

**SKRIPSI**

**TITIK SETIMBANG NASH PADA PERMAINAN DINAMIS  
LINEAR KUADRATIK NON-KOOPERATIF DENGAN  
ASUMSI SELURUH PEMAIN DAPAT MENSTABILKAN  
SISTEM**



**MAULIDATU JAUHAROTI ALISYAH**  
**20106010001**  
STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**  
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**  
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA**  
**YOGYAKARTA**

**2024**

**TITIK SETIMBANG NASH PADA PERMAINAN DINAMIS  
LINEAR KUADRATIK NON-KOOPERATIF DENGAN  
ASUMSI SELURUH PEMAIN DAPAT MENSTABILKAN  
SISTEM**

Skripsi

Untuk memenuhi sebagian persyaratan  
mencapai derajat Sarjana S-1  
Program Studi Matematika



diajukan oleh

**MAULIDATU JAUHAROTI ALISYAH**

**20106010001**

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
**SUNAN KALIJAGA**  
YOGYAKARTA

Kepada

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA**

2024



## **SURAT PERSETUJUAN SKRIPSI/TUGAS AKHIR**

Hal : Persetujuan Skripsi / Tugas Akhir

Lamp :

Kepada

Yth. Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

di Yogyakarta

*Assalamu 'alaikum wr. wb.*

Setelah membaca, meneliti, memberikan petunjuk dan mengoreksi serta mengadakan perbaikan seperlunya, maka kami selaku pembimbing berpendapat bahwa skripsi Saudara:

Nama : Maulidatu Jauharoti Alisyah

NIM : 20106010001

Judul Skripsi : Titik Setimbang Nash pada Permainan Dinamis Linear Kuadratik Non-kooperatif dengan Asumsi Seluruh Pemain dapat Menstabilkan Sistem

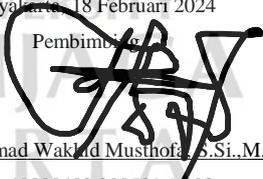
sudah dapat diajukan kembali kepada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Strata Satu dalam Program Studi Matematika.

Dengan ini kami berharap agar skripsi/tugas akhir Saudara tersebut di atas dapat segera dimunaqasyahkan. Atas perhatiannya kami ucapkan terima kasih.

*Wassalamu 'alaikum wr. wb.*

Yogyakarta, 18 Februari 2024

Pembimbing

  
Dr. Muhammad Wakid Musthofa, S.Si., M.Si

NIP. 19800402 200501 1 003



KEMENTERIAN AGAMA  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SUNAN KALIJAGA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Marsda Adisucipto Telp. (0274) 540971 Fax. (0274) 519739 Yogyakarta 55281

## PENGESAHAN TUGAS AKHIR

Nomor : B-422/U.n.02/DST/PP.00.9/03/2024

Tugas Akhir dengan judul : Titik Setimbang Nash pada Permainan Dinamis Linear Kuadratik Non-kooperatif dengan Asumsi Seluruh Pemain dapat Menstabilkan Sistem

yang dipersiapkan dan disusun oleh:

Nama : MAULIDATU JAUHAROTI ALISYAH  
Nomor Induk Mahasiswa : 20106010001  
Telah diujikan pada : Selasa, 05 Maret 2024  
Nilai ujian Tugas Akhir : A

dinyatakan telah diterima oleh Fakultas Sains dan Teknologi UIN Sunan Kalijaga Yogyakarta

### TIM UJIAN TUGAS AKHIR



Ketua Sidang

Dr. Muhammad Wakhid Musthofa, S.Si., M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 65f12c87bbaaf



Penguji I

Dr. Sugiyanto, S.Si., ST., M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 65f278bf45bdc



Penguji II

Muhamad Zaki Riyanto, S.Si., M.Sc.  
SIGNED

Valid ID: 65eeb7c10abb0



Yogyakarta, 05 Maret 2024  
UIN Sunan Kalijaga  
Dekan Fakultas Sains dan Teknologi

Prof. Dr. Dra. Hj. Khurul Wardati, M.Si.  
SIGNED

Valid ID: 65f2ac3013e90

## SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Maulidatu Jauharoti Alisyah

NIM : 20106010001

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa isi skripsi ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar sarjana di suatu Perguruan Tinggi dan sesungguhnya skripsi ini merupakan hasil pekerjaan penulis sendiri sepanjang pengetahuan penulis, bukan duplikasi atau saduran dari karya orang lain kecuali bagian tertentu yang penulis ambil sebagai bahan acuan. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Yogyakarta, 18 Februari 2024



Maulidatu Jauharoti Alisyah  
NIM. 20106010001

STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## HALAMAN PERSEMBAHAN



Karya ini dipersembahkan untuk Mamah, Bapak, dan  
almamater penulis, UIN Sunan Kalijaga.

