalah subruang dari V jika dan hanya jika kondisi-kondisi berikut berlaku:

a) Jika u dan v adalah vektor-vektor dalam W maka u+v terletak di W,
b) Jika *k* adalah sebarang skalar dan u sebarang vektor pada W, maka *k*u berada di W.

Bukti:

($\Rightarrow$) jika W subruang dari V, maka semua aksioma dari ruang vektor terpenuhi; khususnya aksioma 1) dan 6). Dalam hal ini juga berlaku pada kondisi a) dan b).

($\Leftarrow$) sebaliknya, diketahui kondisi a) dan b) berlaku. Karena kondisi ini adalah aksioma 1) dan 6) dalam ruang vektor, sehingga hanya perlu ditunjukkan delapan aksioma berlaku di W. Untuk aksioam 2), 3), 7), 8), 9) dan 10) secara otomatis dipenuhi oleh vektor-vektor dalam W karena aksioma tersebut dipenuhi oleh semua vektor dalam V. Sehingga hanya perlu dibuktikan aksioam 4) dan 5) dipenuhi oleh W. Misalkan x sebarang vektor di W, maka menurut kondisi b) *k*x berada di W untuk setiap skalar *k.* Dengan memilih *k=0*, maka jelaslah 0x=0 berada di W. Dengan mengambil *k*=-1 maka jelaslah bahwa (-1)x= -x berada di W.■

Jika terdapat suatu vektor w, serta serta vektor-vektor v_1, v_2, …., v_r dari ruang vektor V, maka memiliki kemungkinan vektor w dapat dibentuk dari vektor-vektor v_1, v_2, …., v_r ataupun memiliki kemungkinan tidak dapat dibentuk dari vektor-vektor tersebut. Konsep hubungan antara sebuah vektor dengan kumpulan vektor seperti ini, akan dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.3.4: Kombinasi Linear (Howard anton, 1987: 145)

Sebuah vektor **w** dinamakan kombinasi linier dari vektor – vektor v_1, v_2, …., v_r jika vektor tersebut dapat diungkapkan dalam bentuk

$$\mathbf{w} = k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_rv_r = \sum_{i=1}^{r} k_i v_i$$

dimana $k_1, k_2, \ldots, k_r$ adalah skalar.

Telah dijelaskan hubungan antara sebuah vektor dengan kumpulan dari beberapa vektor yaitu kombinasi linear. Sekarang akan diberikan definisi jika suatu kumpulan vektor-vektor yang dapat membentuk(membagun/merentang) seluruh vektor dalam ruang vektor V.

Definisi 2.3.5:Merentang (Howard Anton, 1987: 146)

Jika v_1, v_2, …,v_r adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor pada V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear v_1, v_2, …,v_r maka vektor-vektor ini dikatakan merentang V.

Berdasarkan konsep kombinasi linear dan subruang dapat dibentuk teorema yang berkaitan antara keduanya. Berikut teorema yang akan diberikannya.

Teorema 2.3.6: (Howard Anton, 1987: 147)

Jika v_1, v_2, …,v_r adalah vektor-vektor pada ruang vektor V, maka:

a) Himpunan W dari semua kombinasi linear v_1, v_2, …,v_r adalah subruang dari V.
b) W adalah subruang terkecil dari V yang mengandung v_1, v_2, …,v_r dalam arti bahwa setiap subruang dari V yang mengandung v_1, v_2, …,v_r harus mengandung W.

Berdasarkan kombinasi linear v_1, v_2, …,v_r maka didapatkan W yang merupakan subruang dari V. Subruang ini dinamakan *ruang linear terentang* oleh :{ v_1, v_2, …,v_r} atau disebut sebagai ruang rentang oleh { v_1, v_2, …,v_r}.

Bukti:

a) Untuk memperlihatkan bahwa W adalah subruang dari V, maka harus ditunjukkan bahwa setiap vektor di dalam W tertutup terhadap operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Jika sebarang u dan v adalah vektor dalam W maka u dan v dapat dinyatakan sebagai:

$\mathrm{u} = c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + ... + c_r\mathrm{v}_\mathrm{r}$
$\mathrm{v} = k_1\mathrm{v}_1 + k_2\mathrm{v}_2 + ... + k_r\mathrm{v}_\mathrm{r}$
dimana $c_1, c_2, ..., c_r$ dan $k_1, k_2, ..., k_r$ adalah skalar, maka:

u+v= $(c_1 + k_1)\mathrm{v}_1 + (c_2 + k_2)\mathrm{v}_2 + ... + (c_r + k_r)\mathrm{v}_\mathrm{r}$,

dan untuk sebarang skalar *k*,

*k*u= $(kc_1)\mathrm{v}_1 + (kc_2)\mathrm{v}_2 + ... + (kc_r)\mathrm{v}_\mathrm{r}$

jadi u+v dank u merupakan kombinasi linear $v_1, v_2, \ldots, v_r$ sehingga u+v dan *k*u berada di W.

b) Setiap vektor v_i adalah kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$, sehingga dapat dinyatakan sebagai: $v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 1v_1 + \ldots + 0v_r$

oleh karena itu, subruang W membangun $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Misalkan W' adalah sebarang subruang lain dari ruang vektor V yang mengandung $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Karena W' tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, maka W' harus mengandung semua kombinasi linear $\mathrm{c}_1\mathrm{v}_1 + \mathrm{c}_2\mathrm{v}_2 + ... + \mathrm{c}_\mathrm{r}\mathrm{v}_\mathrm{r}$ dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$, jadi W' mengandung setiap vektor W.■

Berikut akan diberikan konsep bebas linear. Konsep ini berawal dari konsep kombinasi linear. Jika diberikan suatu himpunan vektor dan himpunan vektor tersebut dapat dinyatakan dalam kombinasi linear maka hanya memiliki penyelesaian tunggal berupa vektor nol.

Definisi 2.3.7: Bebas Linear dan Tak Bebas Linear(Howard Anton,1987: 151)

Jika S = { $v_1, v_2, ..., v_r$ } $\subset$ V adalah himpunan vektor maka persamaan vektor

$k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_rv_r = \sum_{i=1}^{r} k_i v_i =$ 0, sedemikian sehingga $k_i = 0$, $\forall$ i= 1, 2, ….,r,

maka S dikatakan himpunan bebas linear (*linearly independent*) dan jika terdapat $k_i \neq 0$, i= 1, 2, ….,r, maka S dikatakan tak bebas linear (*linearly unindependent*).

Contoh:

Diberikan vektor (2,3) dan (1,3) adalah bebas linear. Karena $k_1(2,3) + k_2(1,3) = (0,0)$ maka diperoleh $k_1 = k_2 = 0$.

Definisi 2.3.8: Basis (Howard Anton, 1987: 158)

Jika V adalah sebarang ruang vektor dan S= { $v_1, v_2, \ldots, v_r$ } merupakan himpunan berhingga dan vektor-vektor pada V, maka S dikatakan basis untuk V jika:

1) S bebas linear
2) S merentang V

Definisi 2.3.9: Dimensi (Setiadji,2008: 24)

Dimensi dari ruang vektor berdimensi hingga adalah banyaknya vektor dalam sebarang basis. Dimensi dari V dilambangkan dengan dim(V).

2.4 PEMETAAN ATAU FUNGSI

Definisi 2.4.1:Pemetaan (S.L.G upta danNisa Rani, 1970: 58)

Suatu fungsi f: $A \rightarrow B$ dapat dinyatakan dengan:

$\forall\, a, b \in A, a = b \Longrightarrow f(a) = f(b)$, artinya setiap elemen dari himpunan A dipasangkan tepat satu elemen dari himpunan B.

Dalam fungsi juga mengenal beberapa fungsi khusus. Fungsi-fungsi khusus yang biasa digunakan antara lain:

Definisi 2.4.2: Fungsi- fungsi khusus (Sukirman, 2006: 165-168)

1. Fungsi pada/ onto/ surjektif

Fungsi f: $A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif jika dan hanya jika setiap elemen daerah kawan (kodomain) merupakan peta dari suatu elemen dari daerah asal (domain). Secara matematis ditulis fungsi f: $A \rightarrow B$ dikatakan surjektif $\Leftrightarrow \forall\, b \in B, \exists\, a \in A \ni f(a) = b$

2. Fungsi injektif

Fungsi f: $A \rightarrow B$ dikatakan fungsi injektif jika hanya jika setiap $a \in f(A)$, f^{-1} (a) adalah himpunan tunggal (himpunan yang memuat satu elemen). Artiya setiap dua elemen yang berbeda dalam domain mempunyai peta yang berbeda pula dalam kodomain, atau dapat ditulis fungsi $f: A \rightarrow B$ dikatakan injektif $\Leftrightarrow \forall a,b \in A, f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

3. Fungsi bijektif

Suatu fungsi dikatakan bijektif jika dan hanya jika f fungsi surjektif dan injektif.

