BAB II

LANDASAN TEORI

Sebelum dipaparkan landasan teori yang mendukung penelitian tentang transformasi Laplace dan aplikasinya pada rangkaian listrik, maka terlebih dahulu didefinisikan fungsi yang akan digunakan. Fungsi adalah aturan pengawanan/padanan yang menghubungkan tiap anggota suatu himpunan A (domain) dengan anggota himpunan B (codomain) secara tunggal.

Untuk selanjutnya, di dalam penelitian ini yang dimaksud dengan fungsi *f* adalah fungsi dengan domain bilangan real.

2.1. Limit

Definisi 2.1.1. (Dale Varberg dan Steven E. Rigdon, 2001: 88)

(Pengertian limit secara intuisi). Untuk mengatakan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa jika *x* yang mendekati *c* tetapi $x \neq c$, maka *f(x)* mendekati *L*.

Definisi 2.1.2. (Dale Varberg dan Steven E. Rigdon, 2001: 97)

$\text{Lim}_{x \to c} f(x) = L$ berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (berapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$; yakni,

$$0 < |x - c| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Contoh 2.1. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5$

Analisis pendahuluan. Untuk menentukan δ sedemikian sehingga:

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon.$$

Untuk $x \neq 2$,

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}-5\right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x+1)-5\,| \qquad < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |(2x+1)-5| \qquad < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |2x-4| \qquad < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow 2|x-2| \qquad < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |x-2| \qquad < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bukti formal. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, maka $0 < |x-2| < \delta$, menyebabkan:

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2}-5\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}-5\right| = |(2x+1)-5|$$

$$= |2x-4| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon.$$

Pencoretan faktor $(x-2)$ sah karena $0 < |x-2|$ berarti $x-2 \neq 0$ ■

Teorema 2.1.2. (Frank Ayres Jr., 1972: 10)

Jika $n \epsilon \mathbb{N}$, k suatu konstanta, serta f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c, $\lim_{x\to c} f(x) = L, \lim_{x\to c} g(x) = M$ maka:

(2.1) $\lim_{x\to c} k = k$

(2.2) $\lim_{x\to c} x = c$

(2.3) $\lim_{x\to c} k\,f(x) = k \lim_{x\to c} f(x)$

(2.4) $\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$

(2.5) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$

(2.6) $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ $asalkan\ g(x) \neq 0.$

Bukti persamaan (2.1). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta > 0$, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan: $|k - k| = 0 < \varepsilon$ ■

Bukti persamaan (2.2). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon > 0$, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan: $|x - c| < \varepsilon$ ■

Bukti persamaan (2.3). Untuk *k=0* jelas, yaitu $\lim_{x \to c}(0) = 0$. Untuk $k \neq 0$, ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Untuk limit *f(x)* yang nilainya L, maka:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Dengan menetapkan $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|}$, dapat dinyatakan bahwa $0 < |x - c| < \delta$ berarti: $|kf(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$. Ini menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c} k\, f(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$ ■

*Bukti persamaan (2.4).*Diketahui $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$, jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Untuk $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Demikian juga untuk $\lim_{x \to c} g(x) = M$, maka terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga $0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ maka $0 < |x - c| < \delta$, menunjukkan

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |[f(x) - L] + [g(x) - M)]|$$

$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi, $\lim_{x \to c} f(x) + g(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$ ■

Bukti persamaan (2.5). Untuk $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c} g(x) = M$, jika diberikan sebarang $\varepsilon_1 > 0$ dan $\varepsilon_2 > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$, sedemikian, sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon_1$$
$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon_2.$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ maka $0 < |x - c| < \delta$, berlaku$|f(x) - L| < \varepsilon_1$ dan $|g(x) - M| < \varepsilon_2$.

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| = |(f(x) - L)(g(x) - M) + M(f(x) - L) + L(g(x) - M)|$$
$$\leq |f(x) - L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |L||g(x) - M|$$

sehingga jika $0 < |x - c| < \delta$, maka

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + |M|\varepsilon_1 + |L|\varepsilon_2$$

ambil ε_1 dan ε_2 sedemikian, sehingga $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 < \frac{1}{3}\varepsilon$, $\varepsilon_1 < \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{|M|}$ dan $\varepsilon_2 < \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{|L|}$

maka diperoleh:

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| < \frac{1}{3}\varepsilon + |M|\frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{|M|} + |L|\frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{|L|} = \varepsilon \blacksquare$$

Bukti persamaan (2.6). Diketahui $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, maka dengan menggunakan hasil *(2.5)*, diperoleh $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$ $\blacksquare$

Definisi 2.1.3 Limit Kiri dan Limit Kanan (Edwind J. Purcell, 1984: 71)

(2.7) limit kiri: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L \Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dengan $c - \delta < x < \delta$ berlaku: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(2.8) limit kanan: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L \Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua x dengan $\delta < x < c + \delta$ berlaku: $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.1.4. (Edwind J. Purcell, 1984: 71)

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $\delta > 0$ sehingga $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Dari pernyataan tersebut dipunyai $0 < |x - c|$, ini berarti $x \neq 0$, dan $|x - c| < \delta$, berarti $-\delta < x - c < \delta \leftrightarrow c - \delta < x < c + \delta$.

Lalu dari keduanya diperoleh,

$0 < |x - c| < \delta \Leftrightarrow c - \delta < x < \delta$ dan $\delta < x < c + \delta$. Akhirnya,

$c - \delta < x < \delta$ dan $\delta < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$,

berarti bahwa

$c - \delta < x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, dan

$\delta < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$■

$(\Longleftarrow)$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa

$c - \delta < x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$ dan $\delta < x < c + \delta \Rightarrow$ $|f(x) - L| < \varepsilon.$

Jadi, diperoleh untuk $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$■

Definisi 2.1.7. (Soeparna Darmawijaya, dkk.,__: 77)

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan $M > 0$ sehingga untuk semua x dengan $x > M$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon.$

Definisi 2.1.8. (Soeparna Darmawijaya, dkk.,__: 78)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, terdapat bilangan $N < 0$ sehingga untuk semua x dengan $x < N$ berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon.$

2.2.Kekontinuan Fungsi

Definisi 2.2.1. (Edwind J. Purcell, 1984: 88)

Diberikan fungsi *f* yang terdefinisi pada interval terbuka yang memuat *c*. Fungsi *f* dikatakan kontinu di *x* = *c*, jika: $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Dengan kata lain, *f* dikatakan kontinu di *x* = *c* jika: *f(c)* terdefinisi, $\lim_{x\to c} f(x)$ ada dan $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Teorema 2.2.2. (Dale Varberg dan Steven E. Rigdon, 2001: 116)

Jika *f* dan *g* kontinu di *c*, maka *kf*, *f* + *g*, *f* - *g*, *f* . *g*, dan *f* / *g* dengan *g* ≠ *0* juga kontinu di *c*.

Bukti: *(mengikuti teorema 2.1.2.)*

dipunyai bahwa k konstanta, f dan g kontinu di c, maka:

1) $\lim_{x\to c} k\, f(x) = k \lim_{x\to c} f(x) = k(fc)$■

2) $\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = f(c) + g(c)$■

3) $\lim_{x\to c} f(x) - g(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = f(c) - g(c)$■

4) $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = f(c)g(c)$■

5) $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$ asalkan $g(x) \neq 0$■

2.3. Derivatif

Definisi 2.3.1. (Wikaria Gazali dan Soedadyatmodjo, 2007 : 69)

Diberikan suatu fungsi *f* yang terdefinisi pada [a,b]. Turunan atau derivatif *f* terhadap *x* adalah fungsi $f'(x)$ yang nilainya untuk suatu $x = c$ adalah:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Secara umum, untuk $c = x$ dan $h = \Delta x$, maka:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Jika penambahan kecil x sebesar Δx, mengakibatkan bertambahnya y sebesar Δy, sehingga $y = f(x)$ menjadi $y + \Delta y = f(x+\Delta x)$ maka kesepadanan penulisan atau arti derivatif $f(x)$ adalah :

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Untuk selanjutnya turunan atau derivatif *f* terhadap *x* dinotasikan dengan:

$$f'(x) \text{ atau } y'.$$

Teorema 2.3.2. Derivatif Fungsi Konstan (Endang Dedy, 2003 : 140)

Jika *f(x) = c* (suatu konstanta) untuk semua *x*, maka *f'(x)=0* untuk semua *x.*

Bukti:

Diketahui *f(x) = c* untuk semua *x*, berarti *f(x+h) = c* sehingga diperoleh:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \blacksquare$$

Teorema 2.3.3.: Derivatif Fungsi Linear (Endang Dedy, 2003 : 140)

Jika *f(x) =ax +b, a ≠ 0* , maka *f'(x)=a.*

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = \lim_{h \to 0} a = a \blacksquare$$

Teorema 2.3.4.: Derivatif Fungsi Pangkat (Endang Dedy, 2003 : 141)

Jika $n \epsilon \mathbb{N}$, dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bukti:

$(x+h)^n = x^n + hnx^{n-1} + h^2 p(h)$ dimana *p(h)* adalah polinomial dalam *h* yang berderajat *n-2.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + hnx^{n-1} + h^2 p(h) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\,[nx^{n-1} + hp(h)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} [nx^{n-1} + hp(h)] = nx^{n-1} \blacksquare$$

Teorema 2.3.5.: Derivatif pada Kombinasi Linear Fungsi (Endang Dedy, 2003 : 142).

Jika *f* dan *g* adalah fungsi yang terdeferensialkan, *a* dan *b* adalah konstanta real, maka $(af)'(x) + (bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$.

Bukti:

$$(af)'(x) + (bg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[af(x+h) + bg(x+h)] - [af(x) + bg(x)]}{h}$$

$$= a\left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) + b\left(\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

$$= af'(x) + bg'(x) \blacksquare$$

Teorema 2.3.6.: Derivatif Hasil Kali Fungsi (Endang Dedy, 2003 : 144)

Jika *f* dan *g* masing-masing adalah fungsi yang terdeferensialkan di *x* maka *f.g* terdeferensialkan di *x*, dan

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Bukti:

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) + [f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)] - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x+h) + [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} f(x)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} f(x)$$

$$= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \blacksquare$$

Dari hasil di atas terlihat bahwa :

Turunan hasil kali tidak sama dengan hasil kali turunan-turunan.

Teorema 2.3.7.:Derivatif Fungsi Kebalikan (Endang Dedy, 2003 : 144)

Jika f terdeferensialkan di x dan $f(x) \neq 0$ maka

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Bukti:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h)f(x)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{f(x+h)f(x)} \cdot -\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$= \frac{1}{[f(x)]^2} \cdot -f'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \blacksquare$$

Teorema 2.3.8.: Derivatif Fungsi Hasil Bagi (Endang Dedy, 2003 : 145)

Jika f dan g terdeferensial di x dan $g(x) \neq 0$, maka $f\,/\,g$ terdeferensial di x, dan

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Bukti:

$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x).\frac{1}{g(x)}$, maka menurut teorema 2.3.6 dan teorema 2.3.7,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = f'(x).\frac{1}{g(x)} + f(x).\left(\frac{1}{g}\right)'(x)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x).\left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x)g(x)}{[g(x)]^2} - \frac{f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \blacksquare$$

Teorema 2.3.9. (Dale Varberg dan Steven E. Rigdon, 2001: 145).

Jika *f'(c)* ada maka *f(x)* kontinu di *c*.

Bukti:

Pembuktiannya yaitu dengan menunjukkan $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

$$f(x) = f(x) + [f(c) - f(c)]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(c) + [f(x) - f(c)] \cdot \frac{(x-c)}{(x-c)} \; dengan \; x \neq c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{(x-c)}(x-c) \; dengan \; x \neq c.$$

Dengan mengambil limit untuk kedua ruas maka,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c}\left(f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{(x-c)}(x-c)\right)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{(x-c)} \cdot \lim_{x \to c}(x-c)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) + f'(c) \cdot 0$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \blacksquare$$

Teoema 2.3.10. Derivatif Fungsi Sinus (Edwind J. Purcell, 1984: 123)

Jika *f(x)=sin x*, maka turun pertama dari *f(x)*, yaitu: $f'(x) = \cos x$.

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \left[\frac{\cos h - 1}{h}\right] + \frac{\sin h \cos x}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} + \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(\cos\ h)^2 - 1}{h(\cos h + 1)} + (1).\cos x$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-(\sin h)^2}{h} \cdot \frac{1}{(\cos h + 1)} + \cos x$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h}{(\cos h + 1)} + \cos x$$

$$= \sin x \cdot (1) \cdot \frac{-\sin 0}{(\cos 0 + 1)} + \cos x$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x = \cos x \ \blacksquare$$

Teorema 2.3.11. Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan. (Edwind J. Purcell, 1984: 221).

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensialkan pada titik-titik dalam (a,b), maka terdapat c anggota (a,b) sehingga

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Bukti:

Dibentuk fungsi h: $[a,b] \to \mathcal{R}$ dengan rumus

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{(b-a)}(x-a).$$

Diperoleh $h(a)$=$h(b)$=0. Oleh karena itu, terdapat $c \in [a, b]$ sehingga $h^{'}(c) = 0$. Jadi,

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = 0.$$

$$\Leftrightarrow f^{'}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)}.$$

Atau

$$f(b) - f(a) = f^{'}(c)(b - a) \blacksquare$$

Derivatif Tingkat Dua (Wikaria Gazali dan Soedadyatmodjo,2007: 72)

Diberikan fungsi y=$f(x)$. Derivatif tingkat dua dari fungsi *y* terhadap *x* ditulis dengan

$$f^{''}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)}{h}.$$

2.4.Integral

Definisi 2.4.1. Integral Tak Tentu (Frank Ayres Jr., 1972: 134)

Jika *F(x)* adalah sebuah fungsi yang turunannya *F'(x) = f(x)* pada selang tertentu, maka *F(x)* disebut *anti-turunan* atau *integral tak tentu* dari *f(x).*

Operasi intergral tak tentu ditulis dengan

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Teorema 2.4.2. Aturan Pangkat (Edwin J. Purcell, 1984: 233)

Jika *r* adalah sebarang bilangan rasional selain -1, maka

$$\int x^r\, dx = \frac{x^{r+1}}{r + 1} + C.$$

Bukti:

Untuk mengembangkan suatu hasil berbentuk

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

cukup dengan membuktikan

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = f(x).$$

Diperoleh,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{r+1}}{r+1} + C\right] = \frac{1}{r+1}(r+1)x^{r} + 0 = x^{r}\ \blacksquare$$

Teorema 2.4.3.Kelinearan Integral (Edwin J. Purcell, 1984: 235)

Jika f dan g mempunyai anti-turunan dan a dan b adalah konstanta, maka $\int af(x) + bg(x)\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$.