## HALAMAN MOTTO



Pendidikan adalah senjata paling kuat yang bisa digunakan untuk mengubah dunia.

- Nelson Mandela

## PRAKATA

*Allhamdulillahirabbil'alamin*, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, nikmat, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Titik Setimbang Nash pada Permainan Dinamis Linear Kuadratik Non-kooperatif dengan Asumsi Seluruh Pemain dapat Menstabilkan Sistem". Penulisan skripsi ini diselesaikan sebagai salah satu prasyarat mencapai gelar Sarjana Matematika.

Penulis menyadari banyak pihak yang memberikan dukungan, bantuan, dan nasihat selama menyelesaikan studi dan tugas akhir ini. Oleh karena itu, dengan kerendahan hati dan penuh hormat penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. Hj. Khurul Wardati, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.
2. Muchammad Abrori, S.Si., M.Kom., selaku Ketua Program Studi Matematika.
3. Dr. Muhammad Wakhid Musthofa., S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing akademik sekaligus dosen pembimbing skripsi yang memiliki sabar begitu luas, meluangkan waktu ditengah kesibukan beliau, memberikan kritik, saran, dan arahan dalam proses penulisan skripsi ini.
4. Seluruh dosen Program Studi Matematika dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmu bermanfaat dan memberikan pelayanan

administrasi akademik.

5. Teristimewa kedua orang tua penulis, Bapak Syahrianto dan Ibu Dwi Listyorini, yang selalu memberikan kasih sayang, nasihat, doa tiada henti, serta kesabaran yang luar biasa dalam setiap langkah hidup penulis, yang merupakan anugerah terbesar dalam hidup.
6. Adik penulis Muhammad Gilang Rahmadani Alisyah dan keluarga besar, teman diskusi masalah perkuliahan, hidup, dan masa depan. Terimakasih doa - doa tulus untuk mencapai impian.
7. Seseorang yang spesial Awal Febriantono, yang dengan tulus mendengarkan keluh kesah dan menemani selama proses penyusunan. Terimakasih untuk tenaga, doa, dan *support* sehingga penulis tidak merasa sendiri dalam menyelesaikan perkuliahan.
8. Sahabat sahabat yang juga sedang berjuang, Indri, Putri, Sella, Dicha, Audira, dan Anisa. Walaupun berbeda universitas, semangat dan *support* yang diberikan selalu sampai dengan hangat. Yuk semangat kita!.
9. Teman - teman seperjuangan yang luar biasa, Dhiya, Aulia, Ardit, Uul, Devi, Risma dan Tsalis yang membuat masa perkuliahan lebih berwarna dengan tawa, drama, dan rencana rencana yang ternyata kebanyakan wacana.
10. Angkatan 2020 Prodi Matematika, yang dengan berbagai macam watak serta sifat. Terimakasih sudah menjadi teman yang baik selama perkuliahan.
11. Teman - teman seperjuangan di organisasi, HMPS Matematika Tahun 2021 dan 2022 serta IKAHIMATIKA Indonesia Wilayah IV yang menambah pengalaman luar biasa serta wawasan dalam catatan perjuangan ini.

12. Semua pihak yang membantu dalam proses skripsi ini. Penulis ucapkan terimakasih yang tak terhingga.

Semoga Allah SWT memberi balasan atas segala kebaikan dan keikhlasan berbagai pihak kepada penulis. Penulis menyadari skripsi ini masih banyak kekurangan dan jauh dari kata kesempurnaan. Untuk itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi menyempurnakan skripsi ini.

