APLIKASI TEOREMA PERRON-FROBENIUS PADA RANTAI MARKOV DAN DINAMIKA POPULASI

SKRIPSI

untuk memenuhi sebagian persyaratan

mencapai derajat Sarjana S-1

Program Studi Matematika

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

diajukan oleh

Nilna Roudhatul Farihah

07610039

kepada

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UIN SUNAN KALIJAGA

YOGYAKARTA

2011

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Nilna Roudhatul Farihah

NIM : 07610039

Judul Skripsi : Aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov dan Dinamika Populasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Bidang Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamualaikum Wr. Wb.

Yogyakarta, 30 Mei 2011

Pembimbing I

Muhammad Wakhid Musthofa,M.Si

NIP. 19800402 200501 1 003

STATE ISLAMIC UNIVERSITY SUNAN KALIJAGA YOGYAKARTA

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga FM-UINSK-BM-05-03/R0

SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas Akhir
Lamp :

Kepada
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
di Yogyakarta

Assalamu'alaikum wr. wb.

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Nilna Roudhatul Farihah
NIM : 07610039
Judul Skripsi : Aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov dan Dinamika Populasi

sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Bidang Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqsyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

Wassalamualaikum wr.wb.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

Yogyakarta, 30 Juni 2011
Pembimbing II

Zenith Purisha, M.Si.

Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga **FM-UINSK-BM-05-07/R0**

PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1167/2011

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul	:	Aplikasi Teorema Perron-Frobenius Pada Rantai Markov Dan Dinamika Populasi
Yang dipersiapkan dan disusun oleh	:	
Nama	:	Nilna Roudhatul Farihah
NIM	:	07610039
Telah dimunaqasyahkan pada	:	24 Juni 2011
Nilai Munaqasyah	:	A -

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

TIM MUNAQASYAH :

Ketua Sidang

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si
NIP. 19800402 200501 1 003

Penguji I

Pipit Pratiwi, S.Si

Penguji II

Sugiyanto, M.Si
NIP.19800505 200801 1 208

Yogyakarta, 28 Juni 2011
UIN Sunan Kalijaga
Fakultas Sains dan Teknologi
Dekan

Prof. Dr. H. Akh. Minhaji, M.A, Ph.D
NIP. 19580919 198603 1 002

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nilna Roudhatul Farihah

NIM : 07610039

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul:

Aplikasi Teorema Perron-Frobenius
pada Rantai Markov dan Dinamika Populasi

merupakan hasil penelitian saya sendiri dan bukan merupakan duplikasi ataupun saduran dari karya orang lain kecuali pada bagian secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Yogyakarta, 30 Juni 2011

METERAI TEMPEL
PAJAK MEMBANGUN BANGSA
TGL. 20
EC54CAAF401013655
ENAM RIBU RUPIAH
6000 D-JP

Nilna Roudhatul Farihah

NIM: 07610039

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala nikmat dan kasih sayangNya akhirnya skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat serta salam semoga senatiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, para sahabat dan seluruh umat Islam.

Penyusunan skripsi ini merupakan salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarja Program Studi Matematika. Skripsi ini berisi pembahasan mengenai aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov dan Dinamika Populasi.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan, bimbingan, dan motivasi serta doa dari berbagai pihak, penyusunan skripsi ini tidak akan dapat diselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak, Ibu, kakak dan adik-adikku, atas doa dan motivasinya. Kalian adalah motivator terbesar dan terbaik penulis.
2. Prof. Drs. H. Akh. Minhaji, M. A., Ph.D. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Sri Utami Zuliana, M. Si. selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Muhammad Wakhid Musthofa, M. Si. selaku dosen pembimbing I sekaligus dosen Penasehat Akademik. Terimakasih telah meluangkan waktu untuk membantu, memotivasi, membimbing serta mengarahkan penulis sehingga skripsi ini dapat selesai.
5. Zenith Purisha, M. Sc. selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, arahan, bantuan, dan ilmu dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Bapak/Ibu Dosen dan Staf Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta atas ilmu, bimbingan dan pelayanan selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini selesai.
7. Keluarga Lek Ramidi (Paklek, Bulek, Tya, Tyo), terima kasih atas bantuan dan dukungannya selama mengerjakan skripsi ini.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

8. Anggota genk-ku, Sriyanti dan Siti Nurchasanah, Bersama kalian, penulis bisa belajar, main, bolos, dan akhirnya… kita lulus bareng!!!
9. Teman-teman Matematika 2007 (Nurul, Tsulus, Sulis, Uha, Mb Din, dll), atas hari-hari yang telah kita lalui bersama. Yang belum lulus, semoga kalian cepat menyusul.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan kalian dengan pahala yang berlipat ganda. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca pada umumnya dan penulis pada khususnya. Amin.