Bukti:

Dengan mendiferensialkan ruas kanan, maka akan diperoleh integran dari ruas kiri.

Misal $F(x) = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$, maka

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left[a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx\right]\\ &= \frac{d}{dx}a\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}b\int g(x)\,dx\\ &= a\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + b\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx\\ &= af(x) + bg(x)\blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 2.4.4. Integral Substitusi (Frank Ayres Jr., 1972: 132)

Jika g suatu fungsi yang terdiferensialkan dan jika F adalah suatu anti-turunan dari fungsi *f*. Lalu dimisalkan *u=g(x)*, maka

$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C.$

Bukti:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x)) + C] = F'(g(x))g'(x) = f(x)g'(x) \blacksquare$$

Teorema 2.4.5. Integral Parsial (Frank Ayres Jr., 1972: 141)

Jika *u=f(x)* dan *v=g(x)*, maka

$$\int f(x)\, g'(x) dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Bukti:

u=f(x) dan *v=g(x)*, maka *du=f'(x)dx* dan *dv=g'(x)dx.*

Dari teorema 2.3.6 dipunyai $\frac{d}{dx}[(f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Atau dalam *u* dan *v,*

$$\frac{d}{dx}[uv] = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas terhadap *x*, didapat

$$\int \frac{d}{dx}[uv]dx = \int v\frac{du}{dx}dx + \int u\frac{dv}{dx}dx$$

$$\Leftrightarrow uv = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$\Leftrightarrow uv - \int v\, du = \int u\, dv \blacksquare$$

Definisi 2.4.6. Integral Tertentu (Edwin J. Purcell, 1984: 265)

Diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada interval tertutup $[a,b]$.

Jika

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i$$

ada, maka *f* dikatakan terintegralkan pada [a,b].

Selanjutnya, $\int_a^b f(x)\, dx$ disebut integral tertentu *f* dari a ke b, yaitu:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i.$$

Teorema 2.4.7. Teorema Fundamental Kalkulus (Edwin J. Purcell, 1984: 272).

Jika fungsi f kontinu pada [a,b] dan jika Fungsi F suatu anti turunan fungsi *f* pada [a,b], maka:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Bukti:

Dibentuk partisi sebarang dari [a,b], yaitu

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

maka:

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0).$$

Jika ditambah dan dikurangkan dengan fungsi-fungsi lain, maka:

$$F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + (Fx_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Menurut teorema nilai rata-rata untuk turunan yang diterapkan pada selang $[x_i - x_{i-1}]$, maka:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F^{'}(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) = f(x_i)\Delta x_i$$

untuk suatu pilihan $\overline{x_i}$ pada selang terbuka $(x_i - x_{i-1})$. Jadi,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$

Jika kedua ruas diambil limit untuk $|P| \to 0$, diperoleh:

$$\lim_{|P|\to 0} [F(b) - F(a)] = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\Leftrightarrow F(b) - F(a) = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx \blacksquare$$

Teorema 2.4.8. Kelinearan Integral Tertentu (Edwin J. Purcell, 1984: 275).

Jika fungsi f dan g terintegral pada [a,b] dan k dan l adalah konstanta, maka

$$\int_a^b kf(x) + lg(x)\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx + l\int_a^b g(x)\, dx.$$

Bukti:

$$\int_a^b kf(x) + lg(x)\, dx = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [kf(x_i) + lg(x_i)]\Delta x_i$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [kf(x_i)]\Delta x_i + \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [lg(x_i)]\Delta x_i$$

$$= k \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i + l \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x_i$$

$$= k \int_a^b f(x)\, dx + l \int_a^b g(x)\, dx \blacksquare$$

2.5. Fungsi Gamma

Definisi 2.5.1. Fungsi Gamma (Julian Havil, 2003: 53)

Fungsi gamma didefinisikan sebagai

$$\tau(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

Sifat-sifat Fungsi Gamma ((Julian Havil, 2003: 54)

1. $\boldsymbol{\tau(1) = 1}$.

Bukti:

$$\tau(1) = \int_0^\infty t^0\, e^{-t} dt$$

$$= -e^{-t}|_0^\infty = 1 \blacksquare$$

2. $\boldsymbol{\tau(x+1) = x\tau(x)}$

Bukti: (menggunakan intergral parsial)

$$\tau(x+1) = \int_0^\infty t^{(x+1)-1}\, e^{-t} dt = \int_0^\infty t^x\, e^{-t} dt$$

$$= t^x(-e^{-t})|_0^\infty - \int_0^\infty (xt^{x-1})\,(-e^{-t}) dt$$

$$= -t^{x}e^{-t}|_0^\infty + x\left\{\int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}dt\right\}$$

$$= x\tau(x).$$

Dengan kata lain,

$$\tau(x) = \frac{\tau(x+1)}{x}\ \blacksquare$$

3. Jika *x* adalah bilangan bulat positif, maka $\boldsymbol{\tau(x) = (x-1)!}$.

Bukti:

$$\tau(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}dt$$

$$= -e^{-t}t^{x-1}|_0^\infty + \int_0^\infty (x-1)t^{x-2}\, e^{-t}dt$$

$$= (x-1)\int_0^\infty t^{x-2}\, e^{-t}dt$$

$$= (x-1)\tau(x-1).$$

Dengan cara yang sama, $\tau(x-1) = (x-2)\tau(x-2)$, sehingga untuk *x* bilangan bulat positif maka berlaku:

$$\tau(x) = \{(x-1)(x-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\}\cdot \int_0^\infty e^{-t}dt$$

$$= (x-1)!\cdot 1 = (x-1)!\ \blacksquare$$

4. $\boldsymbol{\tau\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$.

Bukti:

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt.$$

Substitusi $t = x^2, dt = 2xdx$ maka persamaaan di atas menjadi

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-1}\, e^{-x^2} 2xdx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx.$$

Lalu diperoleh

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)} dydx.$$

Transformasi ke koordinat polar $r^2 = x^2 + y^2$, maka $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, dan $dydx = r\, drd\theta$ sehingga,

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \int_{-\infty}^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^\infty e^{-r^2} r\, dr = \theta|_0^{2\pi} \cdot \left\{-\frac{1}{2} e^{-r^2}\Big|_{-\infty}^\infty\right\}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

Atau dengan kata lain,

$$\tau\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\blacksquare$$

2.6. Persamaan Diferensial

Definisi 2.6.1. (Rustanto Rahardi, Herman Hudojo, dan Imam Supemo, 2003: 1).

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tak diketahui. Persamaan diferensial biasa diartikan sebagai suatu persamaan yang melibatkan turunan pertama atau lebih dari fungsi sembarang *y* terhadap peubah *x*; persamaan ini dapat pula melibatkan *y* itu sendiri, fungsi *x* yang diberikan dan konstanta.

Contoh 2.2.: $y' = \cos x$.

Definisi 2.6.2. (Rustanto Rahardi, Herman Hudojo, dan Imam Supemo, 2003: 2).

Turunan tertinggi yang terjadi dalam suatu persamaan diferensial dimanakan *orde* dari persamaan diferensial tersebut.

Definisi 2.6.3. Persamaan Diferensial Linear Orde Satu (David L. Power, 2006: 1)

Persamaan diferensial linear orde satu secara umum dinyatakan sebagai

$$F(x, y, y') = 0.$$

Jika $y' = \frac{dy}{dx}$, maka $F(x, y, y') = 0$ dapat ditulis dengan

$$F(x, y, y') = 0.$$

Persamaan ini merupakan persamaan yang dinyatakan secara implisit. Bentuk eksplisitnya yaitu,

$$y' = f(x, y).$$

Solusi Persamaan Diferensial Linear Orde Satu

Suatu fungsi *y=y(x)* dikatakan solusi persamaan diferensial $F(x, y, y') = 0$ apabila *y=y(x)* atau turunannya yakni y' memenuhi persamaan diferensial tersebut.

Contoh 2.3.:

$y = x^2 + 1$ adalah solusi persamaan diferensial $y' = 2x.$ Demikian pula untuk $y = x^2 + c$ dengan c adalah konstanta, merupakan solusi persamaan diferensial $y' = 2x$. Solusi $y = x^2 + 1$ disebut solusi khusus dan $y = x^2 + c$ disebut solusi umum.

Definisi 2.6.4. Persamaan Diferensial Linear Orde Dua (Farlow, 1994: 396).

Jika $F(x, y, y', y'') = 0$ linear dalam *y*, *y'*, dan *y''*, dimana $y' = \frac{dy}{dx}$ dan $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ maka persamaan diferensial $F(x, y, y', y'') = 0$ disebut persamaan diferensial linear orde dua. Secara umum persamaan diferensial linear orde dua berbentuk:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x).$$

Dengan koefisien-koefisien *a(x)*, *b(x)*, *c(x)*, dan fungsi *g(x)* merupakan fungsi yang kontinu pada selang $a \leq x \leq b$ dengan $a(x) \neq 0$ pada selang ini.

Definisi 2.6.5. (Rustanto Rahardi, Herman Hudojo, dan Imam Supemo, 2003: 80).

Persamaan diferensial linear orde dua yang berbentuk $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$ dikatakan *homogen* jika $g(x) = 0$ dan *non-homogen* untuk $g(x) \neq 0$.

Solusi Persamaan Diferensial Linear Orde Dua (Farlow, 1994: 396)

Fungsi $\varphi(x)$ dikatakan solusi persamaan diferensial orde dua pada selang I jika $\varphi(x)$ mempunyai turunan kedua dan memenuhi hubungan $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$ pada selang I, yaitu $a(x)\varphi''(x) + b(x)\varphi(x)' + c(x)\varphi(x) = g(x)$ untuk setiap $x \epsilon I$.

Teorema 2.6.6. (Farlow, 1994: 397)

Jika $\varphi(x)$ solusi persamaan diferensial linear orde dua homogen $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ pada selang I, maka $\alpha\varphi(x)$ juga merupakan solusi persamaan diferensial tersebut untuk setiap $\alpha \in \Re$.

Bukti:

dipunyai $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$.

Tulis $y = \alpha\varphi(x)$ dengan $\alpha\ konstanta,$ maka

$y' = \alpha\varphi'(x)$ dan $y'' = \alpha\varphi''(x)$ sehingga dengan mensubstitusikan ke persamaan yang dipunyai, diperoleh

$$a(x)\,[\alpha\varphi''(x)] + b(x)[\,\alpha\varphi'(x)] + c(x)[\,\alpha\varphi(x)]$$

$$= \alpha\big(a(x)\,\varphi''(x) + b(x)\varphi'(x) + c(x)\varphi(x)\big) = \alpha(0) = 0.$$

Jadi $\alpha\varphi(x)$ juga solusi persamaan diferensial linear orde dua tersebut■

Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Homogen dengan Koefisien Konstan (J. David Logan, 2006: 87)

Diberikan persamaan diferensial linear orde dua homogen yang berbentuk

$$y'' + py' + qy = 0,$$

dimana p dan q konstanta-konstanta. Persamaan di atas dinamakan *persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien konstan.*

$y = e^{rx}$ merupakan solusi persamaan diferensial tersebut jika r merupakan penyelesaian persamaan kuadrat

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Persamaan kuadrat tersebut disebut *persamaan karakteristik* dan akar-akarnya disebut *akar-akar karakteristik*. Persamaan ini diperoleh dari turunan pertama dan kedua $y = e^{rx}$ yaitu $y' = re^{rx}$ dan $y'' = r^2e^{rx}$.

Substitusi ke dalam persamaan $y'' + py' + qy = 0$, diperoleh $r^2e^{rx} + pre^{rx} + qe^{rx} = (r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$. $e^{rx} \neq 0$ untuk setiap x, sehingga $(r^2 + pr + q = 0$.

Akar-akar dari persamaan karakteristik terbagi dalam tiga kasus, yaitu (Farlow, 1994:401):

1. Akar-akarnya real dan sama $(r_1 = r_2)$

   Jika $r_1 = r_2 = a$ merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik, maka solusi umum untuk persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien konstan yaitu $Y = Ae^{ax} + Bxe^{ax} = (A + Bx)e^{ax}$.

2. Akar-akarnya real berbeda $(r_1 \neq r_2)$

   Jika $r_1 \neq r_2$ merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik, maka solusi umum untuk persamaan diferensial orde dua homogen dengan koefisien konstan yaitu $Y = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$.

3. Akar-akarnya kompleks

   Jika $r_1 = a + ib\ dan\ r_2 = a - ib$ merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik, maka solusi umum untuk persamaan diferensial orde dua homogen koefisien konstan yaitu $Y = e^{rx}(A \cos bx + B \sin bx)$.

Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Nonhomogen dengan Koefisien Konstanta (J. David Logan, 2006: 87)

Diberikan persamaan diferensial linear orde dua nonhomogen yang berbentuk

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

dimana *p* dan *q* konstanta-konstanta serta *f(x)* fungsi di dalam *x*.

Solusi umum persamaan diferensial orde dua nonhomogen merupakan jumlah dari solusi persamaan diferensial homogen (Y_h) dan solusi pelengkap (Y_p) yang dituliskan dengan

$$Y = Y_h + Y_p.$$

Y_h didapat dari penyelesaian homogen persamaan diferensial tersebut dan Y_p dicari dengan salah satunya yaitu metode koefisien tak tentu.

Metode Koefisien Tak Tentu

Jika *f(x)* adalah fungsi polinomial, eksponensial, sinus, atau cosinus, maka solusi pelengkap Y_p dimisalkan sebagai jumlah dari *f(x)* dan semua turunannya. Selanjutnya, Y_p'', Y_p', dan Y_p disubstitusikan ke persamaan diferensial tersebut untuk menghitung koefisiennya.

Adapun pemisalan Y_p yaitu disajikan dalam tabel berikut:

f(x)	$\mathbf{Y_p}$
x^n	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_0$
e^{ax}	$A e^{ax}$
$x e^{ax}$	$A e^{ax} + Bx e^{ax}$
$\sin ax$	$A \sin ax + B \cos ax$
$\cos ax$	$A \sin ax + B \cos ax$

Tabel 2.1. Solusi pelengkap persamaan diferensial.

Contoh 2.4.: Tentukan penyelesaian dari $y'' + 5y' + 6y = -7e^{4x}$!

Persamaan karakteristik dari persamaan homogennya $r^2 + 5r + 6 = 0$. Dengan akar-akarnya yaitu $r_1 = -3\ dan\ r_2 = -2$, sehingga didapat solusi homogennya, $Y_h = Ae^{-3x} + Be^{-2x}$.

