

**APLIKASI MATRIKS INVERS TERGENERALISIR  
PADA JARINGAN LISTRIK**

Skripsi  
untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1  
Program Studi Matematika



diajukan oleh

**Arif Herlambang Utama**

**05610039**

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UIN SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

2010



## SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas Akhir  
Lamp :

Kepada  
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta  
Di Yogyakarta.

*Assalamu`alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara :

Nama : Arif Herlambang Utama  
NIM : 05610039  
Judul Skripsi : Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisir pada Jaringan Listrik

sudah dapat diajukan kembali kepada Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan/ Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami mengucapkan terima kasih.  
*Wassalamu`alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 16 Juni 2010

Pembimbing I

Dra. Khurul Wardati, M.Si  
NIP. 19660731 200003 2 001



## SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR

Hal : Persetujuan Skripsi/Tugas Akhir  
Lamp :

Kepada  
Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi  
UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta  
Di Yogyakarta

*Assalamu`alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara :

Nama : Arif Herlambang Utama  
NIM : 05610039  
Judul Skripsi : Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisir pada Jaringan Listrik

sudah dapat diajukan kembali kepada Fakultas Sains dan Teknologi Jurusan/ Program Studi Matematika UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Matematika.

Dengan ini kami mengharap agar skripsi/tugas akhir saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami mengucapkan terima kasih.

*Wassalamu`alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 16 Juni 2010  
Pembimbing II

Zenith Purisha, S.Si



**PENGESAHAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Nomor : UIN.02/D.ST/PP.01.1/1575/2010

Skripsi/Tugas Akhir dengan judul : Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisir pada Jaringan Listrik

Yang dipersiapkan dan disusun oleh :  
Nama : Arif Herlambang Utama  
NIM : 0561 0039  
Telah dimunaqasyahkan pada : 8 Juli 2010  
Nilai Munaqasyah : A / B

Dan dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga

**TIM MUNAQASYAH :**

Ketua Sidang

Dra.Hj. Khurul Wardati, M.Si  
NIP. 19660731 200003 2 001

Penguji I

Muhammad Wakhid Musthofa, M.Si  
NIP.19800402 200501 1 003

Penguji II

Widayanti, M.Si  
NIP.19760526 200604 2 005

Yogyakarta, 13 Juli 2010

UIN Sunan Kalijaga

Fakultas Sains dan Teknologi

Dekan



Dra. Maizer Said Nahdi, M.Si  
NIP. 19550427 198403 2 001

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penelitian dalam skripsi ini dapat terselesaikan. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi umat islam.

Penyusunan skripsi ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana Program Studi Matematika. Skripsi ini berisi tentang pembahasan mengenai matriks invers tergeneralisir dan penerapannya pada jaringan listrik. Penyusunan skripsi ini mendapat bantuan dari berbagai pihak. Ucapan terima kasih disampaikan sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu, Bapak dan Keluargaku atas pengertian, bantuan dan dukungannya sehingga penyusunan skripsi ini dapat selesai.
2. Ibu Dra. Maizer Said Nahdi, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
3. Ibu Sri Utami Zuliana, M. Si selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.
4. Ibu Dra. Khurul Wardati, M.Si dan Ibu Zenith Purisha, S.Si selaku dosen pembimbing I dan II yang telah meluangkan waktu memberikan bimbingan, arahan, bantuan, dan ilmu dalam menyelesaikan skripsi ini.

5. Bapak/ Ibu Dosen dan Staf Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta atas ilmu, bimbingan dan pelayanan selama perkuliahan dan penyusunan skripsi ini selesai.
6. Bapak Suroto, M.Sc, Ibu Widayanti, M.Si, Burhan dan Hana atas ilmu, bantuan dan dukungan selama ini.
7. *Beloved Friends*, Herman, Mahrus, Ima, Adit, Slamet, Raudak, Nova, Idi, Indah, Minal, Desi, Lita dan teman-teman Matematika angkatan 2005 lainnya yang telah memberi warna, bantuan dan dukungan selama ini.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2006-2008 yang telah memberi warna, bantuan dan bertanya "Kapan Munaqosyah?".
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan dan kesalahan. Namun demikian, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, 16 Juni 2010

