PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN METODE SUCCESSIVE APPROXIMATION

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

diajukan oleh

Affan Fauzi
04610009

Kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UIN SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2011

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Affan Fauzi
NIM	: 04610009
Judul Skripsi	: Penyelesaian Persamaan Differensial dengan Metode *Successive Approximation*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Bidang Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wssalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 13 April 2011
Pembimbing I

M. Wakhid Musthofa, M.Si
NIP:19800402200501 1 003

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Pengajuan Munaqosyah
Lamp : -

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama	: Affan Fauzi
NIM	: 04610009
Judul Skripsi	: Penyelesaian Persamaan Differensial dengan Metode *Successive Approximation*

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Bidang Matematika

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wssalamu'alaikum wr. wb.

Yogyakarta, 18 Mei 2011
Pembimbing II

Sugiyanto, M.Si
NIP. 19800505200801 1 028

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-07/R0

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1097/2011

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul	:	Penyelesaian Persamaan Differensial Dengan Metode *Successive Approximation*
Yang dipersiapkan dan disusun oleh	:	
Nama	:	Affan Fauzi
NIM	:	04610009
Telah dimunaqasyahkan pada	:	10 Juni 2011
Nilai Munaqasyah	:	B +

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji I

Pipit Pratiwi Rahayu, M.Sc

Penguji II

Dra. Endang Sulistyowati
NIP. 19670414 199903 2 001

Yogyakarta, 20 Juni 2011
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

KEMENTERIAN AGAMA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI YOGYAKARTA UIN SUNAN KALIJAGA

Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 10 Mei 2011

METERAI TEMPEL

FC869AAF404738004

ENAM RIBU RUPIAH

6000 DJP

Affan Fauzi

04610009

PERSEMBAHAN

Dengan segala rasa syukurku atas nikmat dan karunia Nya

Kupersembahkan skripsi ini untuk orang-orang yang sangat

Kusayangi dan kucintai

(Ayah dan Ibu yang Tercinta)

Yang dengan tulus iklas dan penuh kesabaran telah membesarkan, mendidik, membimbing, serta mendoakan setiap langkahku. Di telapak tangan dan dadamu mengalir kasih sayang dan kehangatan. Walaupun engkau berada di atas sana (ayah) aku yakin engkau tetap melindungi dan melihatku di bumi ini. Anakmu mengucapkan matur sembah nuwun, semoga rahmat dan hidayah Allah selalu bersama Ayah dan Ibu.

Kakakku

(mas Divan dan mbak Fifi)

Terima kasih atas segala kritik, saran, perhatian dan sumbangan dana yang telah mengantarku sampai mencapai gelar sarjana. Kalian merupakan kakak yang baik dan terbaik.

Sobatku

(Ahdiyat, Amru, Arif, Coco, Haris, Samsul dan Roni)

Terima kasih atas bantuan dan dorongan yang telah diberikan selama aku berada di perantauan ini.

MOTTO

Aku tak pernah tau dan senantiasa berfikir tentang rahasia-rahasia alam, tentang kenyataan hidup yang menyimpan sejuta misteri di setiap kehadiran dan di balik apa yang terjadi. Yang sedemikian tak pernah terlintas ada dalam khayalan, dan akhirnya harus kualami, mengalir menuju samudra bersama jiwa-jiwa yang lain dengan senantiasa berharap dan menemukan apa saja yang kuharap itu adalah kebaikan………

Keadaan akhirnya memberiku banyak pelajaran tentang kesetiaan, persahabatan, tentang janji dan kepastian……..

- *Ada orang yang masuk dalam hidup kita dan berlalu dengan cepatnya. Ada yang tinggal beberapa lama dan meninggalkan jejak dalam hati kita. Dan diri kita pun tak akan pernah sama seperti sebelumnya.*
- *Bersahabat dengan seseorang itu membutuhkan banyak pengertian, waktu dan rasa percaya. Dengan semakin dekatnya masa hidupku yang tak pasti, teman-temanku adalah hartaku yang paling " BERHARGA"*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Segala puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT dengan segala Asma yang telah menciptakan keberadaan. Terima kasih untuk petunjuk jalan hidup yang telah Engkau berikan. Allah SWT tercinta yang senantiasa melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga skripsi yang berjudul “Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Metode *Successive Approximation*” ini dapat penulis selesaikan.

Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada junjungan kita, Nabi Muhammad SAW yang akan memberikan syafa’atnya di yaumul akhir serta keluarga, sahabat, dan seluruh umat yang mencintainya.

Akhirnya setelah begitu panjangnya penulis menempuh ilmu, dengan segala lika-likunya, penulis dapat menyelesaikan proses akhir dari studi. Kenyataan ini semua tentunya tidak terlepas dari keikutsertaan banyak pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih yang setulus-tulusnya kepada:

1. Rektor UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. M. Wakhid Musthafa, M.Si. selaku Pembimbing I, yang telah memberikan motivasi, bimbingan serta arahan dengan penuh kesabaran kepada penulis.

5. Sugiyanto, M.Si. selaku Pembimbing II, yang telah memberikan motivasi, bimbingan serta arahan dengan penuh kesabaran kepada penulis.
6. Bapak dan Ibuku, yang senantiasa merebakkan keharuman do'anya sehingga terbukanya tirai-tirai kehidupan terima kasih atas dukungan tanpa syaratnya.
7. Kakakku Divan dan Fifi, terima kasih atas segala kritik, saran, dan perhatiannya.
8. Sahabat-sahabat terbaikku (Ahdiyat, Amru, Arif, Coco, Haris, Samsul dan Roni) yang selalu menemani penulis dan berdialektika bersama. semoga tali silaturrahmi kita selalu terjaga.
9. Teman-temanku di Matematika '04, terima kasih atas semua jasa baik kalian, Sukses buat kalian.