Adapun solusi pelengkapnya, $Y_p = Ce^{4x}\ dengan\ Y_p' = 4Ce^{4x}\ dan\ Y_p'' = 16Ce^{4x}$. lalu substitusikan ke persamaan, maka diperoleh,

$$(16Ce^{4x}) + 5(4Ce^{4x}) + 6(Ce^{4x}) = -7e^{4x}$$

$$42Ce^{4x} = -7e^{4x}$$

$$C = -\frac{1}{6}.$$

Didapat solusi pelengkapnya $Y_p = -\frac{1}{6}e^{4x}$.

Jadi, solusi umum dari $y'' + 5y' + 6y = -7e^{4x}$ adalah

$$Y = Ae^{-3x} + Be^{-2x} - \frac{1}{6}e^{4x}.$$

2.7. Rangkaian Listrik

Definisi 2.7.1. Rangkaian Listrik (Mohammad Ramdhani, 2005:1)

Rangkaian listrik adalah suatu kumpulan elemen atau komponen listrik yang saling dihubungkan dengan cara-cara tertentu dan paling sedikit mempunyai satu lintasan tertutup. Adapun yang dimaksud dengan satu lintasan tertutup adalah satu lintasan ketika dimulai dari titik yang dimaksud akan kembali lagi ke titik tersebut tanpa terputus dan tidak memandang seberapa jauh atau dekat lintasan yang ditempuh.

Definisi 2.7.2. Elemen Rangkaian (Mohammad Ramdhani, 2005:1)

Elemen aktif adalah elemen yang menghasilkan energi, dalam hal ini adalah sumber tegangan(v) dan sumber arus (i), sedangkan elemen pasif adalah elemen yang tidak dapat menghasilkan energi dalam hal ini adalah resistor (R), induktor (L), kapasitor (C).

Definisi.2.7.3. Arus Listrik (Mohammad Ramdhani, 2005: 2)

Arus merupakan perubahan kecepatan muatan (q) terhadap waktu atau muatan yang mengalir dalam satuan waktu dengan simbol $\boldsymbol{i}$ (dari kata Perancis : *intensite*), dengan kata lain arus adalah muatan yang bergerak. Selama muatan tersebut bergerak maka akan muncul arus tetapi ketika muatan tersebut diam maka arus pun akan hilang. Muatan akan bergerak jika ada energi luar yang mempengaruhinya.

Secara matematis arus didefinisikan : $\boldsymbol{i = \frac{dq}{dt}}$ dengan satuan A (Ampere) dimana,

$\boldsymbol{dq}$ = laju perubahan muatan tergantung satuan waktu.

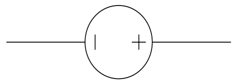
Definisi.2.7.4. Tegangan Listrik (Mohammad Ramdhani, 2005: 3)

Tegangan atau beda potensial *(voltage)* adalah kerja yang dilakukan untuk menggerakkan satu muatan listrik sebesar satu coulomb pada elemen atau komponen dari satu terminal/kutub ke terminal/kutub lainnya.

Keterkaitan antara kerja yang dilakukan sebenarnya adalah energi yang dikeluarkan, sehingga pengertian di atas dapat dipersingkat bahwa tegangan (v) adalah energi (W) per satuan muatan (q).

Secara matematis tegangan didefinisikan : $\boldsymbol{v = \frac{dW}{dq}}$, dan satuan V (Volt).

Pada rangkaian, tegangan disimbolkan dengan



Gambar 2.1.

Tegangan dikatakan turun jika bergerak dari beda potensial yang lebih tinggi (+) ke potensial yang lebih rendah (-). Sementara itu, tegangan dikatakan naik jika bergerak dari beda potensial yang lebih rendah (-) ke potensial yang lebih tinggi (+).

Definisi.2.7.5. Resistor (Mismail Budi, 1995:13)

Resistor (R) adalah elemen rangkaian listrik yang mempunyai fungsi sebagai penghambat arus, pembagi arus , dan pembagi tegangan.

Jika suatu resistor dilewati oleh sebuah arus maka pada kedua ujung dari resistor tersebut akan menimbulkan beda potensial atau tegangan.

$$\boldsymbol{v_R = iR} \qquad \text{satuannya ohm } (\Omega).$$

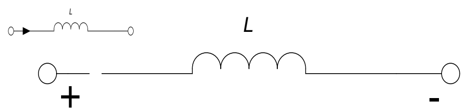
Pada rangkaian, resistor disimbolkan dengan

Gambar 2.2.

Definisi.2.7.6. Induktor (Mismail Budi, 1995:13)

Induktor (L) atau lilitan adalah elemen rangkaian listrik yang mempunyai sifat dapat menyimpan energi dalam bentuk medan magnet. Satuan induktor: Henry (H). Dengan $\boldsymbol{v_L = L\frac{di}{dt}}$.

Pada rangkaian, induktor disimbolkan dengan



Gambar 2.3.

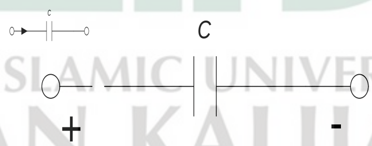
Definisi.2.7.7. Kapasitor (Mismail Budi, 1995:13)

Kapasitor (C) adalah elemen rangkaian listrik yang mempunyai fungsi untuk membatasi arus DC yang mengalir pada kapasitor tersebut, dan dapat menyimpan energi dalam bentuk medan listrik.

Jika sebuah kapasitor dilewati oleh sebuah arus maka pada kedua ujung kapaistor tersebut akan muncul beda potensial atau tegangan, dimana secara matematis dinyatakan :

$$\boldsymbol{i(t) = i_c = c\frac{dv_c}{dt}}.$$

Satuan dari kapasitor : Farad (F) dan disimbolkan dengan



Gambar 2.4.

2.8. Hukum-hukum Rangkaian

Hukum Ohm (Mohammad Ramdhani, 2005: 21)

Tegangan yang melintasi bahan pengantar resistor adalah berbanding lurus dengan arus yang mengalir melalui bahan tersebut.

Secara matematis : $v = iR$.

Hukum I Kirchoff (Hukum Arus Kirchoff) (Mohammad Ramdhani, 2005: 21).

Jumlah arus yang memasuki suatu percabangan atau node atau simpul sama dengan arus yang meninggalkan percabangan atau node atau simpul, dengan kata lain jumlah aljabar semua arus yang memasuki sebuah percabangan atau node atau simpul sama dengan nol.

Secara matematis :

Σ Arus pada satu titik percabangan = $\sum \boldsymbol{i} = \mathbf{0}$.

Σ Arus yang masuk percabangan = Σ Arus yang keluar percabangan.

Hukum II Kirchoff (Hukum Tegangan Kirchoff) (Mohammad Ramdhani, 2005: 22).

Jumlah tegangan pada suatu lintasan tertutup (*loop)* sama dengan nol, atau penjumlahan tegangan pada masing-masing komponen penyusunnya yang membentuk satu lintasan tertutup akan bernilai sama dengan nol.

Secara matematis :

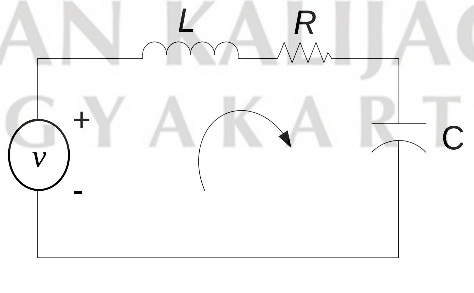
$$\sum \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$$

Dari Hukum Tegangan Kirchoff (HTK) didapatkan pernyataan-pernyataan yang merupakan prosedur analisis rangkaian.

1. Menentukan *loop* dan arah *loop* pada rangkaian.
2. Jika penurunan tegangan dari sumber tegangan yang searah dengan loop diberi tanda negatif *(-v)*.
3. Penurunan tegangan dari sumber tegangan yang berlawanan arah dengan loop diberi tanda positif *(+v)*.

4. Penurunan tegangan pada resistor yang dialiri arus i yang searah dengan loop merupakan perkalian resistor dengan arus tersebut dan diberi tanda positif *(+iR).*
5. Penurunan tegangan pada resistor yang dialiri arus i yang berlawanan arah dengan loop diberi tanda negatif *(-iR).*
6. Penurunan tegangan pada induktor yang dialiri arus i yang searah dengan loop merupakan perkalian induktor dengan kecepatan perubahan arus yang melalui induktor dan diberi tanda positif $\left(+L\frac{di}{dt}\right)$.
7. Penurunan tegangan pada induktor yang dialiri arus i yang berlawanan arah diberi tanda negatif $\left(-L\frac{di}{dt}\right)$.
8. Penurunan tegangan pada kapasitor yang dialiri arus i yang searah diberi tanda positif $(+v_c)$.
9. Penurunan tegangan pada kapasitor yang dialiri arus i yang berlawanan arah diberi tanda negatif $(-v_c)$.

Contoh 2.5.:



Gambar 2.5.

Pada gambar 2.5. prosedur analisis rangkaian menggunakan hukum II Kirchoff (HTK):

a. Penurunan tegangan melewati sumber tegangan v yang searah dengan loop, maka tegangan bertanda negatif (-v)

b. Melewati induktor yang searah dengan loop, maka bertanda positif $\left(+L\frac{di}{dt}\right)$.

c. Melewati resistor yang searah dengan loop, maka bertanda positif (+iR)

d. Melewati kapasitor yang searah dengan loop, maka bertanda positif $(+v_c)$.

Lalu dengan menggunakan HTK diperoleh,

$$-v + L\frac{di}{dt} + iR + v_c = 0.$$

Untuk $i(t) = C\frac{dv_c}{dt}$, maka

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i(t) \Leftrightarrow v_c = \frac{1}{C}\int i\,(t)dt.$$

Diperoleh persamaan untuk gambar 2.6.

$$-v + L\frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}\int i\,(t)dt = 0.$$

BAB III

TRANSFORMASI LAPLACE

3.1. Definisi Transformasi Laplace

Jika *f(t)* adalah suatu fungsi dalam t yang terdefinisi untuk $t \geq 0$, maka transformasi Laplace dari *f(t)*, dinotasikan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}$, didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \qquad (3.1)$$

dimana *s* adalah suatu variabel yang nilainya dipilih sedemikian agar integral semi-infinitnya selalu konvergen (K. A. Stroud dan Dexter J. Booth, 2003 : 348).

Ada beberapa notasi lain yang digunakan selain $\mathcal{L}\{f(t)\}$ untuk notasi transformasi Laplace yaitu: $F(s), \mathcal{L}f,$ atau $\hat{f}(s)$. Sementara itu, nilai-nilai *s* yang memenuhi syarat adalah nilai dimana integral untuk nilai integral tersebut konvergen, sehingga transformasi Laplace-nya ada.

Agar dapat menentukan syarat cukup untuk *f(t)* yang menjamin keberadaan $\mathcal{L}\{f(t)\}$, diperlukan konsep kekontinuan bagian demi bagian (*piecewise continuity)*, dan orde eksponensial *(exponential order)*.

3.1.1. Kekontinuan Bagian Demi Bagian (Murray R. Spiegel, 1983: 107)

Suatu *f(t)* dikatakan kontinu bagian demi bagian pada suatu interval jika:

3.1.1.1. interval tersebut dapat dibagi menjadi sejumlah berhingga interval bagian dimana fungsi *f(t)* kontinu pada interval bagian tersebut, dan

3.1.1.2. limit fungsi *f(t)* untuk *t* mendekati titik akhir setiap interval bagiannya bernilai hingga.

Berikut ini ilustrasi tentang kontinu bagian demi bagian.

Gambar 3.1.1.

3.1.2. Orde Eksponensial (Steven T. Karris, 2009: 4-2)

Suatu fungsi *f(t)* dikatakan berada dalam orde eksponensial untuk $t \geq 0$ jika terdapat konstanta $M > 0$ dan suatu konstanta *α*, sehingga $|e^{-\alpha t} f(t)| \leq M$ atau $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

3.1.3. Syarat Cukup agar Transformasi Laplace Ada

Teorema 3.1.3.1. (J. David Logan, 2000: 137). Jika *f(t)* kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berhingga $0 \leq t \leq T$ dan dalam tingkat eksponensial α untuk $t > T$, maka $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada untuk $s > \alpha$.

Bukti:

Diketahui:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Fungsi *f(t)* kontinu bagian demi bagian untuk $0 \le t \le T$, maka $e^{-st}f(t)$ juga kontinu, sehingga $\int_0^T e^{-st} f(t)dt$ ada, dan dengan menggunakan orde eksponensial ($|f(t)| \le Me^{\alpha t}$), diperoleh:

$$\begin{aligned} \left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt\right| &\le \int_T^\infty e^{-st} |f(t)|dt \\ &\le \int_T^\infty e^{-st} Me^{\alpha t} dt \\ &\le M\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = M\left(-\frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)t}\Big|_0^\infty\right) \\ &\le M\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) = \frac{M}{s-\alpha}. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Jadi, untuk $s > \alpha$, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada■

Teorema 3.1.3.2. (David L. Powers, 2006: 364). Jika f(t) memenuhi teorema 3.1.3.1., maka $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = 0$.

Bukti:

Diketahui:

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \le \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^T e^{-st} |f(t)|dt + \int_T^\infty e^{-st} |f(t)|dt.$$

Untuk fungsi *f(t)* yang kontinu bagian demi bagian pada $0 \le t \le T$, maka f(t) terbatas, yaitu: $|f(t)| \le K$ untuk suatu konstanta *K* dan dari persamaan (3.2) maka,

$$|\mathcal{L}\{f(t)\}| \le \int_0^T e^{-st} |f(t)|dt + \int_T^\infty e^{-st} |f(t)|dt$$

$$\leq \int_0^T e^{-st}\, K dt + \frac{M}{s-\alpha}$$

$$\leq \frac{K}{s-\alpha} + \frac{M}{s-\alpha} = \frac{K+M}{s-\alpha}.$$

Jika diambil limitnya untuk $s \to \infty$, akibatnya

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{s\to\infty} \frac{K+M}{s-\alpha} = 0 \blacksquare \qquad (3.3)$$

Ini mengakibatkan bahwa jika $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} \neq 0$ maka *f(t)* tidak memenuhi syarat teorema 3.1.3.1.

Syarat-syarat di atas merupakan syarat cukup untuk menjamin transformasi Laplace ada karena transformasi Laplace dapat ada atau tidak walaupun syarat di atas tidak dipenuhi. Agar transformasi Laplace bisa ada maka integran $e^{-st} f(t)$ harus konvergen saat $t \to \infty$ (nilai s harus ditentukan agar $e^{-st} f(t)$ konvergen saat $t \to \infty$).

3.2. Rumus Transformasi Laplace untuk Fungsi Elementer

Berikut ini diberikan rumus transformasi Laplace untuk fungsi elementer.