2.5 ISOMORFISMA

Sebelum mendefinisikan isomorfisma, berikut ini akan ditunjukkan definisi homomorfisma. Perhatikan dua ruang vektor berikut:

$V = \{V,F; +,*,\oplus,\circledast\}$ dan

$W = \{W,F; +,*,\oplus',\circledast'\}$

artinya dua ruang vektor atas lapangan yang sama. Keduanya mempunyai simbol-simbol matematika yang berbeda.

Definisi 2.5.1: (Setiadji,2008: 54)

Misal $V = \{V,F; +,*,\oplus,\circledast\}$

$W = \{W,F; +,*,\oplus',\circledast'\}$

adalah ruang vektor atas lapangan F. Suatu pemetaan $h: V \dashrightarrow W$ disebut homomorfisma, jika untuk $\forall\ v_1, v_2 \in V$ dan semua $\alpha \in F$, berlaku:

$h(v_1 \oplus v_2) = h(v_1) \oplus' h(v_2)$ dan

$h(\alpha * v_1) = \alpha *' h(v_1)$

Jika setiap vektor dari W berada dalam Im(h), h disebut isomorfisma dari V pada W.

Definisi 2.5.2: (Setiadji,2008: 54)

Suatu homomorfisma yang bijektif J: V ⇢ W disebut suatu isomrfisma.

Jika pemetaan tersebut ada, V dan W disebut isomorfik. Untuk mengetahui bahwa dua vektor V dan W atas lapangan F sama isomorfik, perlu ditunjukkan suatu pemetaan bijektif dari V pada W yang memenuhi dua operasi yaitu penjumlahan vektor dan pergandaan vektor dengan skalar. Sekarang diberikan teorema yang berlaku untuk pemetaan/ fungsi bijektif.

Teorema 2.5.3:

Sebarang ruang vektor V berdimensi n atas lapangan F adalah isomorfik dengan ruang F^n dari semua pasangan berurutan n elemen (*ordered* n *tuples of elemen* dari F).

Bukti: Misal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ suatu basis pada V. Maka $\forall v \in V$ mempunyai representasi tunggal sebagai kombinasi linear $\{v_i\}$, i = 1, 2, …, n. Dan α_1, α_2 ,…α_n adalah skalar.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\alpha}_1 v_1 + \alpha_2\ v_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\ v_n$$

didefinisiakan suatu relasi:

G: $v \in V_n \dashrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\ \alpha \in F^n$

G adalah suatu pemetaan, karena:

Jika $v_1 = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \ldots. + \alpha_{1n} v_n$ dan

$v_2 = \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \ldots. + \alpha_{2n} v_n$

$v_1 = v_2$, maka $\alpha_{11} = \alpha_{21}, \ldots\ldots, \alpha_{1n} = \alpha_{2n}$;

sehingga $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n}) = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots \alpha_{2n})$

G adalah pemetaan yang injektif, karena: jika $(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n}) = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n})$ maka $\alpha_{11} = \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{1n} = \alpha_{2n}$; sehingga $v_1 = v_2$

G adalah pemetaan yang surjektif, karena:

$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) \in F^n$ menentukan $v = \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \ldots. + \alpha_{1n} v_n \in V$.

Jadi G adalah pemetaan yang bijektif.

Jika $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1i} v_i$ dan $v_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{2i} v_i$, maka

$G(v_1 + v_2) = G\ \{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_{1i} + \alpha_{2i})\ v_i\}$

$$= (\alpha_{11} + \alpha_{21,} ..., \alpha_{1n} + \alpha_{2n})$$

$$= (\alpha_{11},..., \alpha_{1n}) + (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2n})$$

$$= G(v_1) + G(v_2)$$

dan jika $\alpha \in F$, maka

$$G(\alpha * v_1) = G(\alpha * \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{1i} v_i))$$

$$= G\{ \sum_{i=1}^{n} (\alpha * \alpha_{1i}) v_i \}$$

$$= (\alpha * \alpha_{11},...., \alpha * \alpha_{1n})$$

$$= \alpha(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n})$$

$$= \alpha * G(v_1)$$

Maka G adalah suatu homomorfisma.

Jadi V_n isomorfik dengan F^n, dilambangkan $V_n \cong F^n$.

2.6 TRANSFORMASI LINEAR

Definisi 2.6.1.: (Setiadji, 2008:35)

Diberikan transformasi linear T dari ruang vektor V ke ruang vektor W, keduanya atas lapangan F yang sama, adalah suatu pemetaan dari V ke W sedemikian sehingga, untuk setiap x,y $\in$ V dan $\alpha \in$ F berlaku:

1) T (x + y) = T(x) + T(y)
2) T ($\alpha *$ x) = $\alpha *$ T(x)

Definisi 2.6.2.:(Setiadji, 2008:35)

Diberikan transformasi linear T dari ruang vektor V ke ruang vektor W, keduanya atas lapangan F yang sama, adalah suatu pemetaan dari V ke W sedemikian sehingga, untuk setiap x,y$\in$ V dan $\alpha, \beta \in$ F berlaku:

T (α* x + β*y) = α *T(x) + β* T(y)

Akan ditunjukkan bahwa kedua definisi ini ekuivalen:

Definisi 2.6.1. $\Rightarrow$ 2.6.2

Ambil sembarang vektor x,y $\in$ V dan skalar $\alpha, \beta \in$ F

Menurut 2), maka T ($\alpha *$ x) = $\alpha *$ T(x) dan T(β * y) = β * T(y)

dan menurut 1)

$T(\alpha * x + \beta * y) = T(\alpha * x) + T(\beta * y)$ sehingga

$T(\alpha * x + \beta * y) = \alpha * T(x) + \beta * T(y)$.

Definisi 2.6.2. $\Rightarrow$ 2.6.1.

Ambil $\alpha = \beta = 1 \in F$. Maka berdasarkan Definisi 2.6.2,

$$
\begin{aligned}
T(x + y) &= T(1.x + 1.y) \\
&= 1.T(x) + 1.T(y) \\
&= T(x) + T(y)
\end{aligned}
$$

dan ambil $\beta = 0 \in F$, maka berdasarkan Definisi 2.6.2

$T(\alpha * x) = T(\alpha x + 0y) = \alpha T(x) + 0 = \alpha T(x)$

Sebagaimana yang diketahui dalam teori pemetaan maka dua pemetaan linear T_1 dan T_2 dari V ke W dikatakan sama jika dan hanya jika: $T_1(x) = T_2(x)$, untuk semua $x \in V$.

2.7 MODUL

Definisi 2.7.1: **Modul Kiri**

Modul kiri M atas ring R merupakan suatu struktur yang dibentuk oleh grup abelian M terhadap penjumlahan (*additive abelian group*) dan ring R dengan komposisi skalar(pergandaan *scalar*) sebagai berikut:

$(\forall\, r \in R)\ (\forall\, m \in M),\ rm \in M$

Sedemikian sehingga memenuhi aksioma:

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ untuk $(\forall r \in R)\ (\forall m_1, m_2 \in M)$
2. $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$ untuk $(\forall r_1, r_2 \in R)\ (\forall\, m \in M)$
3. $r_1(r_2m) = (r_1r_2)m$ untuk $(\forall r_1, r_2 \in R)\ (\forall\, m \in M)$
4. $1m = m$ untuk $(\forall\, m \in M)$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian studi pustaka (*library research)*. Peneliti akan mempelajari beberapa sumber tertulis teori-teori tentang *Konsep Dasar Aljabar Lie*.

3.2 Sifat penelitian

Sifat penelitian dalam studi pustaka ini adalah penelitian kualitatif yaitu melakukan klarifikasi dari semua teori yang ada baik definisi maupun teorema.

3.3 Sumber data

Penelitian ini menggunakan sumber kepustakan, artinya peneliti mengumpulkan, membaca, mempelajari dan memahami buku-buku yang berkait dengan *Aljabar Lie.* Sumber data-data yang digunakan dalam penelitian ini dibedakan atas dua kelompok yaitu: sumber data primer dan sumber data sekunder. Sumber data primer yang digunakan dalam penelitian ini adalah ***Lie Algebras*** tentang konsep dasar *Aljabar Lie*.

Sumber data sekunder adalah buku-buku yang menunjang sumber data primer untuk memahami lebih lanjut, data sekunder antara lain buku-buku tentang aljabar linear (Setiadji), grup (Saih Suwilo), ruang vektor dan transformasi linear (Howard Aton) dan modul yang berkaitan dengan pembahasan tersebut.

3.4 Langkah-langkah penelitian

Jenis penelitian ini adalah *literature*, sehingga langkah penelitiannya dengan buku-buku yang dipelajari untuk memperoleh data-data penelitian. Setelah memperoleh data penulis membagi penelitian ini secara umum dalam dua bagian, yaitu dasar teori dan pembahasan. Dasar teori yang penulis gunakan diawali dari konsep grup, lapangan, ruang vektor, modul kiri, dan transformasi linear.