Penulis

Arif Herlambang Utama

## PERSEMBAHAN

*Skripsi ini penulis persembahkan kepada :*

- *Ibu dan bapakku yang telah membesarkan, mendidik, dan mendoakanku.*
- *Guru-guruku yang telah memberikan ilmu kepadaku.*
- *Almamater Prodi Matematika Fakultas Sains & Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta.*



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## MOTTO

*“Allah tidak akan merubah keadaan suatu kaum  
sehingga mereka merubahnya sendiri...”*

*(Q.S. Ar-Ra’ad: 11)*

*“Hidup bisa mengalahkan kita,  
tetapi kita bisa memilih untuk bangkit atau tidak”.*

*(Jacky Chan, Film The Karate Kid).*

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN .....	iv
KATA PENGANTAR .....	v
HALAMAN PERSEMBAHAN .....	vii
HALAMAN MOTTO .....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN .....	xi
ABSTRAK .....	xiv
<b>BAB I PENDAHULUAN.....</b>	<b>1</b>
1.1. Latar Belakang Masalah.....	1
1.2. Batasan Masalah.....	3
1.3. Rumusan Masalah .....	3
1.4. Tujuan Penelitian .....	3
1.5. Manfaat Penelitian.....	4
1.6. Tinjauan Penelitian.....	4
1.6. Sistematika Penulisan .....	5
<b>BAB II DASAR TEORI .....</b>	<b>7</b>
2.1. Sistem Persamaan Linear .....	7
2.2. Matriks dan Operai Matriks .....	9
2.3. Matriks Invers .....	14
2.4. Ruang Vektor .....	18
2.5. Ruang Hasil Kali Dalam .....	20
2.6. Dekomposisi Nilai Singular .....	21
2.7. Jaringan Listrik.....	24

BAB III MATRIKS INVERS TERGENERALISIR .....	32
3.1. Matriks Invers Tergeneralisir .....	32
3.2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear .....	42
BAB IV APLIKASI MATRIKS INVERS TERGENERALISIR PADA JARINGAN LISTRIK.....	48
4.1. Jaringan $n$ -port dan Matriks Impedansi .....	48
4.2. Jumlahan Seri dan Pararel.....	57
BAB V PENUTUP.....	65
5.1. Kesimpulan .....	65
5.2. Saran-saran.....	65
DAFTAR PUSTAKA .....	67

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Resistor yang disusun seri.....	28
Gambar 2. Resistor yang disusun paralel.....	28
Gambar 3. Resistor dengan 2 sumber tegangan.....	30
Gambar 4.a. Resistor dengan sumber tegangan $v_1$ saja.....	30
Gambar 4.b. Resistor dengan sumber tegangan $v_2$ saja.....	31
Gambar 5. Jaringan 4-port.....	49
Gambar 6. Bukan jaringan 4-port.....	50
Gambar 7. Jaringan 3-port.....	51
Gambar 8. Jaringan 3-port.....	52
Gambar 9.a. Sumber arus diterapkan pada port 1.....	53
Gambar 9.b. Sumber arus diterapkan pada port 2.....	53
Gambar 9.c. Sumber arus diterapkan pada port 3.....	54
Gambar 10. Jaringan 2-port.....	55
Gambar 11.a. Sumber arus diterapkan pada port 1.....	55
Gambar 11.b. Sumber arus diterapkan pada port 2.....	55
Gambar 12.a. Jaringan 3-port.....	58
Gambar 12.b. Jaringan 3-port.....	58
Gambar 13. Dua jaringan 3-port yang disusun seri.....	58
Gambar 14. Dua jaringan 2-port yang disusun seri.....	59
Gambar 15.a. Jaringan 2-port $N_1$ .....	60
Gambar 15.b. Jaringan 2-port $N_2$ .....	60
Gambar 14. Dua jaringan 3-port yang disusun paralel.....	63
Gambar 17.a. Jaringan 3-port $N_1$ .....	64
Gambar 17.b. Jaringan 3-port $N_2$ .....	64