3.2.1. ***f (t)=1*, maka** $\mathcal{L}\{\mathbf{1}\} = \frac{1}{s},\ \ s > 0.$

Bukti:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} (1) dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s}(0-1)$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s},\ \text{dengan}\ \ s > 0\ \blacksquare \qquad (3.4)$$

Dengan demikian dapat ditentukan transformasi Laplace untuk *f(t)*= *k*, (*k*: konstanta), yaitu: $\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s},\ \ s > 0.$

Bukti:

$\mathcal{L}\{k\} = \int_0^\infty e^{-st}(k)dt,$ karena *k* konstanta, maka:

$\mathcal{L}\{k\} = k \cdot (\int_0^\infty e^{-st}dt),$ dari persamaan (3.4) diperoleh:

$$\mathcal{L}\{k\} = k \cdot L\{1\} = \frac{k}{s}, \text{dengan}\ s > 0\ \blacksquare \qquad (3.5)$$

3.2.2. *f(t)*= *t*, maka $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ \ s > 0.$

Bukti:

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}(t)dt$$

$$= -\frac{1}{s}(t \cdot e^{-st})\Big|_0^\infty - \left(-\frac{1}{s}\right)\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[(t \cdot e^{-st}) - \left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s}\left[(0) + \frac{1}{s}(0-1)\right]$$

$$= -\frac{1}{s}\left[-\frac{1}{s}\right]$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2},\ \text{dengan}\ s > 0\ \blacksquare \qquad (3.6)$$

3.2.3. $\boldsymbol{f(t) = t^p;\ p > -1,}$ **maka** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\tau(p+1)}{s^{p+1}},\ s > 0.}$

Bukti:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}(t^p)dt.$$

Misalkan $u = st$, maka:

$du = s\,dt$ atau $dt = \frac{du}{s}$, dan

$t = \frac{u}{s}$ dengan $s > 0$, sehingga:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left(\frac{u}{s}\right)^p \left(\frac{du}{s}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^p \cdot \frac{1}{s^p} \cdot \frac{1}{s} du$$

$= \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty e^{-u} \cdot u^p\, du$, menggunakan sifat fungsi Gamma diperoleh:

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{1}{s^{p+1}} \cdot \tau(p+1)$$

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\tau(p+1)}{s^{p+1}},\ \text{dengan } s > 0\ \blacksquare \tag{3.7}$$

3.2.4. $\boldsymbol{f(t) = t^n;}$ ***n* : bilangan bulat positif, maka** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0.}$

Bukti:

Dari sifat fungsi Gamma dipunyai:

$\tau(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^p\, dx$, dengan pengintegralan parsial didapat:

$$\tau(p+1) = x^p \cdot (-e^{-x})\big|_0^\infty - \int_0^\infty p x^{p-1} \cdot (-e^{-x})dx$$

$$= (0-0) + p \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$$

$$= p\left(\int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x} dx\right);\ \textit{(fungsi Gamma):}$$

$\tau(p+1) = p(\tau(p))$.

Jika disubstitusikan $p = n$, maka:

$\tau(n+1) = n\big(\tau(n)\big)$

$\tau(n+1) = n \cdot (n-1) \cdot \tau(n-1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \tau(n-2)$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots\cdots 1 \cdot \tau(1).$$

Dipunyai $\tau(1) = 1$, sehingga:

$\tau(n+1) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots\cdots 1 \cdot 1 = n!$

Jadi, $\tau(n+1) = n!$, maka berdasarkan persamaan (3.7) diperoleh:

$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$ ■ (3.8)

3.2.5. $\boldsymbol{f(t) = e^{at};\ a}$**: konstanta, maka** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, s >} a$.

Bukti:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= -\frac{1}{s-a} \cdot \left[e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s-a} \cdot (0-1)$$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$, dengan $(s-a) > 0$ atau $s > a$ ■ (3.9)

3.2.6. $\boldsymbol{f(t) = \sin at}$ **, maka** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}}$ **, dengan** $\boldsymbol{s} > 0$.

Bukti:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt$$

$$= \sin at \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (a\cos at)\cdot\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\sin at\,(e^{-st})\right)_0^\infty - \left(\int_0^\infty (a\cos at)\cdot e^{-st}\,dt\right)\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\sin at\,(e^{-st})\right)_0^\infty - (*)\right]$$

dimana:

$$(*) = \left\{a\cos at\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty - \left(\int_0^\infty (-a^2\sin at)\cdot\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt\right)\right\}.$$

Diperoleh:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\sin at\,(e^{-st})\right)_0^\infty - \left\{a\cos at\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty -\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\int_0^\infty (-a^2\sin at)\cdot\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt\right)\right\}\right].$$

$$= -\frac{\left(\sin at\,(e^{-st})\right)_0^\infty}{s} - \frac{a\cos at\,(e^{-st})|_0^\infty}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\left(\int_0^\infty (\sin at)e^{-st}\,dt\right).$$

Jika kedua ruas dijumlahkan dengan $\frac{a^2}{s^2}\left(\int_0^\infty (\sin at)e^{-st}\,dt\right)$, diperoleh:

$$\int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt + \frac{a^2}{s^2}\left(\int_0^\infty (\sin at)\cdot e^{-st}\,dt\right)$$

$$= -\frac{\left(\sin at\,(e^{-st})\right)_0^\infty}{s} - \frac{a\cos at\,(e^{-st})|_0^\infty}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt$$

$$= -\frac{(e^{-st})s(\sin at)_0^\infty}{s^2} - \frac{(e^{-st})a\cos at|_0^\infty}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+a^2)\int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt = \{(e^{-st})[-s\sin at - a\cos at]\}_0^\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt = \frac{\{(e^{-st})[-s\sin at - a\cos at]\}_0^\infty}{(s^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt = \frac{\{(e^{-st})[-s\sin at - a\cos at]\}_0^\infty}{(s^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt$$

$$= \left(\frac{(e^{-s.\infty})[-s\sin a.\infty - a\cos a.\infty] - (e^0)[-s\sin 0 - a\cos 0]}{(s^2+a^2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt = \left(\frac{0}{(s^2+a^2)} - \frac{-a}{(s^2+a^2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\sin at)dt = \frac{a}{(s^2+a^2)},$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\sin at\} == \frac{a}{(s^2+a^2)}$, dengan $s > 0$■ (3.10)

Metode lain:

$\sin at = \frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})$, sehingga:

$\mathcal{L}\{\sin at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2i}\left(e^{iat} - e^{-iat}\right)\right\}$. Dari persamaan (3.9) didapat:

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{(s+ia)-(s-ia)}{s^2-(ia)^2}\right)$$

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{1}{2i}\left(\frac{2ia}{s^2+a^2}\right) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{dengan } s > 0 ■$$

3.2.7. $\boldsymbol{f(t) = \cos at}$, **maka** $\boldsymbol{\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}}$, **dengan** $\boldsymbol{s} > 0$.

Bukti:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt$$

$$= \cos at \cdot \left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-a\sin at)\cdot\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\cos at\,(e^{-st})\right)_0^\infty + \left(\int_0^\infty (a\sin at)\cdot e^{-st}\,dt\right)\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\cos at\,(e^{-st})\right)_0^\infty - (**)\right]$$

dimana:

$$(**) = \left\{\frac{a}{s}\sin at\,(e^{-st})\Big|_0^\infty - a\left(\int_0^\infty\left(\frac{a}{s}\cos at\right)\cdot e^{-st}\,dt\right)\right\}.$$

Diperoleh:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt$$

$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\left[\left(\cos at\,(e^{-st})\right)_0^\infty - \left\{\frac{a}{s}\sin at\cdot e^{-st}\Big|_0^\infty - \left(\int_0^\infty\left(\frac{a^2}{s}\cos at\right)\cdot e^{-st}\,dt\right)\right\}\right].$$

$$= -\frac{\left(\cos at\,(e^{-st})\right)_0^\infty}{s} + \frac{a\sin at\,(e^{-st})|_0^\infty}{s^2} - \frac{a^2}{s^2}\left(\int_0^\infty(\cos at)e^{-st}\,dt\right).$$

Jika kedua ruas dijumlahkan dengan $\frac{a^2}{s^2}\left(\int_0^\infty(\cos at)e^{-st}\,dt\right)$, diperoleh:

$$\int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt + \frac{a^2}{s^2}\left(\int_0^\infty(\cos at)\cdot e^{-st}\,dt\right)$$

$$= \frac{-s\left(\cos at\,(e^{-st})\right)_0^\infty + a\sin at\,(e^{-st})|_0^\infty}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{s^2+a^2}{s^2}\right)\int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt = \frac{(e^{-st})(-s\cos at + a\sin at)}{s^2}\Bigg|_0^\infty$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt = \frac{\{(e^{-st})[-s\cos at + a\sin at]\}_0^\infty}{(s^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt$$

$$= \left(\frac{(e^{-s.\infty})[-s\cos a.\infty - a\sin a.\infty] + (e^0)[-s\cos 0 - a\sin 0]}{(s^2+a^2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt = \left(\frac{0}{(s^2+a^2)} - \frac{-s}{(s^2+a^2)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}(\cos at)dt = \frac{s}{(s^2+a^2)},$$

Jadi, $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{a}{(s^2+a^2)}$, dengan $s > 0$■ (3.11)

Metode lain:

$\cos at = \frac{1}{2}(e^{iat} + e^{-iat})$, sehingga:

$\mathcal{L}\{\cos at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\left(e^{iat} + e^{-iat}\right)\right\}$. Dari persamaan (3.9) didapat:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ia} + \frac{1}{s+ia}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+ia)+(s-ia)}{s^2-(ia)^2}\right)$$

$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2+a^2}\right) = \frac{s}{s^2+a^2}$ dengan $s > 0$■

3.2.8. $f(t) = \sinh at$, maka $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$, dengan $s > |a|$.

Bukti:

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\sinh at)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right)dt$$

$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-st}(e^{at})dt - \int_0^\infty e^{-st}(e^{-at})dt\right)$, dari persamaan (3.9), maka:

$$= \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{-at}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{s^2-a^2}\right) = \left(\frac{a}{s^2-a^2}\right), \text{dengan } s > |a| \blacksquare \qquad (3.12)$$

3.2.9. $f(t) = \cosh at$, maka $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$, dengan $s > |a|$

Bukti:

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cosh at)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at}+e^{at}}{2}\right)dt$$

$= \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-st}(e^{at})dt + \int_0^\infty e^{-st}(e^{-at})dt\right)$, dari persamaan (3.9), maka:

$$= \frac{1}{2}(\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2-a^2}\right) = \left(\frac{s}{s^2-a^2}\right), \text{dengan } s > |a| \blacksquare \qquad (3.13)$$

Berdasarkan pemaparan di atas, berikut disajikan tabel yang merangkum rumus transformasi Laplace untuk fungsi-fungsi elementer.

No	***f(t)***	***F(s)***
1	1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
2	k	$\frac{k}{s}, \quad s > 0$

3	t	$\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$
4	$t^p;\ p > -1,$	$\frac{\tau(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$
5	$t^n; \quad n = 1,2,3, \ldots.$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
6	e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
7	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
8	$\cos \mathrm{at}$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
9	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$
10	$\cosh \mathrm{at}$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \|a\|$

Tabel 3.2.1. Rumus transformasi Laplace untuk fungsi elementer (Clive Maxfield, dkk. 2008 : 208).

3.3. Invers Transformasi Laplace

Jika *F(s)* = $\mathcal{L}\{f(t)\}$ menyatakan transformasi Laplace dari fungsi *f (t),* fungsi f yang dinyatakan dengan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, disebut invers transformasi Laplace *F(s)* sehingga, (Prayudi, 2006: 235):

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{3.14}$$

dimana $\mathcal{L}^{-1}$ disebut sebagai *operator invers transformasi Laplace*.

Invers transformasi Laplace juga dapat diekspresikan sebagai sebuah integral invers kompleks (Joseph A. Edminister, 2003: 398),:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} F(s)e^{st}\, ds. \qquad (3.15)$$

Pada dasarnya menghitung invers transformasi Laplace dengan persamaan (3.15) terlalu sulit, sehingga digunakan cara lain dengan menggunakan tabel transformasi Laplace *(Tabel 3.2.1.).*

Contoh 3.1.: Dari Tabel 3.2.1.: no.6 diperoleh $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$; maka:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}.$$

Contoh 3.2.: Jika $F(s) = \frac{3}{s+2}$, maka: $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\} = 3e^{-2t}$.

3.3.1. Beberapa Rumus Transformasi Laplace Invers

Hasil-hasil dalam tabel berikut untuk invers transformasi Laplace diperoleh secara langsung dari Tabel 3.2.1. (K. A. Stourd dan Dexter J. Both, 2003: 359):

No	$\boldsymbol{F(s)}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{k}{s}$	k
3	$\frac{1}{s^2}$	t
4	$\frac{1}{s^{p+1}}$	$\frac{t^p}{\tau(p+1)}$; $p > -1$,
5	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$; $n = 1,2,3, \ldots.$

6	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
7	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
8	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
9	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
10	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

Tabel 3.2.2. Rumus Invers transformasi Laplace.

3.4. Sifat-Sifat Transformasi Laplace

Adapun sifat-sifat dari transformasi Laplace fungsi *f(t)* antara lain:

3.4.1. Sifat Linear

Jika $f_1(t), f_2(t), , \ldots f_n(t)$ masing-masing mempunyai transformasi Laplace $F_1(s), F_2(s), \ldots F_n(s)$ dan $c_1, c_2, \ldots c_n$ adalah konstanta-konstanta, maka:

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t)]dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty f_1(t) e^{-st} dt + c_2 \int_0^\infty f_2(t) e^{-st} dt + \cdots$$

$$+ c_n \int_0^\infty f_n(t) e^{-st} dt$$

$$= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \cdots + c_n F_n(s). \qquad (3.16)$$

Demikian juga untuk invers transformasi Laplace, sifat linear juga berlaku.

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s) + \cdots + c_nF_n(s)\}$$

$$= c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} + \cdots + c_n\mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$$

$$= c_1f_1(t) + c_2f_2(t) + \cdots + c_nf_n(t). \quad (3.17)$$

3.4.2. Sifat Translasi/Pergeseran pada Sumbu *s*

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ adalah transformasi Laplace dari suatu fungsi *f(t)*, maka:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt$$

$$= F(s-a). \quad (3.18)$$

Akibatnya berlaku juga, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$. (3.19)

Sifat ini dinamakan *translasi/pergeseran pada sumbu s* dari suatu transformasi Laplace atau dikenal juga sebagai *translasi pertama*. Salah satu kegunaan dari sifat ini yaitu untuk mendapat transformasi Laplace suatu fungsi dengan memanfaatkan hasil dari transformasi Laplace suatu fungsi yang telah diketahui hasilnya tanpa menggunakan definisi.