Akhirnya, penulis berharap semoga penelitian ini berguna dan digunakan dengan semestinya.

Yogyakarta, 18 Mei 2011

Penyusun

Affan Fauzi

04610009

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL DENGAN METODE *SUCCESSIVE APPROXIMATION*

Oleh :

Affan Fauzi

NIM. 04610009

Persamaan differensial merupakan salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak digunakan dalam menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, dan atau persamaan itu mungkin juga melibatkan fungsi itu sendiri dan konstanta. Beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan differensial seperti metode analitik, metode kualitatif, dan metode numerik. Metode *successive approximation* atau juga dikenal dengan metode iterasi picard merupakan salah satu dari metode numerik.

Metode *successive approximation* merupakan metode yang proses iterasinya tidak hanya solusi approksimasi tetapi pada fungsinya juga. Langkah awal dalam proses pengerjaan metode *successive approximation* adalah membuat terkaan awal di sebuah solusi. Penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode *successive approximation* menghasilkan nilai yang mendekati *exact* (tepat).

Kata kunci : *persamaan differensial, metode numerik, dan successive approximation.*

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang konsep dasarnya digunakan untuk pengembangan ilmu-ilmu yang lain. Matematika senantiasa dikaji dan dikembangkan agar dapat dimanfaatkan di dalam aspek penerapannya. Beberapa masalah dalam dunia nyata dapat lebih mudah dimengerti dengan menggunakan pendekatan matematika. Salah satu kajian matematika yang konsep-konsepnya banyak digunakan dalam bidang lain adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial sangat penting dan banyak digunakan karena dapat mengungkapkan berbagai gejala perubahan dalam bahasa matematika. Persamaan diferensial menjadi salah satu alat utama dari matematika untuk memahami hukum-hukum alam. Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan fungsi yang belum diketahui, dan atau persamaan itu mungkin juga melibatkan fungsi itu sendiri dan konstanta (Dennis G. Zill, 2005).

Persamaan ini diperkenalkan pertama kali oleh Leibniz pada tahun 1676. Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematika. Sebagai contoh, turunan-turunan dalam fisika muncul sebagai kecepatan dan percepatan sedangkan dalam geometri sebagai kemiringan.

Persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa *(ordinary differential equation)* dan persamaan diferensial parsial *(partial differential equation)*. Persamaan diferensial biasa didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui dengan satu peubah bebas. Sedangkan persamaan diferensial parsial didefinisikan sebagai suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi yang tidak diketahui dengan dua atau lebih peubah bebas.

Beberapa metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial seperti metode analitik yaitu metode yang menghasilkan dua solusi bentuk eksplisit dan implisit, yang dicari melalui teknik deduktif analogis dengan menggunakan konsep-konsep matematika. Metode kualitatif yaitu solusi yang hanya dapat memberikan gambaran secara geometris bagaimana visualisasi dari solusi persamaan diferensial biasa. Metode numerik yaitu solusi yang menghasilkan suatu hampiran (pendekatan) berdasarkan pada prinsip-prinsip aproksimasi (FMIPA UNILA, 2006).

Penulisan ini akan menyajikan dalam bentuk metode numerik dikarenakan tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah. Bahkan dalam prinsip matematika, dalam memandang permasalahan, yang terlebih dahulu diperhatikan apakah permasalahan tersebut mempunyai penyelesaian atau tidak. Hal ini menjelaskan bahwa tidak semua permasalahan dapat diselesaikan dengan menggunakan perhitungan biasa. Dengan dasar tersebut, meskipun metode tersebut tidak dapat menghasilkan nilai yang *exact* (tepat), setidak-tidaknya sudah mendekati nilai (pendekatan) yang diharapkan.

Penulisan penelitian ini akan membahas beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa, dengan penekanan pada masalah nilai awal. Suatu masalah nilai awal yang merupakan model matematika dari kehidupan nyata akan mempunyai penyelesaian (eksistensi) dan memungkinkan hanya terdapat satu penyelesaian (ketunggalan). Suatu masalah nilai awal $y(x_0) = y_0$ dan persamaan $y' = f(x, y_n)$ mungkin terdapat tepat hanya satu penyelesaian atau tidak. Oleh karena itu, teorema eksistensi dan ketunggalan akan memberikan suatu kondisi dalam masalah nilai awal yang menyebutkan bahwa hanya terdapat tepat satu penyelesaian. Suatu masalah nilai awal yang mempunyai penyelesaian tunggal dapat menggunakan metode apapun untuk mendapatkan penyelesaian.