Yogyakarta, 1 Juni 2011

Penulis

Nilna Roudhatul Farihah

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

- Ibu dan Bapakku
- Kakak dan adik-adikku
- Almamaterku Prodi Matematika, Fakultas Sains & Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta
- Pemerhati ilmu pengetahuan

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

MOTTO

Allah dulu… Allah lagi… Allah terus…

(Ust. Yusuf Mansyur)

Tanpa belajar dan berdoa, tidak akan ada keberhasilan

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ……..... i
HALAMAN SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI ……... ii
HALAMAN PENGESAHAN ……. iv
HALAMAN PERNYATAAN ……. v
KATA PENGANTAR ……..... vi
HALAMAN PERSEMBAHAN ……. viii
HALAMAN MOTTO ……. ix
DAFTAR ISI ……. x
ARTI LAMBANG …… xii
ABSTRAKSI.……. xiv
BAB I PENDAHULUAN ……..……. 1
1.1 Latar Belakang …….. …… 1
1.2 Batasan Masalah ……... 2
1.3 Rumusan Masalah ……. 2
1.4 Tujuan Penelitian ……..... 3
1.5 Manfaat Penelitian …… 3
1.6 Tinjauan Pustaka ……..... 3
1.7 Metode Penelitian ……..... 4
BAB II DASAR TEORI …… 5
2.1 Matriks ……. 5
2.2 Polinomial dan Akar Simpel …… 14
2.3 Modulus Matriks ……. 16
2.4 Radius Spektral …… 17
2.5 Matriks yang dapat Direduksi ……. 36
2.6 Matriks yang tidak dapat Direduksi …… 39
2.7 Peluang ……. 43
2.8 Dinamika Populasi ……... 45
BAB III TEOREMA PERRON-FROBENIUS ……... 49

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB IV APLIKASI TEOREMA PERRON-FROBENIUS PADA RANTAI MARKOV …… 61
4.1 Teorema-Teorema Pendahuluan ……. 61
4.2 Aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov …… 63
4.3 Aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Dinamika Populasi …….. 74
BAB V PENUTUP ……... 86
5.1 Kesimpulan …… 86
5.2 Saran ……. 86
DAFTAR PUSTAKA …….. 86

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

ARTI LAMBANG

M_n	: matriks berukuran $n \times n$
a_{ij}	: elemen matriks A baris ke-i dan kolom ke-j
$A \geq_e 0$	: A nonnegatif, semua entri matriks A nonnegatif
$A >_e 0$	: A positif, semua entri matriks A positif
A^T	: transpose dari matriks A
I	: matriks Identitas
λ	: nilai eigen
$\mathbf{x}$	: vektor eigen
R^n	: matriks kolom n dengan entrinya bilangan riil
$\|A\|$ atau $det\ (A)$	: determinan dari matriks A
$\in$	: anggota dari
$\notin$	: bukan anggota dari
$\|\|A\|\|$	: norm matriks A
$\sum$	: notasi sigma
$\|a\|$	: nilai harga mutlak dari a
$m(A) = \|a_{ij}\|$	: modulus matriks
$\frac{d}{dx}$	: diturunankan terhadap variable x
$m(A)$	: modulus matriks A
$\rho_s(A)$	: radius spektral dari matriks A
ε	: epsilon
r_i	: baris ke-i
c_i	: kolom ke-j
S^{-1}	: invers dari matriks S
I^c	: komplemen dari I
$\subset$	: subhimpunan sejati
$k!$	: k faktorial
$\cup$	: gabungan dari

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

$\cap$	: irisan dari
$\mathrm{P}(\mathrm{X})$	: peluang dari kejadian X
$\mathrm{P}(\mathrm{Y}\|\mathrm{X})$	: peluang kejadian Y jika diketahui kejadian X
P^k	: matriks peralihan P dengan k percobaan
R_0	: angka reproduksi bersih
■	: akhir dari pembuktian

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

APLIKASI TEOREMA PERRON-FROBENIUS

PADA RANTAI MARKOV DAN DINAMIKA POPULASI

Oleh:

Nilna Roudhatul Farihah

ABSTRAKSI

Teorema Perron-Frobenius merupakan salah satu teorema dari matriks nonnegatif. Teorema ini dibagi menjadi tiga, yaitu untuk matriks positif, untuk matriks primitif, dan untuk matriks nonnegatif yang tidak dapat direduksi. Teorema ini dapat diaplikasikan pada Rantai Markov dan dinamika populasi.