Bagian kedua, pembahasan inti yang penulis masukkan dalam bab IV, yang berisikan pembahasan mengenai konsep pembentukan stuktur *Aljabar Lie* dan *Aljabar Lie* pada transformasi linear. Bagian ini, penulis mengawali dengan memperkenalkan konsep *Non-Assosiatif Aljabar* yang didefinisikan terlebih dahulu konsep operasi bilinear kemudian didefinisikan *Non-Assosiatif Aljabar*. Puncak penelitian ini adalah konsep pembentukan stuktur *Aljabar Lie*, dan *Aljabar Lie* pada transformasi linear yang diambil sebagian besar dari buku ***Lie Algebra***s yang ditulis oleh Nathan Jacobson (1962).

BAB IV

PEMBAHASAN

Pembahasan ini akan membahas tentang *Aljabar Lie* yang meliputi definisi, teorema maupun sifat. Bagaimana struktur pembentukan *Aljabar Lie* dan *Aljabar Lie* dari transformasi linear. Pembentukan *Aljabar Lie* berawal dari adanya *Non Assosiatif Aljabar* (NAA) yang harus diketahui sebelum membahas lebih lanjut. Berikut akan dibahas tentang pengertian *Non Assosiatif Aljabar* yang menjadi pengantar pembahasannya.

4.1. Non Assosiatif Aljabar

Berawal dari ruang vektor V atas lapangan F, sedemikian sehingga akan didefinisikan operasi bilinear yang menjadi dasar dalam mendefinisikan *Non Assosiatif Aljabar*, berikut definisinya.

Definisi 4.1.1:Operasi Bilinear

Diberikan ruang vektor V atas lapangan F yang dilengkapi dengan operasi biner $*$. Operasi biner $*$ pada V dikatakan bilinear jika untuk setiap $x,y \in V$ & $\alpha \in F$ dimana $x * y \in V$ memenuhi aksioma :

1. $(x_1 + x_2) * y = x_1 * y + x_2 * y$

   $x * (y_1+y_2) = x * y_1 + x * y_2$ $\quad x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$

2. $\alpha * (xy) = (\alpha * x)y = x(\alpha * y) \qquad \alpha \in F$.

Untuk penulisan operasi biner $*$ yang semula $x * y$ pada pembahasan berikutnya dinotasikan dengan xy.

Definisi 4.1.2: Non Assosiatif Algebra (NAA)

Suatu ruang vektor V atas lapangan F yang dilengkapi dengan operasi biner serta memenuhi aksioma bilinear dinamakan *Non-Assosiatif Aljabar*.

Sifat 4.1.3:

V *Non-Assosiatif Aljabar* atas ring komutatif F dengan elemen satuan 1 merupakan Modul kiri F yang memenuhi aksioma bilinear, untuk setiap $x,y \in V$

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa V *Non-Assosiatif Aljabar* adalah grup abelian terhadap penjumlahan, karena V *Non-Assosiatif Aljabar* merupakan ruang vektor atas lapangan F sedemikian sehingga V memenuhi aksioma 1.2,3, 4, 5 dari definisi ruang vektor, yang berarti V adalah grup abelian.
2. Akan ditunjukkan F ring dengan elemen satuan 1. Jelas, karena sudah diketahui bahwa F lapangan sehingga pasti merupakan ring komutatif dengan elemen satuan 1.
3. Akan ditunjukkan V *Non-Assosiatif Aljabar* memenuhi pergandaan skalarnya. Jelas, karena memenuhi aksioma 6 dari definisi ruang vektor.

4. Akan ditunjukkan V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan elemen satuan 1 memenuhi aksioma modul kiri, karena V ruang vektor maka memenuhi aksioma modul kiri:
    1) $r(n_1 + n_2) = rn_1 + rn_2$ untuk $(\forall r \in F)$ $(\forall n_1, n_2 \in V)$
    2) $(r_1 + r_2)n = r_1 n + r_2 n$ untuk $(\forall r_1, r_2 \in F)$ $(\forall n \in V)$
    3) $r_1(r_2 n) = (r_1 r_2)n$ untuk $(\forall r_1, r_2 \in F)$ $(\forall n \in V)$
    4) $1n = n$ untuk $(\forall n \in V)$

Terbukti bahwa V *Non-Assosiatif Aljabar* adalah modul kiri F.■

Selanjutnya akan didefinisikan tentang perkalian konstan pada aljabar yang menjadi pengantar dalam mendefinisikan perkalian konstan pada vektor-vektor.

Definisi 4.1.4 : Perkalian konstan pada Aljabar

Diberikan V aljabar atas lapangan F yang memiliki basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$yang didefinisikan $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} e_k$ dimana $\alpha_{ijk} \in F$, $i, j = 1,2,\ldots.n$. $n^3 \alpha_{ijk}$ dinamakan perkalian konstan pada aljabar relatif pada basis.

Definisi perkalian konstan pada aljabar di atas, merupakan pengantar dalam mendefisnisikan perkalian konstan pada vektor. Berikut pengembangannya:

Diberikan aljabar V atas lapangan F dan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ maka $\forall x, y \in V$ yang didefinisikan x= $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, y= $\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$, dengan $\alpha_i \beta_j \in F$ sehingga

$$xy = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right)$$

$$xy = \left(\alpha_1 e_1 \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) + \left(\alpha_2 e_2 \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) + \ldots + \left(\alpha_n e_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right)$$

$$xy = ((\alpha_1 e_1\ \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_1\ \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_1 e_1\ \beta_n e_n)) + ((\alpha_2 e_2\ \beta_1 e_1 + \alpha_2 e_2\ \beta_2 e_2 + \ldots +$$
$$\alpha_2 e_2\ \beta_n e_n)) + \ldots + ((\alpha_n e_n\ \beta_1 e_1 + \alpha_n e_n\ \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n\ \beta_n e_n))$$

$$xy = (\alpha_1 e_1\ \beta_1 e_1 + \alpha_2 e_2\ \beta_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\ \beta_1 e_1) + (\alpha_1 e_1\ \beta_2 e_2 + \alpha_2 e_2\ \beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$
$$\beta_2 e_2) + \ldots + (\alpha_1 e_1\ \beta_n e_n + \alpha_2 e_2\ \beta_n e_n + \ldots. + \alpha_n e_n\ \beta_n e_n)$$

$$xy = \left(\alpha_1 e_1 \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) + \left(\alpha_2 e_2 \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) + \ldots. + \left(\alpha_n e_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right)$$

$$xy = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right)$$

$$xy = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i e_i (\beta_j e_j)$$

$$xy = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i_j} \beta_j (e_i e_j) \qquad \text{karena aksioma 2}$$

Berdasarkan uraian di atas terbukti bahwa xy adalah ditentukan oleh $e_i e_j$.

Uraian di atas menunjukkan adanya konstruksi umum pada dimensi berhingga NAA sehingga dapat didefinisikan perkalian konstan pada vektor-vektor sebagai berikut.

Definisi 4.1.5: **Perkalian Konstan pada Vektor-vektor**

Diberikan V ruang vektor dan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\forall x, y \in V$. Jika x = $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, y = $\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ didefinisikan:

$$xy = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i_j} \beta_j (e_i e_j) \text{ untuk suatu } e_i, e_j \in V$$

Pemilihan $e_i e_j$ ekuivalen dengan pemilihan α_{ijk} ϵ F sedemikian sehingga $e_i e_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} e_k$, karena V ruang vektor dan $e_i e_j$ adalah basis dari ruang vektor jadi berlaku adanya kombinasi linear.

Pengertian *Non-Assosiatif Aljabar* merupakan suatu hal yang penting untuk struktur yang dihasilkannya. Sebagaimana penjelasan yang telah diuraikan, salah satunya menentukan beberapa kondisi lebih lanjut dalam perkalian. Sesuatu hal yang lebih penting dan yang akan diperhatikan di sini adalah hukum assosiatif dan kondisi *Lie* yang menjadi salah satu permasalahan dalam penulisan skripsi ini.

4.2. Aljabar lie

Definisi 4.2.1: Aljabar Assosiatif

V *Non-Assosiatif Aljabar* dikatakan assosiatif jika operasi pergandaannya bersifat assosiatif, yaitu $\forall$ x, y, z $\in$ V berlaku: (xy)z = x(yz).

Non-Assosiatif Aljabar yang memiliki sifat assosiatif dinamakan *Aljabar Assosiatif*.

Definisi 4.2.2: Aljabar Lie

V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F yang dilengkapi operasi biner yang bilinear dikatakan *Aljabar Lie* jika dan hanya jika V operasi perkaliannya memenuhi kondisi lie(*lie bracket*):

a. $x^2 = 0$,
b. Identitas Jacobi, yaitu untuk semua x, y, z $\in$ V berlaku:
   $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.