Metode *succesive approximation* merupakan metode yang tanpa melalui tahap prediktor yakni untuk menentukan nilai awal dan korektor yakni untuk menentukan nilai baru yang sekaligus langkah akhir dari pengerjaan suatu metode, serta proses iterasi tidak hanya solusi approksimasi $y_n(x)$ tetapi pada fungsi $f(x, y_n)$ (Wylie C. Ray, 2006). Hal ini yang membedakan dengan metode *single*-step maupun metode *multistep*, namun mengasumsikan $y(x_0) = y_0$ sebagai perkiraan pertama atau *terkaan awal* $y_0(x) = y_0$ untuk memulai proses pengerjaan metode *successive approximation.*

Metode selanjutnya dikembangkan sebagai suatu proses penggantian atau iterasi-iterasi, sehingga menghasilkan barisan y_1, y_2, y_3, … yang diharapkan dapat mendekati solusi dimana perkiraan ini memusat pada suatu fungsi yang tidak lain adalah penyelesaian eksak. Oleh sebab itu, penulisan ini menggunakan metode *successive approximation* untuk menyelesaikan masalah nilai awal pada persamaan diferensial biasa.

B. Batasan Masalah

Agar ruang lingkup masalah tidak meluas, maka penulis perlu memberi batasan, yaitu :

1. Persamaan yang digunakan adalah persamaan diferensial biasa.
2. Metode penyelesaian menggunakan metode numerik.
3. Menggunakan persamaan diferensial biasa dengan penekanan pada masalah nilai awal.
4. Bagaimana menyelesaikan suatu masalah nilai awal pada persamaan diferensial dengan metode *successive approximation*.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka perumusan masalah yang akan dikaji oleh penulis dalam penelitian ini adalah :

1. Menyelediki apakah penyelesaian suatu masalah nilai awal memiliki solusi tunggal.
2. Bagaimana penyelesaian masalah nilai awal pada persamaan diferensial dengan metode *successive approximation*?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengetahui penyelesaian suatu masalah nilai awal memiliki solusi tunggal.
2. Mengetahui penyelesaian masalah nilai awal pada persamaan diferensial dengan metode *successive approximation*.

E. Manfaat Penelitian

1. Bagi Peneliti

Penulisan ini diharapkan memberi wawasan dan pengetahuan tentang persamaan diferensial dan penyelesaiannya. Khususnya penyelesaian masalah nilai awal dengan menggunakan metode *successive approximation.*

2. Bagi Akademisi

Penulisan ini semoga dapat memberikan sumbangsih keilmuan bidang matematika bagi mahasiswa matematika di Fakultas Sains dan Teknologi khususnya dan mahasiswa Indonesia umumnya.

Langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal dengan menggunakan metode *succesive approximation*, antara lain:

1. Identifikasi persamaan. Mengingat bahwa metode pendekatan beruntun *(succesive approximation)* digunakan pada persamaan diferensial orde satu, maka untuk order dua atau order tinggi persamaan diferensial tersebut dapat direduksi ke persamaan order satu, persamaan diferensial serentak tingkat satu, atau sistem persamaan order satu jika memungkinkan.
2. Menyelidiki apakah persamaan diferensial yang diberikan memiliki solusi tunggal atau tidak. Tujuannya adalah untuk menjamin bahwa penyelesaian yang diperoleh merupakan satu-satunya penyelesaian persamaan tersebut.
3. a. Jika pada langkah kedua tidak terpenuhi maka metode *successive approksimation* tidak dapat dipergunakan karena proses perhitungannya yang beruntun dan menjalar sepanjang titik yang melalui satu kurva tersebut.

   b. Jika pada langkah kedua terpenuhi, dan solusinya tunggal. Langkah selanjutnya, menentukan y, dan memilih t_0 sebagai terkaan awal untuk solusi yang sebenarnya, terkaan awal t_0 ini merupakan awal dari proses metode ini yang berfungsi untuk memperoleh penyelesaian dan titik tersebut merupakan kondisi awal yang merupakan titik dimana kurva solusi dimulai yang dapat menunjukkan kondisi selanjutnya.
4. Subsitusi langkah ketiga ke rumus berulang:

   $$t_n(\mathrm{x}) = y_0 \ + \int_{x_0}^{x} f\,[z, t_{n-1}\,(\mathrm{z})]\; dz \quad \text{untuk } n = 1,2,3,\dots$$

   untuk menentukan t_{n-1}.

5. Mensubsitusikan kembali hasil dari langkah keempat ke persamaan di atas dengan mengganti t_n menjadi t_{n+1} dan seterusnya. Pengulangan ini bertujuan memperoleh solusi approksimasi, sehingga mendekati solusi eksak. Dapat dikatakan mendekati solusi eksak jika nilai fungsi tersebut beda sebesar bilangan terkecil ε.

Metode ini dapat juga digunakan untuk analisis numerik, dapat dilihat bahwa pengerjaan metode *succesive approximation* dengan pendekatan iterasi sampai ketelitian yang diinginkan, hasilnya akan semakin mendekati pada penyelesaian eksaknya. Perlu diperhatikan dalam penggunaan metode *succesive approximation* pada analisis numerik adalah pemilihan Δh atau x, pada umumnya pengambilan nilai x yang kecil akan dapat mengurangi tingkat kesalahan yang timbul dan meningkatkan ketelitian nilai pengerjaan.

Sebaliknya jika dilakukan pengambilan nilai Δh atau x yang besar akan mengakibatkan tingkat kesalahan yang besar dan juga jika nilai Δh atau x, semakin besar, maka proses perhitungan semakin panjang. Setiap pengulangan pendekatan akan lebih mendekati solusi eksaknya, pada akhirnya pengulangan harus dihentikan.

Kriteria penghentian tertentu adalah dengan memperhatikan bahwa dua ulangan iterasi hanya berbeda sebesar bilangan yang terkecil. Hal ini dapat dikatakan terdapat suatu bilangan ε, dan memenuhi

$$|t_n - t_{n-1}| < \varepsilon$$

Maka iterasi dihentikan dan t_n diambil sebagai pendekatan solusi eksak.