## ARTI LAMBANG DAN SINGKATAN

$I_r$	: matriks identitas berorde $r \times r$
$v$	: tegangan/ beda potensial
$i$	: arus
$z$	: impedansi
$V$	: matriks kolom dengan entri-entrinya tegangan
$I$	: matriks kolom dengan entri-entrinya arus.
$Z$	: matriks impedansi
$a_{ij}$	: entri dari matriks $A$ pada baris ke- $i$ dan kolom ke- $j$
$m \times n$	: ukuran/ orde dari suatu matriks, yaitu $m$ baris dan $n$ kolom
$\Sigma$	: notasi sigma
$\text{tr}(A)$	: trace dari matriks $A$
$\bar{A}$	: konjugat dari matriks $A$
$A^T$	: transpose dari matriks $A$
$A^*$	: konjugat transpose dari $A$
$\text{rank}(A)$	: rank dari matriks $A$
$A^{-1}$	: invers dari matriks $A$
$C_{ij}$	: kofaktor dari suatu matriks
$\det(A)$	: determinan dari matriks $A$
$\text{Adj}(A)$	: adjoin dari matriks $A$
$\mathbb{C}^n$	: matriks kolom $n$ dengan entrinya bilangan kompleks
$\in$	: elemen dari
$\forall$	: untuk setiap
$\exists$	: untuk suatu/ terdapat
$\mathcal{V}$	: ruang vektor
$\mathcal{F}$	: lapangan/ field

$\hat{S}$	: sub ruang dari $\mathcal{V}$
$\langle u, v \rangle$	: hasil kali dalam antara dua vektor
$\mathcal{R}$	: bilangan real
$\mathcal{R}^n$	: matriks kolom $n$ dengan entri-nya bilangan real
$\lambda$	: nilai eigen dari suatu matriks
$\sigma$	: nilai singular
$\ x_i\ $	: norma/ panjang dari vektor $x_i$
$r_s$	: resitor pengganti seri
$r_p$	: resitor pengganti paralel
$\varepsilon$	: sumber tegangan
$\ A\ $	: norma dari matriks $A$
$A^+$	: matriks invers tergeneralisir dari $A$ .

# APLIKASI MATRIKS INVERS TERGENERALISIR PADA JARINGAN LISTRIK

Oleh : Arif Herlambang Utama (05610039)

## ABSTRAK

Konsep matriks invers dalam aljabar linier elementer hanya dibatasi pada matriks  $n \times n$  yang nonsingular saja, tetapi untuk matriks berorde  $m \times n$  atau matriks  $n \times n$  yang singular dapat diselesaikan menggunakan konsep matriks invers tergeneralisir.

Matriks  $A^+$  adalah matriks invers tergeneralisir dari sembarang matriks  $A$  yang memenuhi empat aksioma, yaitu :  $AA^+A = A$ ,  $A^+AA^+ = A^+$ ,  $(AA^+)^* = AA^+$ , dan  $(A^+A)^* = A^+A$ .

Permasalahan pada jaringan listrik  $n$ -port yang dibentuk menjadi sistem persamaan linear  $V = ZI$ , realita yang terjadi matriks koefisien  $Z$  tidak hanya terbatas pada matriks  $n \times n$  yang nonsingular saja, tetapi matriks berorde  $m \times n$  atau matriks  $n \times n$  yang singular sehingga digunakan konsep matriks invers tergeneralisir untuk mencari penyelesaiannya.

Kata kunci : Dekomposisi nilai singular, matriks invers tergeneralisir, jaringan listrik  $n$ -port, impedansi.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Matematika adalah salah satu disiplin ilmu yang memegang peran penting dalam kajian ilmu di berbagai bidang, terutama konsep logika dan analisa yang terkandung di dalamnya. Matematika digunakan sebagai dasar perkembangan teknologi modern dan daya pikir manusia. Dasar dalam perkembangan tersebut adalah pengembangan kajian matematika di bidang teori bilangan, aljabar, analisis, geometri, teori peluang, matematika diskrit, dan sebagainya. Salah satu rumpun yang banyak dikembangkan adalah konsep aljabar.