Dalam Rantai Markov, nilai radius spektral dari matriks peralihannya mempengaruhi ada atau tidaknya nilai limit dari matriks peralihannya. Ini berkaitan dengan vektor-vektor keadaan yang akan mendekati atau tidak mendekati suatu vektor tetap. Dalam dinamika populasi, kestabilan pertumbuhan populasi dapat diperlihatkan melalui angka pertumbuhan dan angka reproduksi bersih, yang berturut-turut merupakan nilai radius spektral dari matriks proyeksi dan matriks generasi berikutnya.

Hasil akhir didapatkan bahwa jika radius spektral dari matriks peralihannya 1 maka nilai limitnya ada sedangkan jika angka pertumbuhan dan angka reproduksi bersih sama-sama bernilai satu, maka perumbuhan akan tetap.

Kata kunci: Teorema Perron-Frobenius, matriks nonnegatif, radius spektral, Rantai Markov, matriks dinamika populasi, angka reproduksi bersih

.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teorema Peron-Frobenius adalah salah satu teorema terkenal yang membahas matriks nonnegatif. Teorema ini dapat diterapkan diberbagai bidang, misalnya ekonomi, biologi, demografi, statistik, dll.

Penggambaran kondisi dalam dunia nyata berupa probabilitas peralihan dari suatu keadaan ke keadaan lain dalam kurun waktu tertentu bisa dinyatakan dengan kalimat matematika yang disebut Rantai Markov. (Leon, 2002) Probabilitas peralihan Rantai Markov ini dapat dinyatakan dalam suatu matriks.

Pertumbuhan populasi selalu berubah seiring waktu. Populasi dalam hal ini disebut dinamika populasi. Pertumbuhan populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matriks nonnegatif. Model matriks secara luas dapat digunakan untuk mendiskripsikan dinamika struktur populasi secara diskrit. Pengelompokan kelas, seperti umur, ukuran atau berat tubuh, tingkat siklus hidup, tingkat penyebaran penyakit, jenis kelamin, karakteristik gen, dll, penggunaannya secara teori dapat memanfaatkan aplikasi dari teori model matriks. (Cushing dan Ackleh, 2010) Tetap atau tidaknya model pertumbuhan populasi dapat dilihat dari angka pertumbuhan dan angka reproduksi bersihnya. (Li dan Schneider, 2001)

Pembahasan Rantai Markov dan dinamika populasi merupakan dua dari beberapa aplikasi Teorema Perron-Frobenius. Teorema ini mengkaji sifat dari matriks nonnegatif yang dilihat dari nilai eigen dominannya atau disebut juga nilai

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

radius spektral. Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan diperlihatkan sifat matriks yang membangunnya, baik Rantai Markov maupun model populasi, yang dilihat dari nilai radius spektral dari matriksnya.

Lebih lanjut, khususnya Rantai Markov, dapat diaplikasikan ke dalam banyak permasalahan, diantaranya permasalahan keuangan, riset pasar, obat-obatan, ilmu genetik, dan sebagainya. (Barnett, 2008) Selanjutnya, akan diperlihatkan hubungan angka pertumbuhan dengan angka reproduksi bersih dalam model pertumbuhan populasi dalam kaitannya dengan kestabilan populasi.

1.2 Batasan Masalah

Pembatasan masalah diperlukan dalam suatu penelitian ilmiah karena dapat membantu penulis fokus pada suatu objek penelitian. Adapun batasan masalahnya adalah mengkaji konsep matriks nonnegatif beserta Teorema Perron-Frobenius dan bukti teoremanya serta aplikasinya pada Rantai Markov dan dinamika populasi.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

1.3 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Apakah Teorema Perron-Frobenius itu?
2. Bagaimana aplikasi Teorema Perron-Frobenius dalam Rantai Markov?
3. Bagaimana aplikasi Teorema Perron-Frobenius dalam dinamika populasi?