B. Beberapa Contoh Penyelesaian dengan Metode *Successive Approximation*

Contoh 4.1 :

Diberikan suatu persamaan diferensial

$$y' = x^2 y,$$

$$y(0) = 1$$

jika $x = 0{,}2$ maka tentukan solusi MNA dengan menggunakan metode *successive approximation*.

Langkah-langkah menyelesaikan masalah nilai awal dari persamaan di atas sebagai berikut :

Langkah 1

Diketahui ${}^{dy}/_{dx} = x^2 y$ dengan $f(x, y) = x^2 y$ dan $y(0) = 1$ merupakan persamaan diferensial orde satu.

Langkah 2

$y' = f(x, y) = x^2 y$. Untuk sembarang $y_2 < y_1$, maka ada bilangan $\xi \in (y_1, y_2)$ sedemikian hingga

$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{d}{dy} f(x, \xi) = x^2$$

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) \quad = (y_1 - y_2)\, x^2$$

$$\begin{aligned} \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| &= \|(y_1 - y_2)\, x^2\| \\ &\leq \|(y_1 - y_2)\| \|x^2\| \\ &\leq \|(y_1 - y_2)\| \max_{0 \leq x \leq 2} x^2 \\ &= 4\, \|(y_1 - y_2)\|. \end{aligned}$$

Dengan demikian syarat Lipschitz terpenuhi yaitu

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq k|(y_1 - y_2)|$, dimana konstanta Lipshitznya adalah *k=1*, berarti persamaan tersebut mempunyai solusi tunggal.

Diketahui bahwa titik $(0,2)$ merupakan pusat dari R, dimisalkan $a = 1$ dan $b = \frac{1}{2}$

$R: |x| \leq 1, |y-2| \leq \frac{1}{2}$

$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$

$M = (1)^2 \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$h = \min\left(1, \frac{1/2}{5/2}\right) = \frac{1}{5} < a$

jadi f memiliki solusi tunggal di dalam interval $-1/5 \leq x \leq 1/5$

f kontinu di setiap bilangan real dan df/dy juga kontinu di setiap bilangan real.

Langkah 3

Diketahui persamaan tersebut memiliki syarat awal yaitu $y(0) = 1$, sehingga terkaan awal diperoleh $y_0(x) = 1$.

Langkah 4

Dari persamaan $f(x,y) = x^2y$ dan $y_0(x) = 1$ maka diperoleh $f(x,y_0) = x^2$, sehingga

$$y_1(\mathrm{x}) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[z, y_0(z)]\, dz$$

$$y_1(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x x^2 dx = 1 + \frac{1}{3}x^3$$

Langkah 5 dan seterusnya

- Dari persamaan $f(x,y) = x^2 y$ dan $y_1(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3$ maka diperoleh

  $f(x,y_1) = x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3\right)$, sehingga

  $y_2(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3\right)dx = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6$

- Dari persamaan $f(x,y) = x^2 y$ dan $y_2(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6$ maka diperoleh

  $f(x,y_2) = x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6\right)$, sehingga

  $y_3(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6\right)dx = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9$

- Dari persamaan $f(x,y) = x^2 y$ dan $y_3(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9$ maka diperoleh

  $f(x,y_3) = x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9\right)$, sehingga

  $$y_4(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9\right)dx$$

  $$= 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12}$$

- Dari $f(x,y) = x^2 y$ dan $y_4(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12}$ maka diperoleh

  $f(x,y_4) = x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12}\right)$, sehingga

  $$y_5(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12}\right)dx$$

  $$= 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12} + \frac{1}{29160}x^{15}$$

- Dari $f(x,y) = x^2y$ dan

  $y_5(x) = 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12} + \frac{1}{29160}x^{15}$ maka diperoleh

  $f(x,y_5) = x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12} + \frac{1}{29160}x^{15}\right)$, sehingga

$$y_6(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12} + \frac{1}{29160}x^{15}\right)dx$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{162}x^9 + \frac{1}{1944}x^{12} + \frac{1}{29160}x^{15} + \frac{1}{524880}x^{18}$$

Penyelesaian dengan menggunakan metode Euler untuk kasus persamaan diferensial di atas sebagai berikut :

$y_{i+1} = y_i + \Delta x({x_i}^2\, y_i)$

Jika diambil *step size* $\Delta x = 0{,}1$ maka, pada $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$ dapat diperoleh :

- $y_1 = 1 + 0{,}1(0^2)(1) = 1$

Selanjutnya, pada $x_1 = x_0 + \Delta x = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$ dan $y_1 = 1$ dapat diperoleh :

- $y_2 = 1 + (0{,}1)(0{,}1)^2(1) = 1{,}001$

Selanjutnya, pada $x_2 = x_1 + \Delta x = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$ dan $y_2 = 1{,}001$ dapat diperoleh :

- $y_3 = 1{,}001 + (0{,}1)(0{,}2)^2(1{,}001) = 1{,}005$

Selanjutnya, pada $x_3 = x_2 + \Delta x = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$ dan $y_3 = 1{,}005$ dapat diperoleh :

- $y_4 = 1{,}005 + (0{,}1)(0{,}3)^2(1{,}005) = 1{,}014$

dan seterusnya.