Aljabar yang diberikan dalam perkuliahan diantaranya adalah aljabar abstrak dan aljabar linear. Salah satu materi yang dibahas dalam perkuliahan adalah matriks beserta komponen dan sifat-sifatnya, termasuk mengenai matriks invers.

Konsep matriks invers dalam aljabar linear elementer hanya dibatasi pada matrik persegi berorde  $n \times n$  dan nonsingular. Jika  $A$  matriks yang mempunyai invers maka terdapat matriks  $B$  sedemikian sehingga  $AB = BA = I_r$ . Penggunaan matriks invers digunakan dalam menentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear  $AX = B$  yang sesuai, yaitu  $X = A^{-1}B$ . Aljabar linear banyak diterapkan dalam berbagai masalah, salah satunya dalam bidang elektronika, yaitu penyelesaian sistem persamaan linear pada jaringan listrik yang terdiri dari  $n$ -port.





nonsingular saja, sehingga penulis ingin mengkaji matriks  $Z$  yang berorde  $m \times n$  atau matriks  $Z$  yang berorde  $n \times n$  yang singular, untuk mendukung hal tersebut digunakan konsep matriks invers tergeneralisir.

## 1.2. Batasan Masalah

Pembatasan masalah diperlukan dalam suatu penelitian ilmiah karena dapat membantu penulis fokus pada suatu objek penelitian. Permasalahan yang akan dibahas adalah mencari matriks invers tergeneralisir dari sebarang matriks untuk digunakan dalam penyelesaian sistem persamaan linear yang dibentuk dari jaringan listrik  $n$ -port.

## 1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan, maka dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana konsep matriks invers tergeneralisir dari sebarang matriks?
2. Bagaimana konsep jaringan listrik  $n$ -port?
3. Bagaimana menyelesaikan permasalahan pada jaringan listrik  $n$ -port menggunakan konsep matriks invers tergeneralisir?

## 1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Mengetahui konsep matriks invers tergeneralisir.
2. Mengetahui konsep jaringan listrik  $n$ -port.

3. Mendapatkan penyelesaian permasalahan pada jaringan listrik  $n$ -port menggunakan konsep matriks invers tergeneralisir.

### 1.5. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat, di antaranya sebagai berikut :

1. Memberikan pengetahuan tentang matriks invers tergeneralisir.
2. Memberikan gambaran tentang jaringan listrik  $n$ -port.
3. Memberikan pengetahuan tentang penerapan matriks invers tergeneralisir pada jaringan listrik  $n$ -port.
4. Memberikan motivasi kepada para peneliti untuk lebih mengembangkan konsep matriks invers tergeneralisir dan penerapannya pada bidang lain.

### 1.6. Tinjauan Pustaka

Penulisan skripsi ini terinspirasi dari penelitian sebelumnya berjudul “Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisasi pada Cipher Hill” oleh Ikhwanudin Achmad (2007), mahasiswa UGM yang membahas tentang matriks invers tergeneralisir dan penerapannya pada Cipher Hill, yaitu salah satu cipher dalam bidang kriptografi.

Perbedaan penelitian ini dari penelitian Ikhwanudin adalah beberapa teorema dan sifat dalam matriks invers tergeneralisir yang akan digunakan dalam penerapan pada jaringan listrik  $n$ -port dan permasalahan yang akan dibahas pada jaringan listrik  $n$ -port berbeda dengan Cipher Hill. Entri-entri matriks yang

digunakan pada Cipher Hill adalah bilangan modulo 26 atau  $Z_{26}$ , sedangkan pada jaringan listrik entri-entri dari matriks adalah bilangan kompleks.

Pembahasan mengenai matriks invers tergeneralisir mengacu kepada buku karangan Thomas L. Bouillion and Patrick L. Odell (1971) yang berjudul *Generalized Inverse Matrices* sedangkan penerapannya pada jaringan listrik mengacu kepada buku karangan Stephen L. Campbell dan Carl D. Meyer (1979) yang berjudul *Generalized Inverses of Linear Transformations*.