Sifat 4.2.3:

Jika L *Aljabar Lie* dan $\forall$ x, y $\in$ L maka berlaku xy = -xy

Bukti:

Ambil sebarang x, y $\in$ L maka

$0 = (x+y)^2$

$= x^2+xy+yx+y^2$

$= xy+yx$ karena $x^2=0$, $y^2=0$

$0+(-yx)= xy+yx+(-yx)$ karena elemen identitas pada L terhadap +

$-yx = xy$

$xy = -yx$.■

Konvers dari sifat 4.2.3 apabila kondisi tersebut terpenuhi maka $2x^2=0$, sedemikian sehingga jika karakteristik yang diketahui bukan 2 maka $x^2=0$. Oleh karena itu aljabar yang karakterstiknya $\neq 2$ pada sifat 3.2.3 dapat menggunakannya yang pertama dalam definisi *Aljabar Lie* yaitu $x^2 = 0$.

Berikut akan diberikan sutau teorema yang berkaitan dengan definisi *Aljabar Assosiatif* dan *Aljabar Lie.*

Teorema 4.2.4:

Suatu V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, V assosiatif jika hanya jika $(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$ untuk $i,j,k=1,2,\ldots n$. Jika $e_ie_j= \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr} e_r$ maka$(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$ ekuivalen dengan

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\alpha_{rks}=\sum_{r=1}^{n}\alpha_{irs}\alpha_{jkr},\quad i,j,k,r=1,2,\dots n$$

Bukti:

Diketahui V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, V assositif $\Leftrightarrow (e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$.

a) ($\Rightarrow$) Diketahui: V assositif.

Akan ditunjukkan: $(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$ untuk $i,j,k= 1,2,\dots,n$.

Karena e_i, e_j, e_k anggota dalam basis berarti $e_i, e_j, e_k \in$ V dan V assositif maka berlaku $(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$ untuk $i,j,k= 1,2,\dots,n$.

b) ($\Leftarrow$) Diketahui: $(e_ie_j)e_k=e_i(e_je_k)$ untuk $i,j,k= 1,2,\dots,n$.

Akan ditunjukakan V assositif.

Ambil sebarang x,y,z$\in$ V, misal $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$, $y=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j$, $z=\sum_{k=1}^{n}\delta_k e_k$ dengan $\alpha_i,\beta_j,\delta_k \in$ F $i,j,k=1,2,\dots,n$.

Berdasarkan pengembangan definisi konstan pada aljabar diperoleh definisi perkalian konstan pada vektor-vektor maka:

$$xy=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\beta_j(e_ie_j),\quad yz=\sum_{j,k=1}^{n}\beta_j\delta_k(e_je_k)$$

$$(xy)z = (\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i e_j)) \sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \delta_k (e_i (e_j e_k))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i (\sum_{j,k=1}^{n} \beta_j \delta_k (e_j e_k))$$

$$= x(yz)$$

akibatnya $\forall x, y, z \in V$ berlaku (xy)z = x(yz) dengan kata lain terbukti bahwa V assosiatif.

V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Jika $e_ie_j = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr} e_r$ maka $(e_ie_j)e_k = e_i(e_je_k)$ ekuivalen dengan

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr}\alpha_{rks} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{irs}\alpha_{jkr}, \qquad i, j, k, r = 1, 2, \ldots n.$$

a. ($\Rightarrow$) Diketahui $(e_ie_j)e_k = e_i(e_je_k)$, misal $e_ie_j = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr} e_r$

Akan dibuktikan $\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr}\alpha_{rks} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{irs}\alpha_{jkr}$.

$(e_ie_j)e_k = e_i(e_je_k)$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}e_r)e_k = e_i(\sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}e_r)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}(e_r e_k) = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}(e_i\ e_r)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks}e_s = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{irs}e_s$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} - \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{irs})e_s = 0$$

karena e_s bebas linear

s=1,2,…n

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{irs}\ . \ \blacksquare$$

b. ($\Leftarrow$) Diketahui: $\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{irs}$, $e_ie_j = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}e_r$

Akan dibuktikan: $(e_ie_j)e_k = e_i(e_je_k)$

$$\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{irs}$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} - \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{irs})e_s = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{rks} e_s = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{jkr} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{irs} e_s$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr} (e_r e_k) = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{jkr} (e_i e_r)$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ijr} e_r) e_k = e_i (\sum_{r=1}^{n} \alpha_{jkr} e_r)$$

$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$. ■

Teorema *Aljabar Assosiatif* terbukti selanjutnya akan diberikan teorema yang berkaitan dengan definisi *Aljabar Lie* dan sifatnya, berikut teoremanya.

Teorema 4.2.5:

Diberikan V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. V *Aljabar Lie* jika hanya jika $e_i^2 = 0$, $e_i e_j = -e_j e_i$, , $(e_i e_j) e_k + (e_j e_k) e_i + (e_k e_i) e_j = 0$, Untuk $i, j, k, r = 1, 2, \ldots, n$. Selanjutnya kondisi $e_i^2 = 0$, $e_i e_j = -e_j e_i$, $(e_i e_j) e_k + (e_j e_k) e_i + (e_k e_i) e_j = 0$ ekuivalen dengan $\alpha_{iik} = 0$ $\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}$, $\sum_{r=1}^{n} (\alpha_{ijr} \alpha_{rks} + \alpha_{jkr} \alpha_{ris} + \alpha_{kir} \alpha_{ris}) = 0$.

Bukti:

Diketahui V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

V *Aljabar Lie* $\Leftrightarrow e_i^{\,2} = 0$, $(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0$.

($\Rightarrow$) Diketahui V *Aljabar Lie*.

Akan ditunjukakan: $e_i^{\,2} = 0$, $(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0$

Karena V *Aljabar Lie* maka berlaku $e_i^{\,2} = 0$,

$$(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0$$

($\Leftarrow$) Diketahui $e_i^{\,2} = 0$, $(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0$

Akan ditunjukkan: bahwa V *Aljabar Lie*

a. Akan dibuktikan: $x^2=0$ untuk setiap $x \in V$

Ambil sebarang $x \in V$, misal $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in F$ i=1,2,…,n

Diperoleh: $x^2 = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \alpha_i (e_i \ e_i)$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\,2}\, 0$

$x^2 = 0$

b. Akan ditunjukkan: (xy)z+(yz)x+(xz)y =0

Ambil sebarang x, y, z $\in$ V , misal $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$, $z = \sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k$ untuk

$\alpha_i, \beta_j, \delta_k \in F$, i, j, k=1, 2, …, n. Diperoleh:

(xy)z+(yz)x+(xz)y =

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) \sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k\right) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k\right) \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

$$= \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i e_j)\right) \sum_{k=1}^{n} \delta_k e_k + \left(\sum_{j,k=1}^{n} \beta_j \delta_k (e_j e_k)\right) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \left(\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_i \delta_k (e_i e_k)\right) \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_i \beta_j \delta_k (e_i e_j) e_k + \sum_{j,k,i=1}^{n} \beta_j \delta_k \alpha_i (e_j e_k) e_i + \sum_{i,k,j=1}^{n} \alpha_i \delta_k \beta_j (e_i e_k) e_j$$

$$= 0$$

Jadi terbukti V *Aljabar Lie.*

Akan dibuktikan bahwa $e_i^2 = 0$, $e_i e_j = -e_j e_i$, $(e_i e_j) e_k + (e_j e_k) e_i + (e_k e_i) e_j = 0$ ekuivalen dengan $\alpha_{iik} = 0$, $\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}$ dan $\sum_{r=1}^{n} (\alpha_{ijr}\alpha_{rks} + \alpha_{jkr}\alpha_{ris} + \alpha_{kir}\alpha_{ris}) = 0$

($\Rightarrow$) Diketahui V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. $e_i^{\,2} = 0$, $(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0$ $\quad i, j, k, r = 1, 2, \ldots, n$.