Berikut perbandingan penggunaan definisi (persamaan (3.1)) dengan sifat translasi/pergeseran pada sumbu *s*.

Diketahui $f(t) = e^{at}\cos bt$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}cosbtdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}cosbt\, dt$$

$$= -\frac{\left[\left(e^{-(s-a)t}\right)[(s-a)\cos bt + b\sin bt]\right]_0^\infty}{((s-a)^2+b^2)}$$

$$= \frac{(s-a)}{((s-a)^2+b^2)} - \lim_{t\to\infty} \frac{(s-a)\cos bt + b\sin bt}{e^{(s-a)t}((s-a)^2+b^2)}.$$

Untuk $t \to \infty$ nilai $|\cos \mathrm{bt}| \leq 1$, dan $|\sin \mathrm{bt}| \leq 1$, maka nilai dari $(s-a)\cos bt + b\sin bt \leq |(s-a)+b|$, sehingga:

$\lim_{t\to\infty} \frac{(s-a)\cos bt + b\sin bt}{e^{(s-a)t}((s-a)^2+b^2)} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{|(s-a)+b|}{e^{(s-a)t}((s-a)^2+b^2)} = 0;$ untuk s, a,dan b yang nilainya terbatas. Jadi,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{(s-a)}{((s-a)^2+b^2)}. \quad (3.20)$$

Lalu, jika menggukan persamaan (3.18), maka dengan mudah dapat ditentukan $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}$. Caranya:

Telah diketahui bahwa $\mathcal{L}\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$ (lihat Tabel 3.2.1), maka:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\cos bt\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\cos bt\,dt = F(s-a),$$

karena $F(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$ (Tabel 3.2.1), maka: $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$.

3.4.3. Sifat Translasi /Pergeseran pada Sumbu *t*

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ adalah transformasi Laplace dari suatu fungsi *f(t)*, dan jika didefinisikan $g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$, maka:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)dt - \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt.$$

Misalkan $v = t - a,$ maka $t = v + a$ dan $dv = dt$. diperoleh:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-s(v+a)} f(v)dv$$

$$= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-sv} f(v)dv$$

$$= e^{-as} F(s). \tag{3.21}$$

Berlaku juga untuk inversnya, yaitu: $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-sa}F(s)\} = g(t)$. (3.22)

3.4.4. Sifat Pengubahan Skala

Teorema 3.4.4.1. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ adalah transformasi Laplace dari suatu fungsi *f(t)*, maka: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$.

Bukti:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)dt$$

Misalkan $u = at,$ maka $t = \frac{u}{a}$, dan $du = a\,dt$ atau $dt = \frac{1}{a}du$. diperoleh:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-\frac{su}{a}} f(u)\left(\frac{1}{a}du\right)$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{s}{a}\right)t} f(u)du$$

$$= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \blacksquare \tag{3.23}$$

Berlaku juga untuk inversnya, yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = L\{af(t)\}. \tag{3.24}$$

3.4.5. Perkalian dengan t^n

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ adalah transformasi Laplace dari suatu fungsi *f(t)*, maka untuk *n=1,2,3*....berlaku:

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ maka jika diturunkan terhadap *s* didapat:

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \left(-te^{-st}f(t)\right)dt$$

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st}[tf(t)]dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

atau $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s) = (-1)^1F'(s)$ (3.25)

ini membuktikan benar untuk *n=1*. Dengan menggunakan induksi matematika, jika untuk *n=k* benar maka akan dibuktikan *n=k+1* benar, yaitu anggap:

$$\mathcal{L}\{t^kf(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(t^kf(t)\right)dt = (-1)^kF^k(s) \quad (3.26)$$

maka:

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\left(t^kf(t)\right)dt = \frac{d}{ds}(-1)^kF^k(s) = (-1)^kF^{k+1}(s)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty -te^{-st}\left(t^kf(t)\right)dt = (-1)^kF^{k+1}(s)$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^\infty e^{-st}\left(t^{k+1}f(t)\right)dt = (-1)^kF^{k+1}(s)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{-st}\left(t^{k+1}f(t)\right)dt = (-1)^{k+1}F^{k+1}(s). \quad (3.27)$$

Kesimpulannya, jika persamaan (3.25) benar, maka persamaan (3.26) benar. Dengan mengganti *k+1=n*, maka persamaan (3.27) benar.

Sifat ini disebut juga sebagai *diferensial transformasi Laplace*.

3.4.6. Pembagian oleh *t*

Teorema 3.4.6.1. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka: $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$.

Bukti:

Misalkan $g(t) = \frac{f(t)}{t}$, maka $f(t) = tg(t)$. maka:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -\frac{d}{ds}g(s);$$ *(dari persamaan 3.25)*

Integralkan kedua ruas, maka diperoleh:

$$\int_{\infty}^{s} f(u)du = \int_{\infty}^{s} -\frac{d}{ds}g(s) = -g(s)$$

$$\Leftrightarrow -\int_{\infty}^{s} f(u)du = g(s) \Leftrightarrow g(s) = \int_{s}^{\infty} f(u)du.$$

Jadi,

$$g(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\frac{f(t)}{t}\} = \int_{s}^{\infty} f(u)du \blacksquare \tag{3.28}$$

Sifat ini disebut juga sebagai *integral transformasi Laplace*.

3.4.7. Fungsi-fungsi Periodik

Misalkan *f(t)* mempunyai periode $T > 0$, sehingga $F(t+T) = f(t)$, maka:

$$\mathcal{L}\{f(T)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_{0}^{T} e^{-st} f(t)dt + \int_{T}^{2T} e^{-st} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)dt + \cdots$$

Misalkan $t = v$ pada integral pertama, $t = v + T$ pada integral kedua, $t = v + 2T$ pada integral ketiga, dan seterusnya, maka:

$$\mathcal{L}\{f(T)\} = \int_{0}^{T} e^{-sv} f(t)dv + \int_{0}^{T} e^{-s(v+T)} f(v+T)dv$$

$$+ \int_{0}^{T} e^{-s(v+2T)} f(v+2T)dv + \cdots$$

$$= \int_{0}^{T} e^{-sv} f(t)dv + e^{-sT}\int_{0}^{T} e^{-sv} f(v)dv + e^{-s2T}\int_{0}^{T} e^{-sv} f(v)dv$$

$$+ \cdots$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + \cdots)\int_{0}^{T} e^{-sv} f(v)dv.$$

$(1 + e^{-sT} + e^{-s2T} + \cdots)$ merupakan deret geometri dengan $a = 1$ dan $r = e^{-sT}$, sehingga:

$$\mathcal{L}\{f(T)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-sv} f(v) dv. \quad (3.29)$$

3.4.8. Teorema Konvolusi

Teorema 3.4.7.1. Jika *f(t)* dan *g(t)* terdefinisi untuk $t \geq 0$, serta $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dan $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, maka: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) g(t-u) dt\right\} = F(s)G(s)$.

Teorema di atas disebut *teorema Konvolusi* dan integral tersebut dinamakan sebagai *Konvolusi* dari f ke g, dan ditulis:

$$f * g = \int_0^t f(t) g(t-u) dt. \quad (3.30)$$

Bukti:

Diketahui $F(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u) du$ dan $G(s) = \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv$.

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \cdot \int_0^\infty e^{-sv} g(v) dv$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u) \cdot g(v) du dv.$$

Misalkan $t = u + v$ $maka$ $v = t - u$ dan $dv = dt$, sehingga:

$$F(s)G(s) = \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^\infty e^{-st} f(u) \cdot g(t-u) du dt$$

$$= \int_{t=0}^\infty e^{-st} \left(\int_{u=0}^\infty f(u) \cdot g(t-u) du\right) dt$$

$$F(s)G(s) = \mathcal{L}\left\{\int_{u=0}^\infty f(u) \cdot g(t-u) du\right\} \blacksquare \quad (3.31)$$

Berlaku juga untuk inversnya, yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \int_{u=0}^\infty f(u) \cdot g(t-u) du. \quad (3.32)$$

3.5. Transformasi Laplace Turunan Fungsi

Teorema 3.5.1. (J. David Logan, 2000: 137): Jika fungsi *f(t)* kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan mempunyai turunan *f'(t)* yang kontinu sepotong-sepotong pada interval berhingga, maka:

$$(i) \quad \mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{3.33}$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \tag{3.34}$$

Bukti:

(i) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt.$

Misalkan $u = e^{-st} \rightarrow du = -se^{-st}$ dan $dv = f'(t)dt \rightarrow v = f(t),$ dengan integral parsial $(\int u\,dv = uv - \int v\,du),$ maka:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = e^{-st}f(t)|_0^\infty + \int_0^\infty sf(t)e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = 0 - f(0) + s(\int_0^\infty f(t)e^{-st})$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \blacksquare$$

(ii) Dari hasil *(i)*, jika dimisalkan $g(t) = f'(t) \rightarrow g'(t) = f''(t)$, sehingga:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

Jadi, $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \blacksquare$$

Teorema 3.5.2. (Prayudi, 2006: 252). Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ dengan *f(t)*, *f'(t)*, *f''(t)*... $f^{n-1}(t)$ kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan $f^n(t)$ kontinu sepotong-sepotong pada interval berhingga $0 \leq t \leq N,$ maka transformasi Laplace dari turunan fungsi $f^{(n)}(t)$ diberikan oleh:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0). \quad (3.35)$$

Bukti:

Dari persamaan (3.34) dan (3.35) dipunyai: $\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ dan $\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$. Jika diperluas, maka diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{f'''(t)\right\} = s\left[s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\right] - f''(0)$$

$$\mathcal{L}\{f'''(t) = s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \blacksquare \quad (3.36)$$

Selanjutnya,

$$\mathcal{L}\left\{f^{iv}(t)\right\} = s\left[s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)\right] - f'''(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f^{iv}(t)\right\} = s^4\mathcal{L}\{f(t)\} - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0). \quad (3.37)$$

Untuk $f^n(t)$ diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$$

3.6. Transformasi Laplace Integral Fungsi

Diberikan fungsi *f(t)* yang kontinu untuk semua $t \geq 0$ dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ adalah transformasi Laplace dari $f(t)$, maka transformasi Laplace dari integral fungsi $f(t)$ diberikan oleh (Prayudi, 2006: 260):

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s). \quad (3.38)$$

Bukti:

Misalkan $g(t) = \int_0^t f(u)du$, maka $g'(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$, lalu:

$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$; dari persamaan (3.34) dipunyai:

$s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = F(s)$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s}F(s).$$

Akibatnya, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(u)du.$ (3.39)

Bukti: (Dengan cara yang sama seperti bukti di atas)

Misalkan $g(t) = \int_0^t f(u)du$, maka $g^{'}(t) = f(t)$ dan $g(0) = 0$.

$\mathcal{L}\{g^{'}(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$; dari persamaan (3.34) dipunyai:

$s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = F(s) \Leftrightarrow s\mathcal{L}\{g(t)\} - 0 = F(s)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \; atau \; \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = g(t) = \int_0^t f(u)du.$$

Jika *f(t)* pada persamaan (3.39) diperluas menjadi $\int_0^t \int_0^v f(u)du\, dv$ atau secara umum ditulis: $\int_0^t \int_0^t f(u)dt^2$, maka:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^v f(u)du\, dv\right\} = \frac{1}{s^2}F(s). \qquad (3.40)$$

Bukti:

Misalkan $g(t) = \int_0^t \int_0^v f(u)du\, dv$, maka $g^{'}(t) = \int_0^t f(u)du$,

dan $g^{''}(t) = f(t)$ serta $g(0) = g^{'}(0) = 0$, sehingga:

$\mathcal{L}\{g^{''}(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$; dari persamaan (3.35) dipunyai:

$\mathcal{L}\{g^{''}(t)\} = s^2\mathcal{L}\{g(t)\} - sg(0) - g'(0) = F(s)$

$\Leftrightarrow s^2\mathcal{L}\{g(t)\} - 0 - 0 = F(s)$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^v f(u)du\, dv\right\} = \frac{1}{s^2}F(s).$$

Selanjutnya, jika *f(t)* diperluas lagi menjadi integral rangkap tiga, maka:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^v \int_0^w f(u)du\, dv\, dw\right\} = \frac{1}{s^3}F(s). \qquad (3.41)$$

Bukti:

Misalkan $g(t) = \int_0^t \int_0^v \int_0^w f(u)du\, dv\, dw \Rightarrow g^{'}(t) = \int_0^t \int_0^v f(u)du\, dv,$

$g^{''}(t) = \int_0^t f(u)du$, dan $g^{'''}(t) = f(t)$ serta $g(0) = g^{'}(0) =$

$g^{''}(0) = g^{'''}(0) = 0$, sehingga:

$$\mathcal{L}\{g^{'''}(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g^{'''}(t)\} = s^3\mathcal{L}\{g(t)\} - s^2 g(0) - sg^{'}(0) - g''(0) = F(s)$$

$$\Leftrightarrow s^3\mathcal{L}\{g(t)\} - 0 - 0 - 0 = F(s)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^t \int_0^t f(u)dt^3\right\} = \frac{1}{s^3}F(s).$$

Seterusnya, untuk *f(t)* integral rangkap *n*, maka:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^t \int_0^t \ldots f(u)dt^n\right\} = \frac{1}{s^n}F(s). \qquad (3.42)$$

Contoh 3.3.: Tentukan *f(t)*= $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)$, jika $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}$!