Selain referensi di atas digunakan buku-buku yang membahas tentang matriks invers tergeneralisir lainnya, diantaranya buku karangan Setiadji (1996) yang berjudul *Matriks Invers Tergeneralisasi* dan J.L. Goldberg (1991) yang berjudul *Matrix Theory with Applications*.

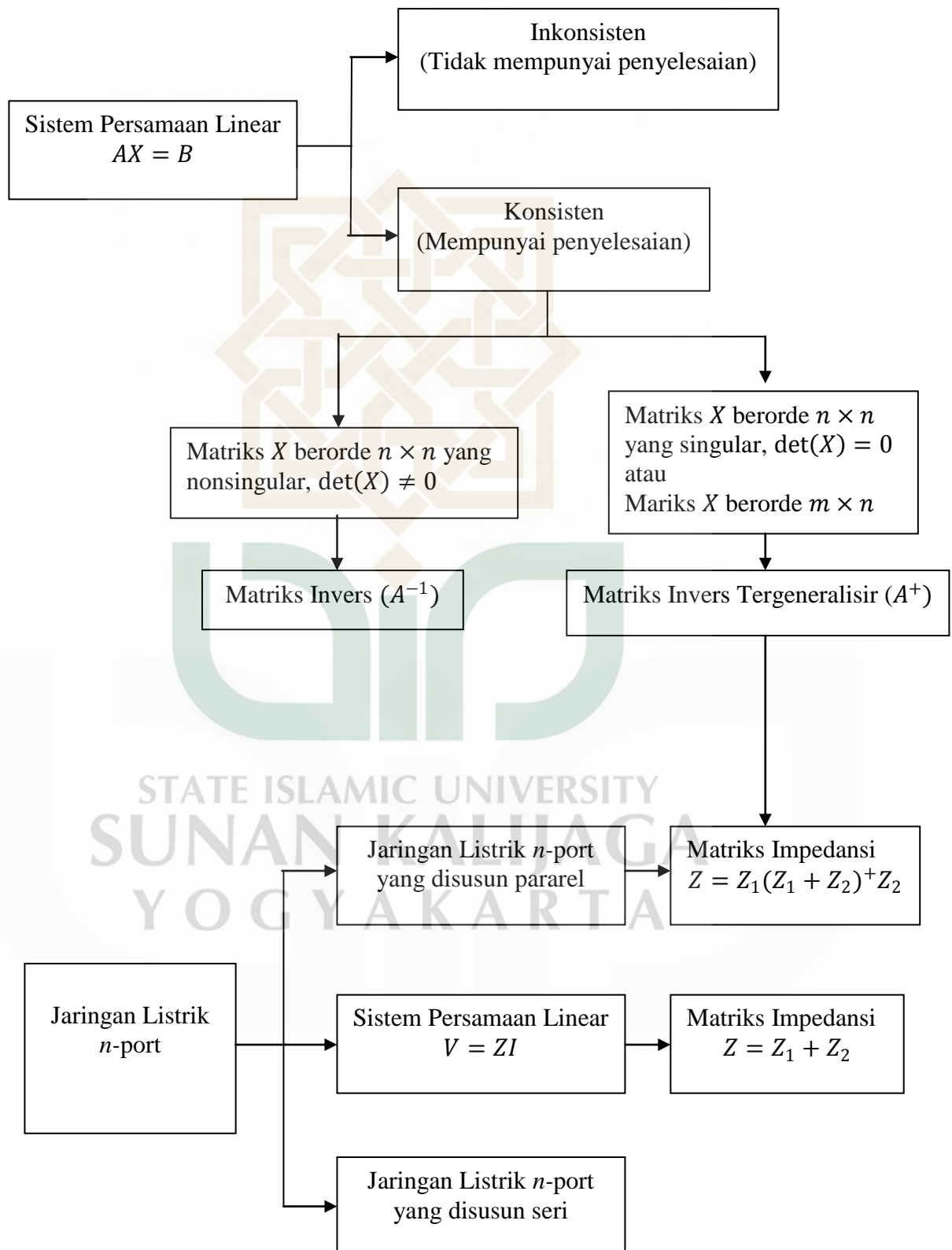
### **1.7. Metode Penelitian**

Penelitian tugas akhir ini dilakukan dengan cara studi literatur, yaitu penulis akan mempelajari beberapa sumber tertulis tentang matriks invers tergeneralisasi dan penerapannya pada jaringan listrik.