Tabel 1. Penyelesaian dengan metode *successive approximation* pada $x = 0,2$

y_n	ε
$y_0 = 1$	
$y_1 = 1,0026666667$	$\varepsilon = 0,0026666667$
$y_2 = 1,0026702223$	$\varepsilon = 0,0000035556$
$y_3 = 1,0026702254$	$\varepsilon = 0,0000000031$
$y_4 = 1,0026702255$	$\varepsilon = 0,0000000001$
$y_5 = 1,0026702255$	$\varepsilon = 0$
$\boldsymbol{y_6 = 1,002670225}$	$\varepsilon = 0$

Pada tabel 1 diatas karena nilai ε kecil pada dua iterasi y_6 dan y_5, maka $y_6 = 1,002670225$ diambil sebagai solusi aproksimasi pada persamaan tersebut dan proses iterasi dihentikan.

Tabel 2. Penyelesaian dengan metode Euler dan penyelesaian eksak

x	Nilai y	
	Euler	Eksak
0	1,0000	1,0000
0,1	1,0000	1,0003
0,2	**1,0010**	**1,0027**
0,3	1,0050	1,0090
0,4	1,0140	1,0216
0,5	1,0303	1,0425
0,6	1,0560	1,0747

Pada tabel 2 di atas dengan menggunakan metode Euler pada titik $x = 0,2$ didapat solusi dari persaman diferensial yaitu 1,0010, dan dengan menggunakan penyelesaian eksak juga pada titik $x = 0,2$ didapatkan solusi yaitu 1,0027.

Contoh 4.2 :

Diberikan persamaan diferensial

$$y' = 2x + y$$

dengan kondisi awal pada saat $x = 0$ dan $y = 1$.

Langkah 1

Diketahui $dy/_{dx} = 2x + y$ dengan $f(x,y) = 2x + y$ dan $y(0) = 1$ merupakan persamaan diferensial orde satu.

Langkah 2

$dy/_{dx} = 2x + y$ dan $df/_{dy} = 1$, didapat f dan $df/_{dy}$ kontinu di setiap bilangan riil. Titik (0,1) merupakan pusat R. Misalkan R: $|x| \leq 2, |y| \leq 1$, maka

$$|f(x,y)| = |2x + y| \leq 2|x| + |y| \leq 2(1) + |y| \leq M$$

jika diambil nilai $y = 1$, maka $M = 2$ dan $h = min(2,\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

jadi f memiliki solusi tunggal pada selang $-1/_2 \leq x \leq 1/_2$.

Langkah 3

Diketahui persamaan tersebut memiliki syarat awal yaitu $y(0) = 1$, sehingga terkaan awal diperoleh $y_0(x) = 1$.

Langkah 4

Dari persamaan $f(x,y) = 2x + y$ dan $y_0(x) = 1$ didapat $f(x,y_0) = 2x + 1$,

$$y_1(\mathrm{x}) = y_0 \ + \int_{x_0}^{x} f[z, y_0(z)]\, dz$$

$$y_1(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x 2x + 1, dx \ = x^2 + x + 1$$

Langkah 5 dan seterusnya

- Dari persamaan $f(x,y) = 2x + y$ dan $y_1(x) = x^2 + x + 1$ maka diperoleh

  $f(x,y_1) = 2x + (x^2 + x + 1\ )$, sehingga

  $$y_2(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x (x^2 + 3x + 1)dx$$

  $$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

- Dari persamaan $f(x,y) = 2x + y$ dan $y_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$ didapat

  $f(x,y_2) = 2x + (\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1)$, sehingga

  $$y_3(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x (\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1)\, dx$$

  $$= \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

- Dari persamaan $f(x,y) = 2x + y$ dan $y_3(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$

  maka diperoleh

  $f(x,y_3) = 2x + (\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1)$, sehingga

  $$y_4(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x (\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1)\, dx$$

  $$= \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + 1$$

Penyelesaian dengan menggunakan metode Euler untuk kasus persamaan diferensial di atas dengan formula sebagai berikut :

$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\ h$

dengan kondisi awal pada saat $x = 0$ dan $y = 1$, dan $h = 0{,}2$.

$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$

- $y(0) = 1$
- $y_1 \rightarrow y(0{,}2) = y(0) + f\{0; 1\}\ 0{,}2$

  $= 1 + \{2x + 1\}\ 0{,}2$

  $= 1 + \{2(0) + 1\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}200$
- $y_2 \rightarrow y(0{,}4) = y_1 + f\{0{,}2; 1{,}2\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}2 + \{2(0{,}2) + 1{,}2\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}2 + \ 0{,}32$

  $= 1{,}520$
- $y_3 \rightarrow y(0{,}6) = y_2 + f\{0{,}4; 1{,}52\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}52 + \{2(0{,}4) + 1{,}52\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}52 + 0{,}464$

  $= 1{,}984$
- $y_4 \rightarrow y(0{,}8) = y_3 + f\{0{,}6; 1{,}984\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}984 + \{2(0{,}6) + 1{,}984\}\ 0{,}2$

  $= 1{,}984 + 0{,}636$

  $= 2{,}621$

Penyelesaian dengan menggunakan metode modifikasi Euler untuk persamaan di atas sebagai berikut :

Pada saat $h = 0{,}2$

$y_1^{(1)} = y_0 + f(x_0, y_0)\ h$

$y_1^{(1)} = 1{,}000 + (1{,}000)\ 0{,}2 = 1{,}200$

Langkah selanjutnya untuk menghitung approksimasi yang kedua, dimana $f(x_i; y_1^1) = f(0{,}2\ ; 1{,}200) = 1{,}600$