Akan ditunjukkan : $\sum_{r=1}^{n}(\alpha_{ijr}\alpha_{rks} + \alpha_{jkr}\alpha_{ris} + \alpha_{kir}\alpha_{rjs}) = 0$

Misal $e_ie_j = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}e_r$, $e_je_k = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}e_r$, $e_ke_i = \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}e_r$

Bukti: $(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}e_r)e_k + (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}e_r)e_i + (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}e_r)e_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}(e_re_k) + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}(e_re_i) + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}(e_re_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks}e_s + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ris}e_s + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rjs}e_s = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ris} + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rjs})e_s = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}(\alpha_{ijr}\alpha_{rks} + \alpha_{jkr}\alpha_{ris} + \alpha_{kir}\alpha_{rjs}) = 0.$$

($\Leftarrow$) Diketahui: V *Non-Assosiatif Aljabar* atas lapangan F dengan basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. $\sum_{r=1}^{n}(\alpha_{ijr}\alpha_{rks} + \alpha_{jkr}\alpha_{ris} + \alpha_{kir}\alpha_{rjs}) = 0$

Akan ditunjukkan: $(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0 \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n$

Bukti: $\sum_{r=1}^{n}(\alpha_{ijr}\alpha_{rks} + \alpha_{jkr}\alpha_{ris} + \alpha_{kir}\alpha_{rjs}) = 0$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks} + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ris} + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rjs})e_s = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rks}e_s + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ris}e_s + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{rjs}e_s = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}(e_re_k) + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}(e_re_i) + \sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}(e_re_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{ijr}e_r)e_k + (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{jkr}e_r)e_i + (\sum_{r=1}^{n}\alpha_{kir}e_r)e_j = 0$$

$$(e_ie_j)e_k + (e_je_k)e_i + (e_ke_i)e_j = 0. \blacksquare$$

Definisi maupun teorema dari *Aljabar Assosiatif* dan *Aljabar Lie* telah diuraikannya yang sebagai pengantar dalam pembahasan berikutnya. Analog dengan teori grup, ring maupun struktur aljabar yang lain, grup memiliki subgrup, ring memiliki subring demikian pula dalam *Aljabar Lie* memiliki *subaljabar Lie*. Berikut akan didefinisikan tentang *subaljabar Lie*.

Definisi 4.2.6: Subaljabar *Lie*

Subruang H dari sebuah *Aljabar Lie* L dinamakan subaljabar *Lie* L jika H itu sendiri tertutup terhadap aksioma lie seperti : 1) $x^2 = 0$, 2) Identitas Jacobi, yaitu untuk $\forall$ x, y, z $\in$ H berlaku: $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$.

Salah satu permasalahan dalam penulisan ini yaitu pembentukan *Aljabar Lie* telah diuraikannya. Selanjutnya permasalahan tentang *Aljabar Lie* dari transformasi linear, berikut uraiannya.

4.3. *Aljabar Lie* dari Transformasi Linear

Aljabar Lie dari transformasi linear berdasar pada transformasi linear seperti dalam ruang vektor, akan tetapi dalam pembahasan ini transformasi linearnya berupa himpunan pada ruang vektor yang sama atau dirinya sendiri, berikut definisinya.

Definisi 4.3.1:

Diketahui V ruang vektor atas lapangan F dan T adalah himpunan transformasi linear dari V ke V. Didefinisikan penjumlahan, perkalian skalar dan perkalian vektor pada T seperti berikut T_1+T_2, $\alpha T_1, T_1T_2$ untuk $\forall T_1, T_2 \in T$, $\forall \alpha \in F$ sebagai berikut:

1. $(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x \qquad \forall x \in V$

2. $(\alpha T_1)x = \alpha(T_1x) \qquad \forall x \in V$

3. $(T_1T_2)x = T_1(T_2x) \qquad \forall x \in V$

Sifat 4.3.2:

Diketahui V ruang vektor atas lapangan F dan T adalah himpunan transformasi linear dari V ke V. Bahwa T merupakan ruang vektor relatif terhadap penjumlahan, perkalian skalar, perkalian bersifat assosiatif dan memenuhi operasi bilinear maka T adalah *Aljabar Assosaitif*.

Bukti:

I. Akan ditunjukkan T ruang vektor terhadap penjumlahan, perkalian skalar.

1. Jika $T_1, T_2 \in T$ maka $T_1+T_2 \in T$.

   a. Ambil sebarang $T_1, T_2 \in T$

   Akan ditunjukkan $T_1+T_2 \in T$ yaitu $T_1+T_2 : V \to V$ pemetaan linear. Karena $T_1, T_2 \in T$ maka $T_1: V \to V$ dan $T_2: V \to V$ masing-masing merupakan pemetaan linear.

   ii. Diambil sebarang $v \in V$.

   Diperoleh $(T_1+T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$.

   Karena $T_1(v) \in V$ dan $T_2(v) \in V$ maka $T_1(v) + T_2(v) \in V$.

   iii. Diambil sebarang $v_1, v_2 \in V$ dengan $v_1 = v_2$

   Diperoleh $(T_1+T_2)(v_1) = T_1(v_1) + T_2(v_1)$

$= T_1(v_2) + T_2(v_2)$

$= (T_1+T_2)(v_2)$

Jadi untuk setiap $v_1, v_2 \in V$ dengan $v_1 = v_2$ berlaku

$(T_1+T_2)(v_1) = (T_1+T_2)(v_2)$

Dari i. & ii. Diperoleh $T_1+T_2: V \rightarrow V$ pemetaan linear.

b. Akan ditunjukkan untuk setiap $v, w \in V$, berlaku

$(T_1+T_2)(v+w) = (T_1+T_2)(v) + (T_1+T_2)(w)$.

Diambil sebarang $v, w \in V$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
(T_1+T_2)(v+w) &= T_1(v+w) + T_2(v+w) \\
&= (T_1(v) + T_1(w)) + (T_2(v)+T_2(w)) \\
&= T_1(v) + (T_1(w) + T_2(v)) + T_2(w) \\
&= T_1(v) + (T_2(v) + T_1(w)) + T_2(w) \\
&= (T_1(v) + T_2(v)) + (T_1(w)+T_2(w)) \\
&= (T_1+T_2)(v) + (T_1+T_2)(w).
\end{aligned}$$

c. Akan ditunjukkan untuk setiap $v \in V$ & $\alpha \in F$ berlaku

$(T_1+T_2)(\alpha v) = \alpha (T_1+T_2)(v)$

Ambil sebarang $v \in V$. Diperoleh

$$\begin{aligned}
(T_1+T_2)(\alpha v) &= T_1(\alpha v) + T_2(\alpha v) \\
&= \alpha T_1(v) + \alpha T_2(v) \\
&= \alpha (T_1(v) + T_2(v))
\end{aligned}$$

$$(T_1+T_2)(\alpha v) = \alpha (T_1 + T_2)(v)$$

Dari a, b, dan c terbukti $T_1+T_2 \in T$.

2. Ambil sebarang T_1, $T_2 \in T$

   Akan ditunjukkan $T_1+T_2 = T_2+T_1$

   Ambil sebarang $v \in V$. Diperoleh

   $(T_1+T_2)(v) = T_1(v)+T_2(v)$

   $= T_2(v)+T_1(v)$

   $= (T_2+T_1)(v)$

   Jadi untuk setiap T_1, $T_2 \in T$ berlaku $T_1+T_2 = T_2+T_1$.

3. Ambil sebarang T_1, T_2, $T_3 \in T$

   Akan ditunjukkan $((T_1+T_2)+T_3)(v) = (T_1+(T2+T3))(v)$

   Diambil sebarang $v \in V$. Diperoleh

   $((T_1+T_2)+T_3)(v) = (T_1+T_2)(v) + T_3(v)$

   $= (T_1(v)+T_2(v)) + T_3(v)$

   $= T_1(v) + (T_2(v)+ T_3(v))$

   $= T_1(v) + (T_2+ T_3)(v)$

   $= (T_1+ (T_2+ T_3))(v)$

   Jadi terbukti $((T_1+T_2)+T_3)(v) = (T_1+(T2+T3))(v)$, untuk setiap $v \in V$.

4. Ambil sebarang T_0 dengan aturan untuk $\forall\, v \in V$ berlaku $T_0(v) = 0$

   a. Akan ditunjukkan $T_0 : V \rightarrow V$

      i. Diambil sebarang $v \in V$, diperoleh $T_0(v) = 0$. Karena $0 \in V$ maka untuk setiap $v \in V$, $T_0(v) \in V$

ii. Diambil sebarang $v, w \in V$ dengan v=w

Diperoeh $T_0(v) = 0 = T_0(w)$. Jadi Untuk setiap $v, w \in V$ dengan v=w berlaku $T_0(v) = T_0(w)$.

Dari i dan ii terbukti $T_0 : V \to V$.

b. Untuk setiap $v, w \in V$ berlaku $T_0(v+w) = 0 = 0+0 = T_0(v) + T_0(w)$

c. Untuk setiap $v \in V$ & $\alpha \in F$, berlaku $T_0(\alpha v) = 0 = \alpha 0 = \alpha T_0(v)$.

dari a, b dan c terbukti $T_0 \in T$.

Diambil sebarang $T_1 \in T$ dan sebarang $v \in V$. Diperoleh

$(T_0+T_1)(v) = T_0(v) + T_1(v)$

$= 0 + T_1(v) = T_1(v)$

Jadi untuk setiap $v \in V$, $(T_0+T_1)(v) = T_1(v)$ yaitu $T_0+T_1 = T_1$. Analognya $T_1+T_0= T_1$. Jadi T_0 elemen netral dalam penjumlahan.