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji Teorema Perron-Frobenius.
2. Mengaplikasikan Teorema Perron-Frobenius ke dalam Rantai Markov.
3. Mengaplikasikan Teorema Perron-Frobenius ke dalam dinamika populasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat, di antaranya sebagai berikut :

1. Memberikan pengetahuan tentang konsep matriks nonnegatif.
2. Memberikan pengetahuan tentang Teorema Perron-Frobenius.
3. Memberikan pengetahuan tentang aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov dan dinamika populasi.
4. Memberikan motivasi kepada para peneliti atau para pembaca untuk lebih mengembangkankan penerapan Teorema Perron-Frobenius pada bidang lain.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

1.6 Tinjauan Pustaka

Pembahasan mengenai Teorema Perron-Frobenius dan aplikasinya dalam Rantai Markov mengacu pada buku karangan C. Radhkrishna Rao dan M. Bhaskara Rao (1998) sedangkan aplikasi pada populasi dinamik mengacu pada jurnal dari Chi-Kwong Li dan Hans Schneider (2001). Selain referensi tersebut, juga digunakan buku karangan Carl Dean Meyer (2000) dan buku-buku lain yang

juga membahas tentang aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov dan populasi dinamik.

Penulisan skripsi ini terinspirasi dari penelitian sebelumnya yang berjudul "Teorema Perron-Frobenius pada Matriks Nonnegatif yang Tidak Dapat Direduksi" oleh Aini Hidayah (2008), mahasiswi UGM yang membahas tentang Teorema Perron-Frobenius pada matriks nonnegatif yang tidak dapat direduksi. Dalam skripsi ini belum dicantumkan aplikasi dari Teorema Perron-Frobenius sehingga penulis mengembangkannya dengan mengapliksikannya Rantai Markov dan populasi dinamik.

1.7 Metode Penelitian

Penulis melakukan penelitian tugas akhir ini dengan cara studi literatur, yaitu mempelajari beberapa sumber tertulis tentang matriks nonnegatif, Teorema Perron-Frobenius, aplikasinya pada Rantai Markov dan dinamika populasi. Sumber data yang akan penulis gunakan dalam penelitian ini berupa buku-buku dan hasil penelitian-penelitian lain yang berhubungan dengan penelitian penulis.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian dan studi literatur yang dilakukan penulis tentang aplikasi Teorema Perron-Frobenius pada Rantai Markov dan dinamika populasi, dapat diberikan beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Inti dari Teorema Perron-Frobenius, baik pada matriks positif, matriks primitif, maupun matriks *irreducible*, adalah nilai radius spektralnya yang selalu positif dengan vektor eigen positif yang bersesuaian dengan radius spektral.
2. Pada Rantai Markov, nilai radius spektral berpengauh terhadap ada atau tidaknya limit dari matriks peralihannya. Jika nilai radius spektralnya satu maka limit matriks peralihannya ada dan tidak nol.
3. Pada dinamika populasi, pertumbuhan populasi akan tetap jika angka pertumbuhan dan angka reproduksi bersih sama dengan 1. Jika angka reproduksi bersih lebih besar dari angka pertumbuhan maka pertumbuhan akan tidak terbatas, dan sebaliknya. Angka pertumbuhan dan angka reproduksi bersih merupakan nilai radius spektral dari matriks nonnegatif yang membangunnya.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan penulis, beberapa saran yang dapat penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya, yaitu:

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

1. Perlu pengembangan terhadap aplikasi Teorema Perron-Frobenius karena masih banyak, diantaranya pada model ekonomi Leontif dan pada matriks polinomial.
2. Untuk selanjutnya, Rantai Markov dapat diaplikasikan dan diperdalam lagi dalam bidang statistik.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga. Alih bahasa: I Nyoman Susila.

Barnett, Raymond A., dkk. 2008. *Finite Mathematics for Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences.* 11th edition. Pearson Education LTD.

Cushing, J.M. dan Ackhleh, A.S. 2010. *A Net Reproductive Number for Periodic Matrix Models.* Journal of Biological Dynamics. iFirst, 2011, 1-23.

Goldberg, Jack L. 1991. *Matrix Theory with Applications.* McGrow-Hill, Inc.

Leon, Steven J. 2002. *Linear Algebra with Applications*. 6th edition. New Jersey: Prentice Hall.

Li, Chi-Kwong dan Schneider, Hans. 2001. *Applications of Perron-Frobenius Theory to Population Dynamics.*

Meyer, Carl Dean. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Philadelphia: SIAM.

Rao, C. Radhakrishna dan Rao, M. Baskara. 1998. *Matrix Algebra and Its Applications to Statistics and Econometrics.* Word Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.

STATE ISLAMIC UNIVERSITY
SUNAN KALIJAGA
YOGYAKARTA