Dari Tabel 3.2.2. no.7, dipunyai $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)}\right\} = \frac{\sin st}{2}$, dengan pemakaian berulang persamaan (3.40), maka:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{\sin 2u}{2}du = \left[-\frac{1}{4}\cos 2u\right]_0^t = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\text{, dan}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2u\, du = \left[\frac{1}{4}u - \frac{1}{8}\sin 2u\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

3.7. Masalah Nilai Awal *(Initial Value Problem)*

Teorema 3.7.1: Jika limit-limit yang dinyatakan berikut ini ada, maka:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s). \qquad (3.43)$$

Bukti:

Dari persamaan (3.33) dipunyai $\mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = sF(s) - f(0)$, dan jika *f(t)* kontinu bagian demi bagian dan berada pada orde ekponensial, maka $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = 0$ (Teorema 3.1.3.2). Dengan mengambil limit bila $s \to \infty$, (dengan menganggap *f(t)* kontinu pada *t=0*) diperoleh:

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = \lim_{s\to\infty}(sF(s) - f(0)) \tag{3.44}$$

$$0 = \lim_{s\to\infty} sF(s) - f(0)$$

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \blacksquare$$

3.8. Masalah Nilai Akhir *(Final Value Problem)*

Teorema 3.8.1.: Jika limit-limit yang dinyatakan berikut ini ada, maka:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s). \tag{3.45}$$

Bukti:

Dari persamaan (3.35), dipunyai:

$$\mathcal{L}\{f^{'}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f^{'}(t)dt = sF(s) - f(0)$$

Lalu dengan mengambil limit untuk $s \to 0$, maka:

$$\lim_{s\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f^{'}(t)dt = \lim_{s\to 0}\big(sF(s) - f(0)\big) \tag{3.46}$$

$$\int_0^\infty f^{'}(t)dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{P\to\infty} \int_0^P f^{'}(t)dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0) \tag{3.47}$$

$$\lim_{P\to\infty}\langle f(p) - f(0)\rangle = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0) \tag{3.48}$$

$$\lim_{P\to\infty} f(p) - f(0) = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

$$\lim_{P\to\infty} f(p) = \lim_{s\to 0} sF(s) \blacksquare$$

3.9. Metode Jumlahan Pecahan Parsial

Untuk menentukan invers transformasi Laplace *f(t)*= $\mathcal{L}^{-1}$*{F(s)}*, maupun penerapannya pada sistem persamaan diferensial, secara tidak langsung sering ditemui penyelesaian fungsi persamaan pembantu *F(s)* atau *Y(s)*, misalnya, $Y(s) = \frac{2s^2-4s-3}{(s-2)(s-3)^2}$.

Secara umum bentuk dari *F(s)* atau *Y(s)* berbentuk fungsi pecahan rasional dalam *s*, yaitu:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{3.49}$$

dimana *P(s)* dan *Q(s)* adalah polinomial-polinomial dalam *s*, dengan *P(s)* berderajat lebih kecil dari *Q(s).* Setiap fungsi rasional *P(s)/Q(s)* dengan derajat *P(s)*lebih kecil dari *Q(s)* dapat dituliskan sebagai jumlahan pecahan parsial. Metode ini digunakan untuk menentukan konstanta pada persamaan pembilang dari pecahan yang baru.

Bentuk jumlahan pecahan parsial bergantung pada jenis faktor penyebut *Q(s)* yang dibedakan menjadi dua kasus, yaitu:

1. Faktor penyebut *Q(s)* linear tidak berulang,
2. Faktor penyebut *Q(s)* linear berulang.

Kasus pertama. Faktor penyebut *Q(s)* linear tidak berulang.

Diberikan transformasi Laplace berbentuk $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ dengan faktor-faktor dari $Q(s)$ adalah linear dan tidak berulang, yaitu:

$$Q(s) = (s - a_1)(s - a_2)(s - a_3) \dots (s - a_n). \tag{3.50}$$

Lalu ditulis *F(s)=P(s)/Q(s)* menjadi,

$$F(s) = \frac{A_1}{(s-a_1)} + \frac{A_2}{(s-a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a_n)}, \tag{3.51}$$

dimana konstanta-konstantanya $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ dihitung dengan penyederhanaan pecahan parsial.

Dengan demikian, invers transformasi Laplacenya diberikan oleh,

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_1}{(s-a_1)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_2}{(s-a_2)}\right\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_n}{(s-a_n)}\right\} \\ &= A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + A_3 e^{a_3 t} + \cdots + A_n e^{a_n t}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Contoh 3.4. Carilah *f(t)* jika $F(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$!

Dari transformasi Laplace *F(s)* dihasilkan:

$$P(s) = 2s + 3$$

$$Q(s) = s^2 - 5s + 6 = (s-3)(s-2).$$

Lalu dibentuk *F(s)=P(s)/Q(s)* yaitu:

$$F(s) = \frac{2s+3}{(s-3)(s-2)} = \frac{A_1}{(s-3)} + \frac{A_2}{(s-2)}.$$

Konstanta-konstantanya ditentukan dengan,

$$\frac{2s+3}{(s-3)(s-2)} = \frac{A_1}{(s-3)} + \frac{A_2}{(s-2)} = \frac{A_1(s-2) + A_2(s-3)}{(s-3)(s-2)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2s + 3 = A_1(s-2) + A_2(s-3).$$

Dengan mensubstitusi *s = 3* dan *s = 2* diperoleh,

$$2(3) + 3 = A_1\big((3) - 2\big) + A_2\big((3) - 3\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad 9 = A_1, \qquad dan$$

$$2(2) + 3 = A_1\big((2) - 2\big) + A_2\big((2) - 3\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad 7 = -A_2 \;\; atau \;\; -7 = A_2.$$

Diperoleh,

$$F(s) = \frac{9}{(s-3)} + \frac{-7}{(s-2)}.$$

Dengan demikian,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9}{(s-3)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{(s-2)}\right\}$$

$$= 9e^{3t} - 7e^{2t}.$$

Kasus kedua. Faktor penyebut *Q(s)* linear berulang.

Diberikan transformasi Laplace berbentuk $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ dengan faktor-faktor dari $Q(s)$ memuat faktor linear berulang, yaitu $(s - a_1)^m$. Untuk menentukan invers transformasi Laplacenya, bentuk *Q(s)* yang memuat faktor linear berulang ke dalam jumlahan pecahan parsial,

$$Q(s) = \frac{A_m}{(s-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \frac{A_1}{(s-a)}. \qquad (3.53)$$

Dengan menggunakan rumus dasar dan sifat translasi/pergeseran pada sumbu *s*, invers transformasi laplace jumlahan *m* pecahan parsial di atas diberikan oleh,

$$f(t) = A_m\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^m}\right\} + A_{m-1}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{m-1}}\right\} + \cdots + A_1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)}\right\}$$

$$= e^{at}\left\{A_m \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + A_{m-1}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_2 t + A_1\right\}. \qquad (3.54)$$

Contoh 3.5. Carilah *f(t)* jika diberikan $F(s) = \frac{3s}{(s^2-1)(s-2)^2}$!

Dari *F(s)* diperoleh:

$$F(s) = \frac{3s}{(S-1)(s+1)(s-2)^2},$$

Q(s) mempunyai faktor linear tak berulang dan faktor berulang $(s-2)^2$. *F(s)* dibentuk menjadi jumlahan pecahan parsial, yaitu:

$$\frac{3s}{(S-1)(s+1)(s-2)^2} = \frac{A_2}{(s-2)^2} + \frac{A_1}{(s-2)} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s+1)}.$$

Konstanta-konstantanya ditentukan dengan,

$$3s = A_2(S-1)(s+1) + A_1(s-2)(S-1)(s+1)$$
$$+ B(s-2)^2(s+1) + C(S-1)(s-2)^2.$$

Dengan substitusi s = 1, s = -1, dan s = 2 diperoleh,

$untuk\ S = -1,$

$$-3 = A_2(-2)(0) + A_1(-3)(-2)(0) + B(-3)^2(0) + C(-2)(-3)^2$$

$$-3 = -18\,C \quad atau \quad C = \frac{1}{6},$$

$untuk\ S = 1,$

$$3 = A_2(0)(2) + A_1(-1)(0)(2) + B(-1)^2(2) + C(0)(-1)^2$$

$$3 = 2B \ \ atau \quad B = \frac{3}{2}\ , dan$$

$untuk\ S = 2,$

$$6 = A_2(1)(3) + A_1(0)(1)(3) + B(0)^2(3) + C(1)(0)^2$$

$$6 = 3A_2 \quad atau \ \ A_2 = 2.$$

Konstanta A_1 dapat ditentukan dengan mensubstitusikan hasil-hasil yang diperoleh di atas dan untuk sebarang nilai s.

Ambil s = 0, maka

$$0 = 2(-1)(1) + A_1(-2)(-1)(1) + \frac{3}{2}(-2)^2(1) + \frac{1}{6}(-1)(-2)^2$$

$$0 = 2A_1 + \frac{10}{3}\ atau\ \ A_1 = -\frac{5}{3}.$$

Jadi, diperoleh

$$F(s) = \frac{2}{(s-2)^2} + \frac{-\frac{5}{3}}{(s-2)} + \frac{\frac{3}{2}}{(s-1)} + \frac{\frac{1}{6}}{(s+1)}.$$

Diperoleh invers transformasi Laplacenya, yaitu:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} - \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} \\ &\quad + \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} \\ &= e^{2t}\left\{2t - \frac{5}{3}\right\} + \frac{3}{2}e^{t} + \frac{1}{6}e^{-t}. \end{aligned}$$

BAB IV

APLIKASI TRANSFORMASI LAPLACE PADA RANGKAIAN LISTRIK

Seperti yang telah dijelaskan pada bab pendahuluan bahwa transformasi Laplace dapat digunakan untuk menyelesaikan/mencari solusi dari suatu rangkaian listrik. Suatu rangkaian listrik yang dapat dimodelkan ke dalam sistem persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial orde dua dengan koefisien konstan bisa diselesaikan dengan menggunakan metode transformasi Laplace. Namun, sebelum penulis menjelaskan bagaimana langkah/prosedur menyelesaikan suatu rangkaian listrik dengan menggunakan metode transformasi Laplace, maka terlebih dahulu penulis menjelaskan cara menyelesaikan suatu persamaan diferensial dengan menggunakan transformasi Laplace. Tujuannya adalah sebagai acuan untuk menyelesaikan suatu rangkaian listrik.

4.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace

Penerapan yang cukup penting dari transformasi Laplace salah satunya adalah untuk menentukan penyelesaian persamaan diferensial linear dengan koefisien kostan. Dalam skripsi ini hanya dibatasi pada persamaan diferensial orde dua koefisien konstan.

Metode transformasi Laplace secara khusus digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dan memenuhi syarat awal. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini adalah dengan mengambil transformasi Laplace dari persamaan diferensial yang diberikan, lalu menggunakan syarat-syarat awalnya. Ini memberikan suatu persamaan aljabar dalam transformasi Laplace dari penyelesaian yang diinginkan. Dengan mengambil invers dari transformasi Laplace yang telah dibentuk maka diperoleh penyelesaiannya.

Berikut ini diberikan prosedur / langkah-langkah mencari penyelesaian suatu persamaan diferensial linear orde dua berkoefisien konstan menggunakan transformasi Laplace (John Bird, 2007: 637).

Diberikan suatu persamaan diferensial linear orde dua, yaitu:

$$ay'' + by' + cy = r(t) \tag{4.1}$$

dengan syarat awal *y(0)* dan *y'(0)*.

Langkah pertama. Bentuk persamaan ke dalam trasformasi Laplace.

Jika *ℒ{y(t)} = Y(s),* dan *ℒ{r(t)} = R(s).* Dengan menerapkan transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan (4.1), maka dihasilkan:

$$\mathcal{L}\{ay'' + by' + cy\} = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

$$a\mathcal{L}\{y''\} + b\mathcal{L}\{y'\} + c\mathcal{L}\{y\} = R(s)$$

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = R(s). \tag{4.2}$$

Langkah kedua. Masukkan nilai awal *y(0)* dan *y'(0)* serta susun persamaan (4.2) ke dalam *Y(s)* (persamaan pembantu).

$$[as^2 + bs + c]Y(s) - [as + b]y(0) - ay'(0) = R(s)$$

$$[as^2 + bs + c]Y(s) = [as + b]y(0) + ay'(0) + R(s)$$

$$Y(s) = \frac{[as + b]y(0) + ay'(0) + R(s)}{[as^2 + bs + c]}. \tag{4.3}$$

Langkah ketiga. Jika mengandung pecahan parsial, maka gunakan metode jumlahan pecahan parsial untuk menyelesaikan persamaan (4.3).

$$Y(s) = \frac{[as+b]y(0) + ay'(0)}{as^2+bs+c} + \frac{R(s)}{as^2+bs+c}. \tag{4.4}$$

Langkah keempat. Ambil invers transformasi Laplace persamaan (4.4) maka diperoleh solusi/penyelesaian untuk persamaan (4.1).

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{[as+b]y(0) + ay'(0)}{as^2+bs+c}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R(s)}{as^2+bs+c}\right\}.$$

Contoh 4.1.: Carilah penyelesaian dari $2y" + 5y' - 3y = 0$,

dengan syarat awal *y(0)=4* dan *y'(0)=9.*

Dengan menggunakan prosedur/langkah-langkah di atas, maka diperoleh:

$$\mathcal{L}\{2y" + 5y' - 3y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$2\mathcal{L}\{y"\} + 5\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + 5sY(s) - 5y(0) - 3Y(s) = 0$$

untuk $y(0) = 4$ dan $y'(0) = 9$, maka:

$$2s^2Y(s) - 8s - 18 + 5sY(s) - 20 - 3Y(s) = 0$$

$$[2s^2 + 5s - 3]Y(s) = 8s + 38$$

$$Y(s) = \frac{8s+38}{2s^2+5s-3} = \frac{8s+38}{(2s-1)(s+3)}.$$

Menggunakan metode jumlahan pecahan parsial, maka:

$$\frac{8s+38}{2s^2+5s-3} = \frac{A}{(2s-1)} + \frac{B}{(s+3)}.$$

Diperoleh,

$$8s + 38 = A(s+3) + B(2s-1).$$

Untuk $s = -3$ maka $14 = -7B$ atau $B = -2$.

Untuk $s = \frac{1}{2}$ maka $42 = \frac{7}{2}A$ atau $A = 12$.

Jadi,

$$Y(s) = \frac{8s + 38}{2s^2 + 5s - 3} = \frac{12}{(2s - 1)} - \frac{2}{(s + 3)}.$$

Dengan invers transformasi Laplace didapat,

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{(2s - 1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s + 3)}\right\}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{2\left(s - \frac{1}{2}\right)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s + 3)}\right\} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s - \frac{1}{2}\right)}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 3)}\right\}$$

$$y(t) = 6e^{\frac{1}{2}t} - 2e^{-3t}.$$

Jadi, solusi dari persamaan diferensial tersebut yaitu, $y(t) = 6e^{\frac{1}{2}t} - 2e^{-3t}$.

Contoh 4.2.: Tentukan solusi dari $y'' - 4y' - 4y = 8t$,

dengan syarat awal *y(0) = 0* dan *y'(0)=12*.