5. Ambil sebarang $T_1 \in T$

a. Diambil aturan $-T_1$ dari V ke V dengan $(-T_1)(v) = -T_1(v)$, untuk setiap $v \in V$.

i. Diambil sebarang $v \in V$. Karena $T_1(v) \in V$ maka $-T_1(v) \in V$.

Diperoleh $(-T_1)(v) = -T_1(v) \in V$. Jadi untuk setiap $v \in V$ berlaku $-T(v) \in V$.

ii. Diambil sebarang $v, w \in V$ dengan v=w.

Diperoleh $(-T_1)$ (v) = $-T_1$(v) = $(-T_1)$(w) = $-T_1$(w). Jadi untuk setiap $v, w \in V$, jika v=w maka $(-T_1)$ (v) = $(-T_1)$(w).

Dari i dan ii terbukti bahwa $-T_1 : V \to V$ adalah pemetaan linear.

b. Untuk setiap $v, w \in V$ berlaku

$(-T_1)(v+w) = -T_1(v+w) = -(T_1(v)+T_1(w)) = -T_1(v) + -T_1(w)$

c. Untuk setiap $v \in V$ & $\forall \alpha \in F$, berlaku

$(-T_1)(\alpha v) = -(T_1(\alpha v)) = -(\alpha T_1(v)) = \alpha(-T_1(v))$

Dari a,b dan c terbukti $-T_1 \in T$.

Diambil sebarang $v \in V$. Diperoleh $(T_1+(-T_1))(v) = T_1(v) + (-T_1(v)) = 0 = T_0(v)$

Analognya $(-T_1) + T_1$. Jadi terbukti untuk setiap $T_1 \in T$, ada $-T_1 \in T$ sedemikian sehingga $T_1 + (-T_1) = (-T_1) + T_1 = T_0$

6. Ambil sebarang $\alpha \in F$ & $T_1 \in T$
   i. Diambil sebarang $v \in V$. Diperoleh $(\alpha T_1)(v) = \alpha T_1(v) \in V$

      Jadi untuk setiap $v \in V$ berlaku $(\alpha T_1)(v) \in V$
   ii. Diambil sebarang $v, w \in V$ dengan v=w. Diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\alpha T_1)(v) &= \alpha T_1(v) \\
&= \alpha T_1(w) \\
&= (\alpha T_1)(w)
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $v, w \in V$, jika v=w maka $(\alpha T_1)(v) = (\alpha T_1)(w)$. Dari i dan ii diperoleh $\alpha T_1 : V \to V$ yaitu $\alpha T_1 \in T$.

7. Diambil sebarang $\alpha_1, \alpha_2 \in F, T_1 \in T$ dan $v \in V$. Diperoleh

$$
\begin{aligned}
((\alpha_1 + \alpha_2)T_1)(v) &= (\alpha_1 + \alpha_2)\, T_1(v) \\
&= \alpha_1 T_1(v) + \alpha_2 T_1(v) \\
&= \alpha_2 T_1(v) + \alpha_1 T_1(v) \\
&= (\alpha_1 T_1)(v) + (\alpha_2 T_1)(v) \\
&= (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_1)(v)
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $v \in V$ berlaku $((\alpha_1 + \alpha_2)T_1)(v) = (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_1)(v)$. Dengan kata lain $(\alpha_1 + \alpha_2)T_1) = \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_1$.

8. Diambil sebarang $\alpha \in F$, $T_1, T_2 \in T$ dan $v \in V$. Diperoleh

$$
\begin{aligned}
(\alpha(T_1 + T_2))(v) &= \alpha((T_1 + T_2))(v) \\
&= \alpha(T_1(v) + T_2(v)) \\
&= \alpha T_1(v) + \alpha T_2(v) \\
&= (\alpha T_1 + \alpha T_2)(v)
\end{aligned}
$$

Jadi untuk setiap $v \in V$ berlaku $(\alpha(T_1 + T_2))(v) = (\alpha T_1 + \alpha T_2)(v)$. Dengan kata lain $\alpha(T_1 + T_2) = (\alpha T_1) + (\alpha T_2)$.

9. Diambil sebarang $\alpha_1, \alpha_2 \in F, T_1 \in T$ dan $v \in V$. Diperoleh

$$((\alpha_1 \alpha_2)T_1)(v) = (\alpha_1 \alpha_2)T_1(v)$$

$((\alpha_1\alpha_2)\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}) = \alpha_1(\alpha_2\mathrm{T}_1(\mathrm{v}))$

$((\alpha_1\alpha_2)\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}) = \alpha_1((\alpha_2\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}))$

$((\alpha_1\alpha_2)\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}) = (\alpha_1(\alpha_2\mathrm{T}_1))(\mathrm{v})$

Jadi untuk setiap $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ berlaku $((\alpha_1\alpha_2)\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}) = (\alpha_1(\alpha_2\mathrm{T}_1))(\mathrm{v})$.Dengan kata lain $(\alpha_1\alpha_2)\mathrm{T}_1 = \alpha_1(\alpha_2\mathrm{T}_1)$.

10. Diambil sebarang $\mathrm{T}_1 \in \mathrm{T}$ dan $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$.Diperoleh $(1\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}) = 1(\mathrm{T}_1(\mathrm{v})) = \mathrm{T}_1(\mathrm{v})$. Jadi untuk setiap $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$ berlaku $(1\mathrm{T}_1)(\mathrm{v}) = \mathrm{T}_1(\mathrm{v})$.

Berdasarkan uraian 1- 10, terbukti bahwa T ruang vektor terhadap penjumlahan dan perkalian skalar. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa T memenuhi perkalian bersifat assosiatif dan bilinear.

II. Akan dibuktikan bahwa T memenuhi perkalian bersifat assositif dan bilinear.

a. Diambil sebarang T_1, T_2, $\mathrm{T}_3 \in \mathrm{T}$ dan $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$. Diperoleh

$$
\begin{aligned}
((\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2)\mathrm{T}_3)(\mathrm{v}) &= (\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2)(\mathrm{T}_3(\mathrm{v})) \\
&= \mathrm{T}_1(\mathrm{T}_2(\mathrm{T}_3(\mathrm{v})) \\
&= \mathrm{T}_1((\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3)(\mathrm{v})) \\
&= (\mathrm{T}_1((\mathrm{T}_2\mathrm{T}_3))(\mathrm{v})
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti perkalian assosiatif untuk setiap $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$.

b. Diambil sebarang $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{F}$, $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3 \in \mathrm{T}$ dan $\mathrm{v} \in \mathrm{V}$. Diperoleh

$$((\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)T_3(v) = (\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)(T_3(v))$$

$$= (\alpha_1 T_1)(T_3(v)) + (\alpha_2 T_2)(T_3(v))$$

$$= \alpha_1(T_1(T_3(v)) + \alpha_2(T_2(T_3(v))$$

$$= \alpha_1(T_1T_3)(v) + \alpha_2(T_2T_3)(v) \ .$$

Diperoleh $(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2)T_3 = \alpha_1(T_1T_3) + \alpha_2(T_2T_3)$. Analognya untuk $T_1(\alpha_1 T_2 + \alpha_2 T_3) = \alpha_1(T_1T_2) + \alpha_2(T_1T_3)$.

Dari a dan b terbukti perkalian bilinear. Berdasarkan uraian dari I dan II, terbukti T merupakan *Aljabar Assosiatif*.

Sedemikan sehingga T merupakan *Aljabar Assosiatif* pada transformasi linear dalam ruang vektor V atas lapangan F.

Teorema 4.3.3:

Jika S={e_1, e_2, ….,e_m}, m < ∞ adalah basis V atas lapangan F, maka transformasi linear E_{ij} sedemikian sehingga $e_i E_{ij} = e_j$, $e_r E_{ij} = 0$, $r \neq i, i, j = 1,2,.....m,$ basis T berdimensi m^2 atas lapangan F.

Bukti:

Diketahui: S={e_1, e_2, ….,e_m}, m < ∞ adalah basis V atas lapangan F, artinya S bebas linear dan S merentang V. S dikatakan bebas linear apabila membentuk persamaan seperti: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + ... + \alpha_m e_m = 0$, untuk $\forall \alpha_m \in \mathrm{F}$, $\alpha_{\mathrm{m}} = 0$.

S dikatakan merentang T artinya $\forall \mathrm{v} \in \mathrm{V}$, $\mathrm{v} = k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3 + ... + k_m e_m$

Akan ditunjukkan: transformasi linear E_{ij} sedemikian sehingga $e_i \mathrm{E}_{ij} = e_j$, $e_r \mathrm{E}_{ij} = 0$, $r \neq i, i, j = 1,2,.....m$, basis T berdimensi m^2 atas lapangan F.