Sumber data yang akan penulis gunakan dalam penelitian berupa buku dan hasil penelitian lain yang berhubungan dengan penelitian penulis serta konsultasi dengan dosen pembimbing.

Secara rinci langkah-langkah penelitian yang dilakukan dapat dilihat pada flowchart berikut ini :

## FLOWCHART



## BAB V

### PENUTUP

#### 5.1. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian dan studi literatur yang dilakukan penulis tentang matriks invers tergeneralisir dan aplikasinya pada jaringan listrik dapat ditarik beberapa kesimpulan berikut ini :

1. Konsep matriks invers hanya terbatas pada matriks berorde  $n \times n$  yang nonsingular saja, tetapi untuk matriks berorde  $m \times n$  atau matriks  $n \times n$  yang singular dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep matriks invers tergeneralisir.
2. Sebarang matriks mempunyai matriks invers tergeneralisir dan tunggal.
3. Matriks invers tergeneralisir pada jaringan listrik  $n$ -port digunakan untuk penyelesaian matriks impedansi  $Z$  berorde  $n \times n$  yang singular.
4. Mencari matriks impedansi  $Z$  dari dua jaringan listrik  $n$ -port yang disusun paralel dapat menggunakan konsep matriks invers tergeneralisir.

#### 5.2. Saran-saran

Berdasarkan proses penelitian yang dilakukan penulis, maka saran-saran yang ingin disampaikan adalah :

1. Pembahasan tentang konsep matriks invers tergeneralisir dan sifat-sifatnya dapat dikembangkan lagi misalnya pembahasan pada matriks yang dipartisi.

2. Mencari matriks invers tergeneralisir dari sebarang matriks pada skripsi ini masih menggunakan cara manual sehingga cara komputasi diperlukan untuk memudahkan perhitungan.
3. Menyelesaikan permasalahan pada lebih dari susunan dua jaringan listrik  $n$ -port yang disusun campuran (seri dan paralel) belum dibahas dalam skripsi ini sehingga dapat dikembangkan lagi.
4. Matriks invers tergeneralisir dapat diterapkan pada bidang lain, seperti cipher hill pada kriptografi, analisis regresi pada statistik dan sebagainya.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Anton, Howard. 1987. *Aljabar Linear Elementer*. Bandung: Erlangga.
- Ayres, Frank. 1984. *Teori & Soal-Soal Matriks (Versi SI Metrik)*. Jakarta: Erlangga.
- Bouillion, Thomas L. and Odell, Patruick L. 1971. *Generalized Inverse Matrices*. New York: John Wiley&Sons, Inc.
- Campbel, Stephen L. and Meyer, Carl D. 1979. *Generalized Inverse of Linear Transformations*. London: Pitman Pub.
- Giancoli, D.C. 2001. *Fisika*. Jakarta: Erlangga.
- Gere, James M. And Weawer, Wiliam. 1983. *Aljabar Matrikx untuk Para Pemula*. Jakarta: Erlangga.
- Goldberg, J.L. 1991. *Matrix Theory with Applications*. New York: Mc GrawHill, Inc.
- Ikhwanudin Achmad. 2007. *Aplikasi Matriks Invers Tergeneralisasi pada Cipher Hill*. Skripsi. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas MIPA UGM.
- Leon, Steven J. 1999. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.
- Lipschutz, S. and Lipson, Mark L. 2004. *Aljabar Linear (Schaum's)*. Jakarta: Erlangga.
- Setiadji. 2008. *Aljabar Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Setiadji. 2006. *Matriks Invers Tergeneralisasi*. Yogyakarta: Pascasarjana UGM.
- Zukhri, Zainudin. 2007. *Analisis Rangkaian*. Yogyakarta: Graha Ilmu.