Seperti penyelesaian pada contoh 4.1. maka diperoleh,

$$\mathcal{L}\{y'' - 4y' - 4y\} = \mathcal{L}\{8t\}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 4\mathcal{L}\{y'\} - 4\mathcal{L}\{y\} = 8\mathcal{L}\{t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4sY(s) + 4y(0) - 4Y(s) = \frac{8}{s^2}$$

$$s^2Y(s) - 12 - 4sY(s) - 4Y(s) = \frac{8}{s^2}$$

$$(s^2 - 4s - 4)Y(s) = \frac{8}{s^2} + 12$$

$$Y(s) = \frac{8}{s^2(s^2 - 4s - 4)} + \frac{12}{(s^2 - 4s - 4)}$$

$$Y(s) = \frac{8}{s^2(s-2)^2} + \frac{12}{(s-2)^2}.$$

Y(s) tidak mengandung pecahan parsial, maka langsung ditentukan y(t) yang merupakan solusi yang di inginkan.

$$y(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)^2}\right\} + 12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}.$$

Untuk $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = te^{2t}$, sedangkan untuk $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)^2}\right\}$, diselesaikan dengan integral transformasi Laplace.

Telah diketahui $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = te^{2t}$, dan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)^2}\right\} = \int_0^t ue^{2u}du = \frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u}\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}.$$

Diperoleh,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)^2}\right\} = \int_0^t \left(\frac{1}{2}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u} + \frac{1}{4}\right)du$$

$$= \frac{1}{4}ue^{2u} - \frac{1}{4}e^{2u} + \frac{1}{4}u\Big|\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix} = \frac{1}{4}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}.$$

Jadi,

$$y(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)^2}\right\} + 12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$y(t) = 8\left(\frac{1}{4}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\right) + 12(te^{2t})$$

$$y(t) = 14te^{2t} - 2e^{2t} + 2t + 2.$$

Contoh 4.3.: Diberikan persamaan diferensial,

$$y'' - 4y' + 8y = 8e^{2t}\cos 2t + 6e^{2t}\sin 2t$$

dengan syarat awal *y(0) = 4* dan *y'(0) = 10.*

Jika kedua ruas ditransformasi ke dalam transformasi Laplace, maka:

$$\mathcal{L}\{y" - 4y' + 8y\} = \mathcal{L}\{8e^{2t}\cos 2\mathrm{t} + 6e^{2t}\sin 2t\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{'}(0) - 4sY(s) + 4y(0) + 8Y(s) = \frac{8(s-2)}{(s-2)^2+4} + \frac{6(2)}{(s-2)^2+4}.$$

Untuk syarat awal *y(0) = 4* dan *y'(0) = 10*, maka:

$$(s^2 - 4s + 8)Y(s) - 4s + 6 = \frac{8(s-2)}{(s-2)^2+4} + \frac{12}{(s-2)^2+4}$$

$$((s-2)^2 + 4)Y(s) = \frac{8(s-2)}{(s-2)^2+4} + \frac{12}{(s-2)^2+4} + 4s - 6$$

$$Y(s) = \frac{8(s-2)}{[(s-2)^2+4]^2} + \frac{12}{[(s-2)^2+4]^2} + \frac{4s-6}{(s-2)^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{8(s-2)}{[(s-2)^2+4]^2} + \frac{12}{[(s-2)^2+4]^2} + \frac{4s-8+2}{(s-2)^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{8(s-2)}{[(s-2)^2+4]^2} + \frac{12}{[(s-2)^2+4]^2} + \frac{4(s-2)}{(s-2)^2+4} + \frac{2}{(s-2)^2+4}.$$

Lalu menggunakan invers transformasi laplace, maka diperoleh,

$$y(t) = 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)}{[(s-2)^2+4]^2}\right\} + 12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s-2)^2+4]^2}\right\}$$

$$+ 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)}{(s-2)^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+4}\right\}$$

$$= \frac{8e^{2t}}{4}t\sin 2\mathrm{t} + \frac{12e^{2t}}{16}(\sin 2\mathrm{t} - 2\mathrm{t}\cos 2\mathrm{t}) + 4e^{2t}\cos 2t + e^{2t}\sin 2t$$

$$y(t) = 2te^{2t}\sin 2\mathrm{t} - \frac{3}{2}\mathrm{t}e^{2t}\cos 2t + 4e^{2t}\cos 2t + \frac{7}{4}e^{2t}\sin 2t.$$

4.2. Elemen Rangkaian Listrik dalam Domain-s

Untuk dapat mentransformasi suatu rangkaian listrik ke dalam transformasi Laplace, maka perlu didefinisikan elemen-elemen di dalam rangkaian tersebut ke dalam domain-s.

Adapun transformasi elemen-elemen rangkaian listrik ke dalam domain-s didefinisikan sebagai berikut.(John Bird, 2007: 640).

1. *Resistor (R)*

   Dalam domain waktu (t), resistor didefinisikan oleh hukum Ohm, yaitu:

   $$v_R(t) = Ri(t).$$

   Transformasi Laplace dari persamaan ini yaitu,

   $$\mathcal{L}\{v_R(t)\} = \mathcal{L}\{Ri(t)\} = RI(s).$$

   Diperoleh v_R di dalam domain-s,

   $$V_R(s) = RI(s). \qquad (4.5)$$

2. *Kapasitor (C)*

   Sebuah kapasitor dalam domain waktu *(t)* didefinisikaan sebagai,

   $$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \text{ atau } v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt.$$

   Transformasi Laplace dari persamaan ini yaitu,

   $$\mathcal{L}\{v_c(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int i(t)\,dt\right\} = \frac{1}{C}\frac{I(s)}{s}.$$

   Diperoleh impedansi kapasitor dalam domain-s,

   $$V_c(s) = \frac{1}{sC}I(s). \qquad (4.6)$$

3. *Induktor (L)*

Sebuah induktor dalam domain waktu *(t)* didefinisikaan sebagai,

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}.$$

Transformasi Laplace dari persamaan ini yaitu,

$$\mathcal{L}\{v_L(t)\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{di}{dt}\right\} = sLI(s) - Li(0).$$

Impedansi Induktor dalam domain-s didefinisikan oleh,

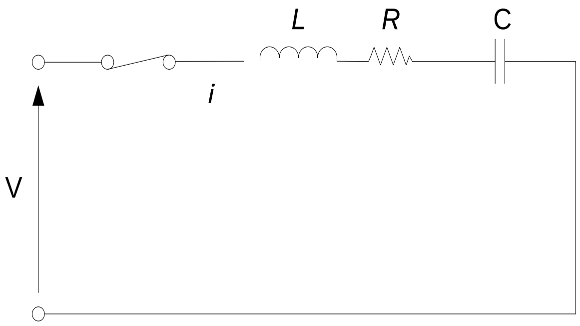
$$V_L(s) = L[sI(s) - i(0)]. \quad (4.7)$$

4.3. Aplikasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik

Jika diberikan suatu rangkaian listrik, maka prosedur/langkah-langkah untuk mencari penyelesaiannya dengan menggunakan transformasi Laplace yaitu, (John Bird, 2007:642):

1. Gunakan hukum yang berlaku pada rangkaian tersebut untuk menentukan persamaan diferensialnya (Hukum Kirchoff dan hukum Ohm).
2. Ambil transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan yang terbentuk.
3. Masukkan nilai awal yang diberikan dan susun persamaan pembantu.
4. Gunakan invers transformasi Laplace untuk menentukan penyelesaiannya.

Contoh 4.4.: Diberikan suatu rangkaian L-R-C seperti pada gambar 4.1. tentukan besar arus yang mengalir dalam rangkaian tersebut jika pada saat *t=0* diberi tegangan sebesar *v* dan *i* (0) = 0.



Gambar 4.1.

Pada rangkaian listrik (gambar 4.1) dapat dibentuk sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan hukum II Kirchoff yaitu:

$$\sum v = 0$$

$$v_L + v_R + v_C - v(t) = 0 \text{ atau } v(t) = v_L + v_R + v_C$$

$$v = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt.$$

Ambil transformasi Laplace pada kedua ruas persamaan dan maka diperoleh,

$$\mathcal{L}\{v\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt\right\}$$

$$\frac{v}{s} = sLI(s) + Li(0) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} = I(s)\left[sL + R + \frac{1}{sC}\right] + Li(0).$$

Didapatkan persamaan pembantu,

$$I(s) = \frac{{}^{v}/_{s} - Li(0)}{\left[sL + R + \frac{1}{sC}\right]} = \frac{v - sLi(0)}{s\left[sL + R + \frac{1}{sC}\right]} = \frac{v - sLi(0)}{s^2L + sR + \frac{1}{C}}$$

dengan substitusi *i(0)* = 0, maka:

$$I(s) = \frac{v}{s^2L + sR + \frac{1}{C}} = \frac{v}{L\left[s^2 + s\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{1}{LC}\right]}$$

$$= \frac{v/L}{s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \frac{1}{LC}}.$$

Dengan penggunaan kuadrat sempurna, maka:

$$I(s) = \frac{{}^{v}/_{L}}{\left[s^2 + \left(\frac{R}{L}\right)s + \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{{}^{v}/_{L}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)^2}$$

$$= \frac{{}^{v}/_{L}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}$$

$$I(s) = \frac{{}^{v}/_{L}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right)^2}.$$

Dengan memisalkan $b = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, dan $a = \left(\frac{R}{2L}\right)$, maka:

$$I(s) = \frac{{}^{v}/_{L}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}.$$

Dengan menggunakan invers transformasi Laplace, maka diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{{}^{v}/_{L}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right\}$$

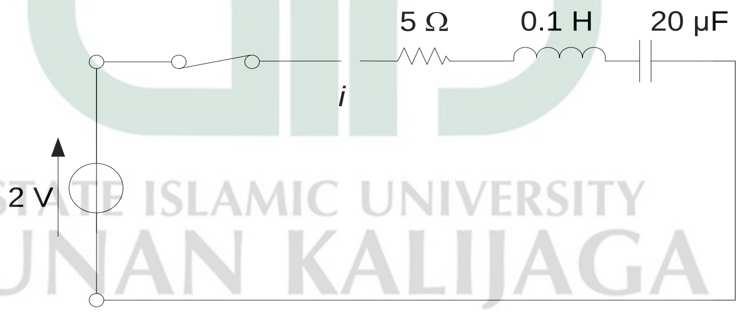
$$= \frac{v/_L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s+a)^2 + b^2}\right\}.$$

$$= \frac{v/_L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot e^{-at} \sin bt.$$

Jadi, dengan mensubstitusi nilai a dan b, maka diperoleh solusi untuk rangkaian pada gambar 4.1. di atas yaitu:

$$i(t) = \frac{v/_L}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right) t \quad (A).$$

Contoh 4.5.: Tentukan besar arus yang mengalir dalam rangkaian berikut ini jika saklar ditutup pada saat $t=0$!



Gambar 4.2.

Dengan menggunakan hukum II Kirchoff diperoleh

$$\sum v = 0$$

$$v_L + v_R + v_C - v(t) = 0$$

$$0{,}1 \frac{di(t)}{dt} + 5i(t) + \frac{1}{20x10^{-6}} \int i(t)dt - \frac{2}{s} = 0.$$

Jika ditransformasi ke domain-s maka

$$\mathcal{L}\left\{0{,}1\frac{di(t)}{dt}+5i(t)+\frac{1}{20x10^{-6}}\int i(t)dt-2\right\}=\mathcal{L}\{0\}$$

$$0{,}1sI(s)+0{,}1i(0)+5I(s)+\frac{I(s)}{20x10^{-6}s}-\frac{2}{s}=0$$

$$I(s)\left[0{,}1s+5+\frac{1}{20x10^{-6}s}\right]=\frac{2}{s}-0{,}1i(0)$$

Saklar baru dinyalakan sehingga pada saat awal belum ada arus yang mengalir (*i(0)=0*). Jadi,

$$I(s)=\frac{2}{s\left[0{,}1s+5+\frac{5x10^{4}}{s}\right]}$$

$$=\frac{2}{[0{,}1s^2+5s+5x10^4]}$$

$$=\frac{2}{0{,}1(s^2+50s+5x10^5)}$$

$$=\frac{20}{(s^2+50s+5x10^5)}$$

$$=\frac{20}{(s^2+50s+(25)^2)+(5x10^5-(25)^2)}$$

$$=\frac{20}{(s+25)^2+(499375)}$$

$$=\frac{20}{(s+25)^2+\sqrt{(499375)^2}}$$

$$=\frac{20}{(s+25)^2+\left(\sqrt{499375}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{499375}}{\sqrt{499375}}$$

$$=\frac{20}{\sqrt{499375}}\cdot\frac{\sqrt{499375}}{(s+25)^2+\left(\sqrt{499375}\right)^2}$$

$$I(s) = \frac{20}{706{,}7} \cdot \frac{706{,}7}{(s+25)^2 + (706{,}7)^2}.$$

Diperoleh $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\}$, yaitu:

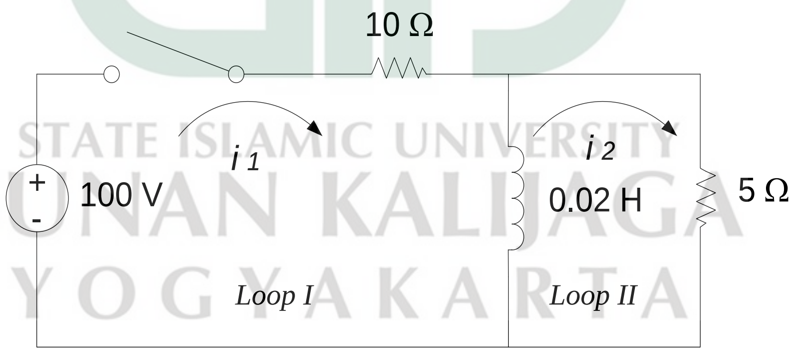
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{0{,}0283 \cdot \frac{706{,}7}{(s+25)^2 + (706{,}7)^2}\right\}$$

$$= 0{,}0283 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{706{,}7}{(s+25)^2 + (706{,}7)^2}\right\}$$

$$= 0{,}0283 \cdot e^{-25t} \sin 706{,}7t \ \ (A).$$

Jadi, besar arus listrik yang mengalir pada rangkaian di atas, yaitu: $0{,}0283 \cdot e^{-25t} \sin 706{,}7t$ Ampere.

Contoh 4.6. Tentukan besar arus yang mengalir jika saklar ditutup pada saat *t=0* dalam rangkaian berikut ini!



Gambar 4.3.