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_i, y_1^1)}{2}\ h = 1{,}000 + \frac{1.000 + 1{,}600}{2}(0{,}2) = 1{,}260$$

$f(x_i; y_1^2) = f(0{,}2\ ; 1{,}260) = 1{,}660$

$$y_1^{(3)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_i, y_1^2)}{2}\ h = 1{,}000 + \frac{1.000 + 1{,}660}{2}(0{,}2) = 1{,}266$$

$$y_1^{(4)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_i, y_1^3)}{2}\ h = 1{,}000 + \frac{1.000 + 1{,}666}{2}(0{,}2) = 1{,}267$$

$$y_1^{(5)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_i, y_1^4)}{2}\ h = 1{,}000 + \frac{1.000 + 1{,}667}{2}(0{,}2) = 1{,}267$$

Pada saat $h = 0{,}4$

$y_2^{(1)} = y_1 + f(x_1, y_1)\ h = 1{,}267 + 0{,}2(1{,}667) = 1{,}600$

$$y_2^{(2)} = y_1 + \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^1)}{2}\ h = 1{,}267 + \frac{1{,}667 + 2{,}400}{2}(0{,}2) = 1{,}674$$

$$y_2^{(3)} = y_1 + \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^2)}{2}\ h = 1{,}267 + \frac{1{,}667 + 2{,}474}{2}(0{,}2) = 1{,}681$$

$$y_2^{(4)} = y_1 + \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^3)}{2}\ h = 1{,}267 + \frac{1667 + 2{,}481}{2}(0{,}2) = 1{,}682$$

$$y_2^{(5)} = y_1 + \frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^4)}{2}\ h = 1{,}267 + \frac{1{,}667 + 2{,}482}{2}(0{,}2) = 1{,}682$$

Tabel 3. Penyelesaian dengan metode *successive approximation*

$x = 0.2$	$x = 0{,}4$
y_n	
$y_0 = 1$	$y_0 = 1$
$y_1 = 1{,}240$	$y_1 = 1{,}560$
$y_2 = 1{,}263$	$y_2 = 1{,}661$
$y_3 = 1{,}264$	$y_3 = 1{,}674$
$y_4 = 1{,}264$	$y_4 = 1{,}675$

Pada tabel 3 di atas dengan menggunakan metode *successive approximation* pada titik $x = 0{,}2$ didapat solusi dari persaman diferensial tersebut pada iterasi ke-4 yaitu 1,264, dan pada titik $x = 0{,}4$ didapatkan solusi pada iterasi ke-4 yaitu 1,675.

Tabel 4. Penyelesaian dengan metode Euler dan penyelesaian eksak

x	Euler		Eksak
	y_n $h = 0{,}2$	y_n $h = 0{,}4$	
0	1,000	1,000	1,0000
0,2	**1,200**	–	**1,264**
0,4	1,520	**1,400**	**1,675**
0,6	1,984	–	2,266
0,8	2,621	2,280	3,076

Pada tabel 4 di atas dengan menggunakan metode Euler pada titik $x = 0,2$ didapat solusi dari persaman diferensial yaitu 1,200, dan pada titik $x = 0,4$ diperoleh 1,400. Pada penyelesaian eksak di titik $x = 0,2$ didapatkan solusi yaitu 1,264 dan di titik $x = 0,4$ diperoleh 1,675 .

Tabel 5. Penyelesaian dengan metode modifikasi Euler

x	Eksak	Modifikasi Euler	
		y_n $h = 0,2$	y_n $h = 0,4$
0,2	1,264	1,267	–
0,4	1,675	1,682	1,699

Pada tabel 5 di atas dengan menggunakan metode modifikasi Euler pada titik $x = 0,2$ didapat solusi dari persaman diferensial yaitu 1,267, dan pada titik $x = 0,4$ diperoleh 1,699. Pada penyelesaian eksak di titik $x = 0,2$ didapatkan solusi yaitu 1,264 dan di titik $x = 0,4$ diperoleh 1,675 .

Contoh 4.3 :

Diberikan persamaan diferensial biasa orde satu

$$y' = xy,$$

dengan nilai awal

$$y(0) = 1.$$

Solusi dari masalah nilai awal persamaan diatas dengan menggunakan metode iterasi Picard atau metode *successive approximation* adalah

Langkah 1

Diketahui ${}^{dy}/_{dx} = xy$ dengan $f(x,y) = xy$ dan $y(0) = 1$ merupakan persamaan diferensial biasa orde satu.

Langkah 2

${}^{dy}/_{dx} = xy$ dan ${}^{df}/_{dy} = 1$ didapat, f dan ${}^{df}/_{dy}$ kontinu di setiap riil.

Langkah 3

Diketahui persamaan tersebut memiliki syarat awal yaitu $y(0) = 1$, sehingga terkaan awal diperoleh $y_0(x) = 1$.