Penyelesaian:

a. Transformasi linear E_{ij} sedemikian sehingga $e_i \mathrm{E}_{ij} = e_j$, $e_r \mathrm{E}_{ij} = 0$, $r \neq i, i, j = 1,2,.....m$, bebas linear,

berdasarkan yang diketahui E_{ij} dapat dibentuk suatu persamaan seperti:

$$\alpha_1 E_{11} + \alpha_2 E_{12} + \alpha_3 E_{13} + ... + \alpha_m E_{1m} + \alpha_{m+1} E_{21} + \alpha_{m+2} E_{22} + \alpha_{m+3} E_{23} + ... + \alpha_{2m} E_{2m} + \alpha_{2m+1} E_{31} + \alpha_{2m+2} E_{32} + \alpha_{2m+3} E_{33} + ... + \alpha_{3m} E_{3m} + ... + \alpha_{m^2} E_{m^2} = 0$$

……….(i)

Jika mengambil e_1 maka persamaan (i) diperoeh sebagai berikut:

$$\alpha_1 e_1 E_{11} + \alpha_2 e_1 E_{12} + \alpha_3 e_1 E_{13} + ... + \alpha_m e_1 E_{1m} + \alpha_{m+1} e_1 E_{21} + \alpha_{m+2} e_1 E_{22} + \alpha_{m+3} e_1 E_{23} + ... + \alpha_{2m} e_1 E_{2m} + \alpha_{2m+1} e_1 E_{31} + \alpha_{2m+2} e_1 E_{32} + \alpha_{2m+3} e_1 E_{33} + ... + \alpha_{3m} e_1 E_{3m} + ... + \alpha_{m^2} e_1 E_{m^2} = 0$$

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + ... + \alpha_m e_m + 0 + 0 + 0 + 0 + ... + 0 + 0 + 0 + 0 + ... + 0 + ... + 0 = 0$$

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + ... + \alpha_m e_m = 0 \quad (1)$$

Jika mengambil e_2 maka persamaan (i) diperoeh sebagai berikut:

$$\alpha_1 e_2 E_{11} + \alpha_2 e_2 E_{12} + \alpha_3 e_2 E_{13} + \ldots + \alpha_m e_2 E_{1m} + \alpha_{m+1} e_2 E_{21} + \alpha_{m+2} e_2 E_{22} + \alpha_{m+3} e_2 E_{23} + \ldots + \alpha_{2m} e_2 E_{2m} + \alpha_{2m+1} e_2 E_{31} + \alpha_{2m+2} e_2 E_{32} + \alpha_{2m+3} e_2 E_{33} + \ldots + \alpha_{3m} e_2 E_{3m} + \ldots + \alpha_{m^2} e_2 E_{m^2} = 0$$

$$0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \alpha_{m+1} e_1 + \alpha_{m+2} e_2 + \alpha_{m+3} e_3 + \ldots + \alpha_{2m} e_{2m} + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots + 0 = 0$$

$$\alpha_{m+1} e_1 + \alpha_{m+2} e_2 + \alpha_{m+3} e_3 + \ldots + \alpha_{2m} e_{2m} = 0 \quad (2)$$

Jika mengambil e_3 maka persamaan (i) diperoeh sebagai berikut:

$$\alpha_1 e_3 E_{11} + \alpha_2 e_3 E_{12} + \alpha_3 e_3 E_{13} + \ldots + \alpha_m e_3 E_{1m} + \alpha_{m+1} e_3 E_{21} + \alpha_{m+2} e_3 E_{22} + \alpha_{m+3} e_3 E_{23} + \ldots + \alpha_{2m} e_3 E_{2m} + \alpha_{2m+1} e_3 E_{31} + \alpha_{2m+2} e_3 E_{32} + \alpha_{2m+3} e_3 E_{33} + \ldots + \alpha_{3m} e_3 E_{3m} + \ldots + \alpha_{m^2} e_3 E_{m^2} = 0$$

$$0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0 + + \ldots + 0 + \alpha_{2m+1} e_1 + \alpha_{2m+2} e_2 + \alpha_{2m+3} e_3 + \ldots + 0 + \ldots + 0 = 0$$

$$\alpha_{2m+1} e_1 + \alpha_{2m+2} e_2 + \alpha_{2m+3} e_3 + \ldots + \alpha_{3m} e_m = 0 \quad (3)$$

Jika mengambil e_m maka persamaan (i) diperoeh sebagai berikut:

$$\alpha_1 e_m E_{11} + \alpha_2 e_m E_{12} + \alpha_3 e_m E_{13} + \ldots + \alpha_m e_m E_{1m} + \alpha_{m+1} e_m E_{21} + \alpha_{m+2} e_m E_{22} + \alpha_{m+3} e_m E_{23} + \ldots + \alpha_{2m} e_m E_{2m} + \alpha_{2m+1} e_m E_{31} + \alpha_{2m+2} e_m E_{32} + \alpha_{2m+3} e_m E_{33} + \ldots + \alpha_{3m} e_m E_{3m} + \ldots + \alpha_{m^2} e_m E_{m^2} = 0$$

$$0+0+0+\ldots+0+0+0+0+\ldots+0+0+0+0+\ldots+0+\ldots+\alpha_{m^2} e_m = 0$$

$$\alpha_{m^2} e_m = 0 \quad (4)$$

Dari (1), (2), (3) dan (4) dapat di peroleh persamaan sebagai berikut:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \ldots + \alpha_m e_m = 0$$

$\alpha_{m+1}e_1 + \alpha_{m+2}e_2 + \alpha_{m+3}e_3 + \ldots + \alpha_{2m}e_{2m} = 0$

$\alpha_{2m+1}e_1 + \alpha_{2m+2}e_2 + \alpha_{2m+3}e_3 + \ldots + \alpha_{3m}e_m = 0$

$\alpha_{m^2}e_m = 0$

Karena $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, m < ~ adalah basis V atas lapangan F, jadi

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_m = 0$,

$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \alpha_{m+3} = \ldots = \alpha_{2m} = 0$,

$\alpha_{2m+1} = \alpha_{2m+2} = \alpha_{2m+3} = \ldots = \alpha_{3m} = 0$,

$\alpha_{m^2} = 0$

Uraian hal di atas dapat diambil kesimpulan bahwa transformasi linear E_{ij} bebas linear. Selanjutnya akan dibuktikan transformasi linear E_{ij} merentang T, berikut penyelesaiannya.

b. Transformasi linear E_{ij} sedemikian sehingga $e_i E_{ij} = e_j$, $e_r E_{ij} = 0$, $r \neq i, i, j = 1,2,\ldots..m$, merentang T.

Akan ditunjukkan E_{ij} merentang T, berikut penyelesaiannya:

$e_1\tau = k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 + \ldots + k_me_m$

$e_2\tau = k_{m+1}e_1 + k_{m+2}e_2 + k_{m+3}e_3 + \ldots + k_{2m}e_m$

$e_3\tau = k_{2m+1}e_1 + k_{2m+2}e_2 + k_{2m+3}e_3 + \ldots + k_{3m}e_m$

$e_m\tau = k_{m^2}e_m$

$$(e_1+e_2+e_3+...+e_m)\tau = k_1{'}e_1+k_2{'}e_2+k_3{'}e_3+...+k_m{'}e_m$$

$$(e_1+e_2+e_3+...+e_m)\tau = (k_1e_1+k_{m+1}e_1+k_{2m+1}e_1+...+0)+(k_2e_2+k_{m+2}e_2+ k_{2m+2}e_2+...+0)+(k_3e_3+k_{m+3}e_3+k_{2m+3}e_3+...+0) +...+ (k_me_m+k_{2m}e_m+k_{3m}e_m+...+k_{m^2}e_{m^2})$$

$$(e_1+e_2+e_3+...+e_m)\tau = (k_1e_1+k_2e_2+k_3e_3+...+k_me_m)+(k_{m+1}e_1+k_{m+2}e_2+ k_{m+3}e_3+...+k_{2m}e_m)+(k_{2m+1}e_1+k_{2m+2}e_2+k_{2m+3}e_3+ ...+k_{3m}e_m)+....+k_{m^2}e_{m^2}$$

$$(e_1+e_2+e_3+...+e_m)\tau = (e_1+e_2+e_3+...+e_m)\{(k_1+k_2+k_3+...+k_m)+ (k_{m+1}+k_{m+2}+k_{m+3}+...+k_{2m})+(k_{2m+1}+k_{2m+2}+ k_{2m+3}+...+ k_{3m})+....+(k_{m^2}e_m)\}$$

$$(e_1+e_2+e_3+...+e_m)\tau = (e_1+e_2+e_3+...+e_m)\{(k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{13}+... +k_mE_{1m})+(k_{m+1}E_{21}+ k_{m+2}E_{22}+k_{m+3}E_{23}+...+ k_{2m}E_{2m})+(k_{2m+1}E_{31}+k_{2m+2}E_{32}+k_{2m+3}E_{33}+...+ k_{3m}E_{3m})+....+(k_{m^2}E_{m^2})\}$$

$$\tau = k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{13}+...+k_mE_{1m}+k_{m+1}E_{21}+ k_{m+2}E_{22}+k_{m+3}E_{23}+...+ k_{2m}E_{2m}+k_{2m+1}E_{31}+k_{2m+2}E_{32}+k_{2m+3}E_{33}+...+ k_{3m}E_{3m}+....+k_{m^2}E_{m^2}$$

Jadi terbukti untuk $\forall \tau \in \mathrm{T}$ dapat dibentuk suatu kombinasi linear seperti:

$$\tau = k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{13}+...+k_mE_{1m}+k_{m+1}E_{21}+k_{m+2}E_{22}+k_{m+3}E_{23}+...+ k_{2m}E_{2m}+k_{2m+1}E_{31}+k_{2m+2}E_{32}+k_{2m+3}E_{33}+...+k_{3m}E_{3m}+...+k_{m^2}E_{m^2}.$$

Dari a. dan b. terbukti basis T berdimensi m^2 atas lapangan F.