Dari gambar 4.3. diperoleh persamaan dengan menggunakan hukum II Kirchoff:

Persamaan pada *loop* I:

$$10i_1 + 0{,}02\frac{di_1}{dt} - 0{,}02\frac{di_2}{dt} - 100 = 0,$$

dan persamaan pada *loop* II:

$$0{,}02\frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0{,}02\frac{di_1}{dt} = 0.$$

Jika kedua persamaan ditransformasi ke domain-s, maka diperoleh:

$$\mathcal{L}\left\{10i_1 + 0{,}02\frac{di_1}{dt} - 0{,}02\frac{di_2}{dt} - 100\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$10I_1(s) + 0{,}02s\, I_1(s) - 0{,}02s\, I_2(s) - \frac{100}{s} = 0$$

$$(10 + 0{,}02s)\, I_1(s) - 0{,}02s\, I_2(s) = \frac{100}{s}, \tag{4.8}$$

dan

$$\mathcal{L}\left\{0{,}02\frac{di_2}{dt} + 5i_2 - 0{,}02\frac{di_1}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$0{,}02s\, I_2(s) + 5I_2(s) - 0{,}02s\, I_1(s) = 0$$

$$(0{,}02s + 5)I_2(s) = 0{,}02s\, I_1(s). \tag{4.9}$$

Dari persamaan (4.9), diperoleh

$$I_2(s) = \frac{0{,}02s\, I_1(s)}{(0{,}02s + 5)} = \frac{s}{s + 250} I_1(s). \tag{4.10}$$

Jika persamaan (4.10) disubstitusikan ke dalam persamaan (4.8), maka

$$(10 + 0{,}02s)\, I_1(s) - 0{,}02s\left(\frac{s}{s + 250} I_1(s)\right) = \frac{100}{s}$$

$$I_1(s)\left(10 + 0{,}02s - \frac{0{,}02\, s^2}{s + 250}\right) = \frac{100}{s}$$

$$I_1(s)\left(\frac{10s + 2500 + 0{,}02s^2 + 5s - 0{,}02s^2}{s + 250}\right) = \frac{100}{s}$$

$$I_1(s)(15s + 2500) = \frac{100(s + 250)}{s}$$

$$I_1(s) = \frac{100(s+250)}{s(15s+2500)} = \frac{100(s+250)}{15s(s+166{,}667)}$$

$$= \frac{6{,}667(s+250)}{s(s+166{,}667)}. \qquad (4.11)$$

Menggunakan metode jumlahan pecahan parsial, maka diperoleh

$$I_1(s) = \frac{6{,}667(s+250)}{s(s+166{,}667)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+166{,}667} \text{ atau}$$

$$6{,}667(s+250) = A(s+166{,}667) + Bs$$

untuk $s = 0$,

$$6{,}667(250) = A(166{,}667)\ atau\ A = 10$$

untuk s =-166,667,

$$6{,}667(83{,}334) = -166{,}667\ B\ atau\ B = -3{,}334.$$

Jadi, didapatkan nilai $I_1\ (s)$, yaitu:

$$I_1(s) = \frac{10}{s} - \frac{3{,}334}{s+166{,}667},$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.11) ke dalam persamaan (4.10), maka

$$I_2(s) = \frac{s}{s+250}\left(\frac{6{,}667(s+250)}{s(s+166{,}667)}\right)$$

$$I_2(s) = \frac{6{,}667}{(s+166{,}667)}.$$

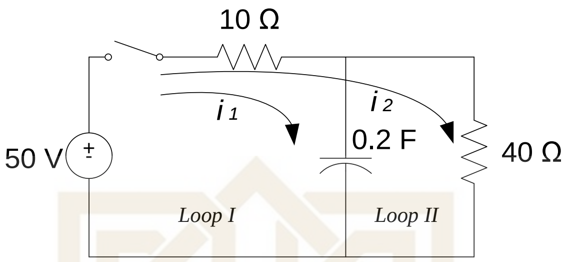
Dengan menggunakan invers transformasi laplace maka diperoleh penyelesaian untuk $I_1\ (s)$, dan $I_2\ (s)$ yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s} - \frac{3{,}334}{s+166{,}667}\right\}$$

$$i_1(t) = 10 - 3{,}334e^{-166{,}667t}(A), \qquad \text{dan}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6{,}667}{(s+166{,}667)}\right\} \Leftrightarrow i_2(t) = 6{,}667e^{-166{,}667t}\ (A).$$

Contoh 4.7. Tentukan besar arus yang mengalir jika saklar ditutup pada saat *t=0* dalam rangkaian berikut ini!



Gambar 4.4.

Dari gambar 4.4. di atas diperoleh persamaan dengan menggunakan hukum II Kirchoff.

Persamaan pada *loop* I:

$$10i_1 + \frac{1}{0{,}2}\int i_1\, dt + 10i_2 = 50,$$

dan persamaan pada *loop* II:

$$50i_2 + 10i_1 = 50.$$

Jika kedua persamaan tersebut ditransformasi ke domain-s maka diperoleh persamaan:

$$10I_1(s) + 5\frac{I_1(s)}{s} + 10I_2(s) = \frac{50}{s}\ ;\ \text{dan} \tag{4.12}$$

$$50I_2(s) + 10I_1(s) = \frac{50}{s}. \tag{4.13}$$

Dari persamaan (4.13), diperoleh

$$I_2(s) = \frac{50/s - 10I_1}{50} = \frac{1}{s} - 0.2I_1(s). \tag{4.14}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.14) ke dalam persamaan (4.12), maka:

$$10I_1(s) + 5\frac{I_1(s)}{s} + 10\left[\frac{1}{s} - 0.2\, I_1(s)\right] = \frac{50}{s}$$

$$I_1(s)\left[8 + \frac{5}{s}\right] = \frac{40}{s}$$

$$I_1(s)\left[\frac{8s+5}{s}\right] = \frac{40}{s}$$

$$I_1(s) = \frac{40}{8s+5} = \frac{5}{s+0{,}625} \tag{4.15}$$

Dengan mensubstitusi persamaan (4.15) ke dalam persamaan (4.12), maka

$$I_2(s) = \frac{50/s - 10I_1}{50} = \frac{1}{s} - 0.2\left[\frac{5}{s+0{,}625}\right] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+0{,}625}. \tag{4.16}$$

Dengan menggunakan invers transformasi laplace maka diperoleh penyelesaian untuk $I_1\ (s)$, dan $I_2\ (s)$ yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+0{,}625}\right\}$$

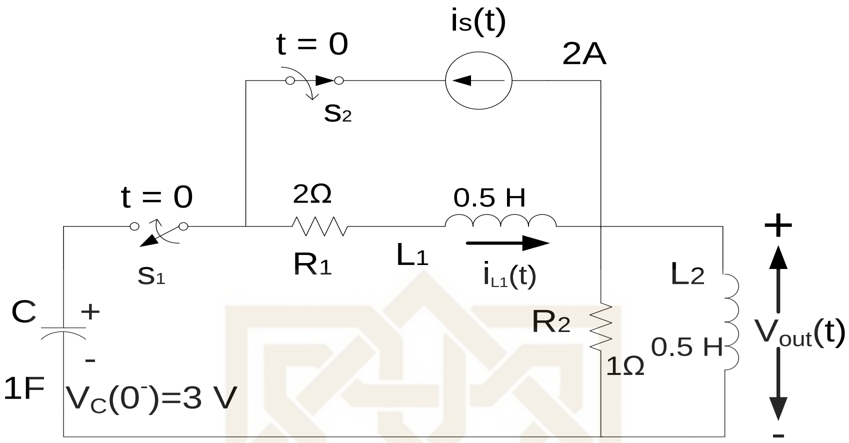
$$i_1(t) = 5e^{-0{,}625t}\ \ (A),$$

dan

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0{,}625}\right\}$$

$$i_2(t) = 1 - e^{-0{,}625t}\ \ (A).$$

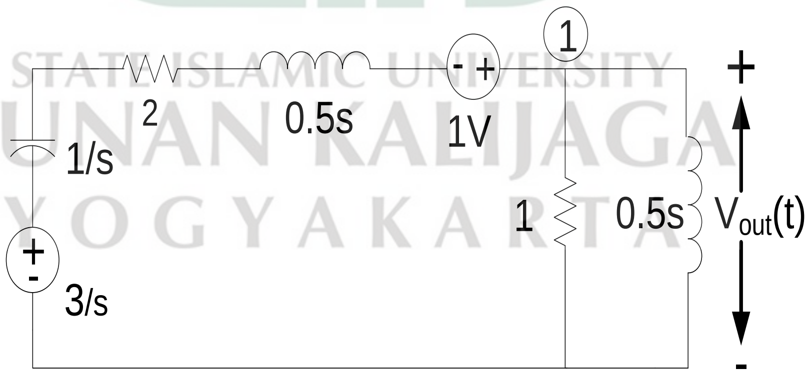
Contoh 4.8. Diberikan suatu rangkaian di bawah ini. Saklar S_1 ditutup pada saat $t=0$, tetapi pada saat yang sama saklar S_2 dibuka. Tentukan $v_{out}\ (t)$ pada saat $t > 0$.



Gambar 4.5.

Dari rangkaian, terdapat dua kondisi awal yang diberikan yaitu nilai tegangan awal, $v_C(0^-)$ untuk kapasitor yaitu sebesar 3 Volt, dan nilai arus awal sebesar 2 Ampere untuk induktor L_1 atau $i_{L1}(0^-) = 2\ A$.

Untuk $t > 0$, lalu ubah rangkaian gambar 4.5. ke dalam domain-s seperti berikut.



Gambar 4.6.

Dari gambar 4.6. arus dalam induktor L_1 digantikan oleh sumber tegangan 1V. Ini diperoleh dari $L_1 \cdot i_{L1}(0^-) = 0{,}5 \cdot 2 = 1\ V$.

Lalu dengan menggunakan hukum II Kirchoff, diperoleh:

$$\frac{V_{out}\,(s) - 1 - 3/s}{1/s + 2 + s/2} + \frac{V_{out}\,(s)}{1} + \frac{V_{out}\,(s)}{s/2} = 0. \tag{4.17}$$

Kemudian persamaan (4.17) disederhanakan menjadi

$$\frac{V_{out}\,(s)}{1/s + 2 + s/2} - \frac{1 + 3/s}{1/s + 2 + s/2} + V_{out}\,(s) + \frac{2V_{out}\,(s)}{s} = 0$$

$$\frac{V_{out}\,(s)}{\left(\frac{2 + 4s + s^2}{2s}\right)} - \frac{\frac{s+3}{s}}{\left(\frac{2 + 4s + s^2}{2s}\right)} + V_{out}\,(s) + \frac{2V_{out}\,(s)}{s} = 0$$

$$\frac{2s.V_{out}\,(s)}{2 + 4s + s^2} - \frac{2s(s+3)}{2 + 4s + s^2} + V_{out}\,(s) + \frac{2.V_{out}\,(s)}{s} = 0$$

$$\frac{2s^2.V_{out}\,(s)}{s(2 + 4s + s^2)} - \frac{2s(s+3)}{s(2 + 4s + s^2)} + \frac{V_{out}\,(s)s(2 + 4s + s^2)}{s(2 + 4s + s^2)} + \frac{2.V_{out}\,(s)(2 + 4s + s^2)}{s(2 + 4s + s^2)} = 0$$

$$\frac{2s^2.V_{out}\,(s) - 2s(s+3) + V_{out}\,(s)(2s + 4s^2 + s^3) + V_{out}\,(s)(4 + 8s + 2s^2)}{s(2 + 4s + s^2)} = 0$$

$$2s^2.V_{out}\,(s) + V_{out}\,(s)(2s + 4s^2 + s^3) + V_{out}\,(s)(4 + 8s + 2s^2) = 2s(s+3)$$

$$V_{out}\,(s)(2s^2 + 2s + 4s^2 + s^3 + 4 + 8s + 2s^2 = 2s(s+3)$$

$$V_{out}\,(s)(s^3 + 8s^2 + 10s + 4) = 2s(s+3)$$

$$V_{out}\,(s) = \frac{2s(s+3)}{s^3 + 8s^2 + 10s + 4}. \tag{4.18}$$

Lalu difaktorkan menjadi

$$V_{out}\,(s) = \frac{2s(s+3)}{s^3 + 8s^2 + 10s + 4} = \frac{2s(s+3)}{(s + 6{,}57)(s^2 + 1{,}43s + 0{,}61)}. \tag{4.19}$$

Dengan metode jumalahan pecahan parsial didapat

$$V_{out}\,(s) = \frac{2s(s+3)}{(s + 6{,}57)(s^2 + 1{,}43s + 0{,}61)} = \frac{A}{(s + 6{,}57)} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1{,}43s + 0{,}61}$$

$$2s(s+3) = A(s^2 + 1{,}43s + 0{,}61) + (Bs + C)(s + 6{,}57).$$

Untuk $s = -6{,}57$ maka

$$2(-6{,}57)(-6{,}57 + 3) = A((-6{,}57)^2 + 1{,}43(-6{,}57) + 0{,}61)$$

$$A = \frac{46,9098}{34,3798} = 1,36.$$

Untuk $s = 0$, dan $A = 1,36$ maka $C = -\frac{0,83}{6,57} = -0,12$.

Untuk $s = 1$, $A = 1,36$ dan $C = -0,12$ diperoleh

$$2(4) = 1,36(1 + 1,43 + 0,61) + (B - 0,12)(1 + 6,57)$$

$$8 = 4,12 + 7,57\, B - 0,96$$

$$7,57\, B = 4,84 \quad \text{atau} \quad B = 0,64.$$

Diperoleh persamaan baru dari persamaan (4.19):

$$V_{out}\,(s) = \frac{1,36}{s + 6,57} + \frac{0,64\, s - 0,12}{s^2 + 1,43s + 0,61}$$

$$= \frac{1,36}{s + 6,57} + \frac{0,64\, s + (0,46 - 0,58)}{s^2 + 1,43s + (0,51 + 0,1)}$$

$$= \frac{1,36}{s + 6,57} + 0,64\ \frac{s + 0,715 - 0,91}{(s^2 + 1,43s + 0,51) + (0,1)}$$

$$= \frac{1,36}{s + 6,57} + 0,64\left(\frac{s + 0,715}{(s + 0,715)^2 + (s + 0,316)^2} - \frac{0,91}{(s + 0,715)^2 + (0,316)^2}\right).$$

Dengan menggunakan invers transformasi Laplace, maka diperoleh penyelesaian dari persamaan rangkaian listrik di atas, yaitu:

$$\mathcal{L}^{-1}\{V_{out}\,(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1,36}{s + 6,57}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{0,64\frac{(s + 0,715)}{(s + 0,715)^2 + (0,316)^2}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{1,64\left(\frac{0,91}{(s + 0,715)^2 + (0,316)^2}\right)\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1,36}{s + 6,57}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{0,64\frac{(s + 0,715)}{(s + 0,715)^2 + (0,316)^2}\right\}$$

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{1,84\left(\frac{0,316}{(s + 0,715)^2 + (0,316)^2}\right)\right\}$$

$$v_{out}\,(t) = 1,36e^{-6,57t} + 0,64e^{-0,715t}\cos 0,316t - 1,84e^{-0,715t}\sin 0,316t\ (V).$$

Dari hasil yang diperoleh tersebut, untuk $t \to \infty$ maka $v_{out}\,(t) \to 0$.