Langkah 4

Dari persamaan $f(x,y) = xy$ dan $y_0(x) = 1$ didapat $f(x, y_0) = x$, sehingga

$$y_1(\mathrm{x}) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[z, y_0(z)]\, dz$$

$$y_1(\mathrm{x}) = 1 + \int_{0}^{x} x \; dx = \frac{x^2}{2} + 1$$

Langkah 5 dan seterusnya

- Dari persamaan $f(x,y) = xy$ dan $y_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ maka diperoleh

  $f(x, y_1) = x\left(\frac{x^2}{2} + 1\right)$, sehingga

$$y_2(\mathrm{x}) = 1 + \int_{0}^{x} \left(\frac{x^3}{2} + x\right) dx$$

$$= \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1$$

- Dari persamaan $f(x,y) = xy$ dan $y_2(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1$ maka diperoleh

  $f(x,y_1) = x\left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1\right)$, sehingga

  $$y_3(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x \left(\frac{x^5}{8} + \frac{x^3}{2} + x\right) dx$$

  $$= \frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1$$

- Dari persamaan $f(x,y) = xy$ dan $y_3(x) = \frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1$ maka diperoleh

  $f(x,y_1) = x\left(\frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1\right)$, sehingga

  $$y_4(\mathrm{x}) = 1 + \int_0^x \left(\frac{x^7}{48} + \frac{x^5}{8} + \frac{x^3}{2} + x\right) dx$$

  $$= \frac{x^8}{384} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{2} + 1$$

Solusi eksak masalah nilai awal dari persamaan diferensial diatas adalah

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

penggunaan metode iterasi picard cocok digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah nilai awal atau masalah nilai batas dengan ketelitian yang tinggi. Ketelitian metode ini pada masalah nilai awal diberikan pada tabel di bawah ini.

Tabel 6. Penyelesaian masalah nilai awal metode iterasi Picard dan eksak

n	x_n	Solusi y_n		Galat
		Successive approximation	eksak	
0	0,0	1,0000	1,0000	0,0000
1	0,2	1,0202	1.0202	0,0000
2	0,4	1,0833	1,0833	0,0000
3	0,6	1,1972	1,1972	0,0000
4	0,8	1,3771	1,3771	0,0000
5	1,0	1,6478	1,6487	0,0009

Pada tabel 6 di atas dengan menggunakan metode *Successive approximation* pada semua titik $x = 0{,}2$ sampai titik $x = 1{,}0$ diperoleh solusi yang sama dengan penyelesaian eksak dengan galat $\varepsilon = 0{,}000$.

Tabel 7. Hasil keseluruhan dari beberapa contoh di atas

Persamaan diferensial	Kondisi awal	Solusi eksak	Hasil solusi aproksimasi		
			Successive approximation	Euler	Modifikasi Euler
$\boldsymbol{y' = x^2 y,}$	$\boldsymbol{y(0) = 1}$	**1,0027**	$\boldsymbol{y_6 = 1.0026}$	1,0010	—
$\boldsymbol{y' = 2x + y}$	$\boldsymbol{y(0) = 1}$	$\boldsymbol{(x = 0{,}2)}$ **1,264**	$\boldsymbol{y_4 = 1{,}264}$	1,200	$y_5 = 1{,}267$
		$\boldsymbol{(x = 0{,}4)}$ **1,675**	$\boldsymbol{y_4 = 1{,}675}$	1,400	$y_5 = 1{,}699$
$\boldsymbol{y' = xy}$	$\boldsymbol{y(0) = 1}$	$\boldsymbol{(x = 1)}$ **1,6487**	$\boldsymbol{y_4 = 1{,}6478}$	—	—

Rincian penjelasan pada tabel 7 yaitu :

1. Pada contoh soal 4.1, perhitungan di atas menunjukkan penyelesaian eksak dari persamaan diferensial pada contoh soal tersebut memberikan hasil eksak (pada saat $x = 0{,}2$) yaitu : $1{,}0027$. Dan penyelesaian dengan menggunakan metode *successive approximation* menghasilkan solusi iterasi untuk $x = 0{,}2$ pada saat iterasi ke-6 yaitu $1{,}0026$. Penyelesaian dengan menggunakan metode Euler untuk x yang sama menghasilkan solusi yaitu $1{,}0010$.
2. Pada contoh soal 4.2, perhitungan diatas menunjukkan penyelesaian eksak dari persamaan diferensial tersebut untuk $x = 0{,}2$ yaitu $1{,}264$, dan untuk $x = 0{,}4$ yaitu $1{,}675$. Penyelesaian dengan menggunakan metode *successive approximation* untuk $x = 0{,}2$ yaitu $1{,}264$ pada saat iterasi ke-4, dan untuk $x = 0{,}4$ yaitu $1{,}675$ pada saat iterasi ke-4. Dan penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan metode Euler untuk $x = 0{,}2$ yaitu $1{,}200$, dan untuk $x = 0{,}4$ yaitu $1{,}400$. Sedangkan penyelesaian dengan menggunakan metode modifikasi Euler untuk $x = 0{,}2$ yaitu $1{,}267$ pada saat iterasi ke-5, dan untuk $x = 0{,}4$ yaitu $1{,}699$ pada saat iterasi ke-5.
3. Pada contoh soal 4.3, perhitungan diatas menunjukkan bahwa penyelesaian eksak persamaan diferensial tersebut adalah $1{,}6487$ untuk $x = 1$. Sedangkan penyelesaian dengan menggunakan metode *successive approximation* menghasilkan solusi yaitu $1{,}6478$ untuk $x = 1$ pada saat iterasi ke-4.

Rincian penjelasan dari Tabel 7 di atas menunjukkan bahwa penggunaan metode *successive approximation* pada penyelesaian persamaan diferensial suatu masalah nilai awal mempunyai ketelitian yang tinggi dibandingkan dengan metode Euler dan metode modifikasi Euler. Penyelesaian dengan menggunakan metode *successive approximation* lebih mendekati hasil eksak, Namun penggunaan metode *successive approximatin* memerlukan tingkat ketelitian yang tinggi.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan uraian penerapan soal pada bab sebelumnya dapat di simpulkan bahwa penggunaan metode *successive approximation* pada umumnya dapat digunakan pada persamaan differensial orde satu. Pada contoh kasus yang diberikan, penyelesaian persamaan differensial dengan menggunakan metode *successive approximation* diperlukan tingkat ketelitian yang tinggi dalam hal pengerjaannya.