Pembahasan selanjutnya tentang teorema basis dalam aljabar dari matriks transformasi linear.

Teorema 4.3.4:

Diberikan S={e_1, e_2, ….,e_m} adalah basis V atas lapangan F dan T adalah himpunan transformasi linear dari V ke V. Jika $A \in T$ maka dapat dituliskan $e_i A = \sum_j \alpha_{ij} e_j \quad i = 1,2,....,m,$ dan $(\alpha) = (\alpha_{ij})$ merupakan matriks A relatif terhadap basis (e_i). Korespondensi $A \mapsto (\alpha)$ adalah isomorfis dari T pada aljabar F_m, dengan $F_m = \{(\alpha_{ij}) | \alpha_{ij} \in F,\ i, j = 1,2,...,m\}$.

Bukti:

Diketahui S={e_1, e_2, ….,e_m} adalah basis V atas lapangan F & T adalah himpunan transformasi linear dari V ke V. Diketahui $A \in T$ dan $(\alpha) = (\alpha_{ij})$ merupakan matriks A relatif terhadap basis (e_i). Dibentuk : $\delta : T \to F_m$

$$A \mapsto \alpha = (\alpha_{ij})$$

Akan ditunjukkan δ adalah isomorfis dari T pada aljabar F_m dengan $F_m = \{(\alpha_{ij}) | \alpha_{ij} \in F,\ i, j = 1,2,...,m\}$.

Penyelesaian :

a. Akan ditunjukkan δ merupakan pemetaan,

Ambil sebarang $A,B \in T$ dengan A=B maka diperoleh

$$e_i\mathrm{A} = e_i\mathrm{B}$$

$$\sum_{j}^{m} \alpha_{ij} e_j = \sum_{j}^{m} \beta_{ij} e_j$$

$$\sum_{j}^{m} \alpha_{ij} e_j - \sum_{j}^{m} \beta_{ij} e_j = 0$$

$$\sum_{j}^{m} (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) e_j = 0$$

$\alpha_{ij} - \beta_{ij} = 0$ untuk $\forall i, j = 1,2,\ldots,m$.

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij}$$

$$(\alpha_{ij}) = (\beta_{ij})$$

$$\delta(\mathrm{A}) = \delta(\mathrm{B})$$

maka terbukti bahwa δ pemetaan.

b. Akan ditunjukkan δ isomorfis dari T aljabar F_m

   i. Ambil sebarang $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{T}$, $\alpha_{ij} \in \mathrm{F}$ $i, j = 1,2,\ldots,m,$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\delta(\mathrm{A}+\mathrm{B}) &= (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \\ &= (\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) \\ &= \delta(\mathrm{A}) + \delta(\mathrm{B})\end{aligned}$$

Ambil sebarang A $\in$ T, $k \in F$ maka akan diperoleh

$$\delta(k\mathrm{A}) = (k\alpha_{\mathrm{ij}})$$

$$= k(\alpha_{ij})$$

$$= k\delta(\mathrm{A})$$

dari i terbukti δ homomorfisma.

ii. δ pemetaan injektif

$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{T}, \quad \delta(\mathrm{A}) = \delta(\mathrm{B})$ maka A=B

Ambil sebarang A,B $\in$ T maka diperoleh

$$\delta(\mathrm{A}) = \delta(\mathrm{B})$$

$$(\alpha_{ij}) = (\beta_{ij})$$

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \qquad \text{untuk } \forall i, j = 1,2,\ldots,m$$

$$\left(\sum_{j}^{m} \alpha_{ij} e_j\right) = \left(\sum_{j}^{m} \beta_{ij} e_j\right)$$

$$(e_i\mathrm{A}) = (e_i\mathrm{B})$$

$$\mathrm{A}=\mathrm{B}$$

jadi δ pemetaan injektif.

iii. δ pemetaan surjektif

$(\forall \alpha \in \mathrm{F_m})(\exists \mathrm{A} \in \mathrm{T})$ maka $\alpha = \delta(\mathrm{A})$

Ambil sebarang $(\alpha) \in F_m$ maka $(\alpha) = (\alpha_{ij})$ dengan $\alpha_{ij} \in F$ $i, j = 1,2,...., m,$

diperoleh $(\alpha) = (\alpha_{ij})$

$= \delta(A)$ untuk suatu $A \in T$

Jadi terbukti δ pemetaan surjektif.

Dari i, ii dan iii terbukti bahwa $T \cong F_m$.

Aljabar Lie memiliki subaljabar *Lie*, demikian dengan aljabar dari transformasi linear memilki subaljabar dari transformasi linear yaitu setiap subaljabar M pada T merupakan subruang pada T yang tertutup terhadap perkalian. Teorema selanjutnya tentang *Aljabar Assosiatif* yang homomorfisma dari transformasi linear dalam ruang vektor .

Teorema 4.3.5:

Jika V *Non Assosiatif Aljabar* dan $a \in V$ maka pemetaan $a_R : V \to V$ yang memetakan x ke xa adalah transforrnasi linear. Jika V *Aljabar Assosiatif* maka $\phi : V \to T$ yang memetakan $a \to a_R$ adalah homomorfisma dari transformasi linear dalam ruang vektor V.

Bukti:

Diketahui: V *Non Assosiatif Aljabar* dan $a \in V$,

Akan ditunjukkan:

a. $a_R : x \to xa$ adalah transformasi linear.

b. Akan ditunjukkan $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{T}$ yang memetakan $a \to a_R$ adalah homomorfisma.

$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ $\phi(\alpha \mathrm{a}) = \alpha\phi(a)$ dan jika V assosiatif $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

Penyelesaiannya:

a. $a_R : x \to xa$ adalah transformasi linear.

i. Ambil sebarang $x_1, x_2 \in \mathrm{V}$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
a_R(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2)a \\
&= (x_1 a + x_2 a) \\
&= (x_1 a) + (x_2 a) \\
&= a_R(x_1) + a_R(x_2).
\end{aligned}
$$

ii. Ambil sebarang $\alpha \in \mathrm{F} \,\&\, x_1 \in \mathrm{V}$ maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
a_R(\alpha x_1) &= (\alpha x_1)a \\
&= \alpha(x_1 a) \\
&= \alpha a_R(x_1).
\end{aligned}
$$

Dari i dan ii terbukti $a_R : x \to xa$ adalah transformasi linear.

b. Akan ditunjukkan $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{T}$ yang memetakan $a \to a_R$ adalah homomorfisma

$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ $\phi(\alpha \mathrm{a}) = \alpha\phi(a)$ dan jika V assosiatif $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

i. Akan dibuktikan $\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)$.

Ambil sebarang $x \in \mathrm{V}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= (x)(a+b)\\ &= (xa+xb)\\ &= a_R(x)+b_R(x)\\ &= a_R+b_R\\ &= \phi(a)+\phi(b).\end{aligned}$$

ii. Akan dibuktikan $\phi(\alpha \mathrm{a})=\alpha\phi(a)$.

Ambil sebarang $\alpha \in \mathrm{F}$ dan $x \in \mathrm{V}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(\alpha \mathrm{a}) &= (x)(\alpha a)\\ &= \alpha(xa)\\ &= \alpha(a_R)\\ &= \alpha\phi(a).\end{aligned}$$

iii. jika V assosiatif $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)$.

Ambil sebarang $x \in \mathrm{V}$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= (x)(ab)\\ &= (xa)(xb)\\ &= a_R b_R\end{aligned}$$

$$= \phi(a)\phi(b).$$

Maka $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{T}$ yang memetakan $a \to a_R$ adalah homomorfisma dari transformasi linear dalam ruang vektor V.■

Pembahasan *Aljabar Lie* dari transformasi linear telah diuraikan mulai dari definisi, sifat maupun teorema maka penulis akan menyimpulkan permasalahannya dalam bab V.