Adapun formula metode *successive approximation* adalah sebagai berikut:

$$t_n(\mathrm{x}) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[z, t_{n-1}(\mathrm{z})]\, dz \quad \text{untuk } n = 1,2,3,\ldots$$

Hasil perhitungan kasus-kasus yang telah diberikan pada bab sebelumnya diperoleh bahwa penyelesaian persamaan differensial dengan metode *successive approximation* menghasilkan nilai yang mendekati *exact* (tepat).

Pada perbandingan hasil dengan menggunakan metode-metode yang lain, dalam hal ini metode Euler, metode modifikasi Euler, diperoleh bahwa hasil yang didapat dengan menggunakan metode *successive approximation* lebih baik daripada menggunakan metode Euler dan metode modifikasi Euler.

Pada tabel 7 dapat disimpulkan bahwa penggunaan metode iterasi Picard atau *successive approximation* cocok digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah nilai awal pada persamaan diferensial dengan ketelitian yang tinggi dibandingkan dengan metode Euler dan modifikasi Euler.

B. Saran

Pembahasan skripsi ini punulis lebih memfokuskan pada persamaan diferensial berorder satu. Pembahasan selanjutnya dapat dilakukan dengan persamaan diferensial berorder tinggi, juga dapat dilakukan dengan menganalisa pemrograman komputer sehingga dapat ditentukan galat atau error. Penggunaan metode *successive approximation* pada persamaan differensial juga dapat dikembangkan pada sistem persamaan differensial karena melibatkan dua variabel atau lebih.

Banyaknya penyelesaian secara metode numerik pada persamaan diferensial maka penulis sarankan agar lebih bayak membuat perbandingan dengan beberapa metode yang lain tidak terbatas pada metode Euler dan metode modifikasi Euler saja. Seperti halnya metode Runge-Kutta orde dua, Runge-Kutta orde empat, ataupun yang lainnya.

C. Penutup

Alhamdulillah penulis panjatkan rasa syukur kepada Allah SWT. yang tak pernah memutuskan curahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Meskipun telah berusaha semaksimal mungkin, penulis mengakui dalam penulisan ini masih terdapat banyak kekurangan dan memerlukan perbaikan ulang. Untuk itu penulis mengharapkan saran konstruktif dari para pembaca demi terwujudnya karya yang lebih memberi manfa’at.

Daftar Pustaka

Adiwijaya, 2004. *Diktat Mata Kuliah Matematika Teknik II.* STT Telkom, Bandung.

Apostol, Tom M. 1966. *Calculus Volume I Second Edition.* John Wiley & Son, Inc. Canada.

Apostol, Tom M. 1969. *Calculus Volume II Second Edition.* John Wiley & Son, Inc. Singapore.

Apha, 2006. *Buku Ajar UNILA: Metode Numerik.* FMIPA UNILA, Lampung.

Finizio, N dan G. Ladas. 1988 *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern.* Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.

Leithold, Lois. 1986. *Kalkulus I Edisi Ke Lima.* Terjemahan Hutahean. Erlangga: Jakarta.

Riyanto, M. Zaki. 2008. *Pengantar Analisis I.* FMIPA UGM, Yogyakarta.

Rina, Andriani. 2005. *Persamaan Diferensial Linear dan Aplikasinya.*(skripsi strata I FMIPA UNES) Semarang.

Ross, L. Shepley. 1984. *Differential Equation Thrid Edition.* John Wiley & Son Inc. Canada.

Scarborough, B. James. 1930. *Numerical Mathematical Analysis.* Oxford University Press. London.

Setiawan, Agus. 2006. *Pengantar Metode Numerik.* Penerbit Andi, Yogyakarta.

Setiawan, Erwin Budi. 2002. *Buku ajar Matematika Lanjut.* STT Telkom. Bandung.

Wylie, C. Ray. 1985. *Differential Equation.* McGraw-Hill, Inc: Singapore.

Yusanto, Hapsari Syamsidar. 2009. *Metode Dekomposisi Adomian untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Abelian.* (skripsi strata I FMIPA IPB) Bogor.

Zill, Dennis G.2005. *A First Course in Differential Equations With Modeling Applications. Eighth Edition.* Thomson Learning, Inc: Canada.

CURICULUM VITAE

Nama	: Affan Fauzi
NIM	: 04610009
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Program Studi	: Matematika.
Ttl.	: Cirebon, 29 November 1985
Alamat Asal	: Ds. Jatimerta Gg. Kertasari Cirebon Utara Cirebon Jawa Barat.
Nama Ayah	: Sayuti (Alm.)
Pekerjaan	: Guru
Nama Ibu	: Eni Fajaryanti
Pekerjaan	: Guru
Alamat Orang Tua	: Ds. Jatimerta Gg. Kertasari Cirebon Utara Cirebon Jawa Barat.

.

Riwayat Pendidikan

SDN 01 Astana Gunung Jati Cirebon	1992-1998
SLTP A. Wakhid Hasyim Jombang	1998-2001
MASS Aliyah Tebuireng Jombang	2001-2003
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta	2004