Akhir kata, semoga skripsi ini berguna dan bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Yogyakarta, 27 Februari 2024

Penulis



STATE ISLAMIC UNIVERSITY  
SUNAN KALIJAGA  
YOGYAKARTA

## DAFTAR ISI

|  |      |
|--|------|
| <b>HALAMAN JUDUL</b> . . . . .                   | i    |
| <b>HALAMAN PERSETUJUAN TUGAS AKHIR</b> . . . . . | ii   |
| <b>HALAMAN PENGESAHAN</b> . . . . .              | iii  |
| <b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN</b> . . . . .     | iv   |
| <b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> . . . . .             | v    |
| <b>HALAMAN MOTTO</b> . . . . .                   | vi   |
| <b>PRAKATA</b> . . . . .                         | vii  |
| <b>DAFTAR ISI</b> . . . . .                      | x    |
| <b>DAFTAR GAMBAR</b> . . . . .                   | xii  |
| <b>DAFTAR LAMBANG</b> . . . . .                  | xiii |
| <b>INTISARI</b> . . . . .                        | xvi  |
| <b>ABSTRACT</b> . . . . .                        | xvii |
| <b>I PENDAHULUAN</b> . . . . .                   | 1    |
| 1.1. Latar Belakang Masalah . . . . .            | 1    |
| 1.2. Batasan Masalah . . . . .                   | 4    |
| 1.3. Rumusan Masalah . . . . .                   | 5    |
| 1.4. Tujuan Penelitian . . . . .                 | 5    |
| 1.5. Manfaat Penelitian . . . . .                | 6    |
| 1.6. Tinjauan Pustaka . . . . .                  | 7    |
| 1.7. Metode Penelitian . . . . .                 | 7    |
| 1.8. Sistematika Penulisan . . . . .             | 8    |
| <b>II DASAR TEORI</b> . . . . .                  | 10   |
| 2.1. Optimisasi Fungsi Konveks . . . . .         | 10   |

|   |            |
|---|------------|
| 2.1.1. Himpunan dan Fungsi Konveks  | 10         |
| 2.1.2. Fungsi Berbentuk Kuadrat   | 14         |
| 2.1.3. Optimisasi Fungsi Konveks Tanpa Kendala  | 16         |
| 2.2. Sistem Kontinu LTI   | 18         |
| 2.2.1. Keterkendalian   | 23         |
| 2.2.2. Ruang Bagian Invarian  | 34         |
| 2.2.3. Kendali Umpan Balik dan <i>Stabilizability</i>   | 38         |
| 2.2.4. Keteramatan dan Keterdeteksian   | 40         |
| 2.3. Persamaan Aljabar Riccati  | 41         |
| 2.4. Kendali Optimal Linear Kuadrat Waktu tak Berhingga   | 45         |
| 2.5. Teori Permainan Dinamis  | 54         |
| 2.6. Faktor Diskon ( <i>Discount Factor</i> )   | 61         |
| <b>III PERMAINAN LINEAR KUADRATIK NON-KOOPERATIF DENGAN</b>   |            |
| <b>ASUMSI SELURUH PEMAIN DAPAT MENSTABILKAN SISTEM</b>  | <b>65</b>  |
| 3.1. Contoh Kestabilan Sistem   | 65         |
| 3.2. Titik Setimbang Nash pada Permainan Linear Kuadrat Non-Kooperatif dengan Asumsi Keseluruhan Pemain dapat Menstabilkan Sistem | 67         |
| <b>IV PENERAPAN PERMAINAN LINEAR KUADRATIK PADA STABILISASI</b>   |            |
| <b>SASIHUTANG PEMERINTAH</b>  | <b>83</b>  |
| <b>V PENUTUP</b>  | <b>94</b>  |
| 5.1. Kesimpulan   | 94         |
| 5.2. Saran  | 95         |
| <b>DAFTAR PUSTAKA</b>   | <b>96</b>  |
| <b>Curriculum Vitae</b>   | <b>100</b> |

## DAFTAR GAMBAR

|   |    |
|---|----|
| 1.1 Skema Metode Penelitian . . . . .                                     | 8  |
| 2.1 Himpunan konveks $K_1$ dan himpunan tidak konveks $K_2$ . . . . .     | 11 |
| 2.2 Hasil grafik fungsi konveks satu variabel dari $f(x) = x^2$ . . . . . | 13 |



## DAFTAR LAMBANG

|                   |   |   |
|-------------------|---|---|
| $K_i, i = 1, 2$   | : | Himpunan konveks $K$ ke $i$   |
| $K \subseteq R^n$ | : | $K$ himpunan bagian ( <i>subset</i> ) atau sama dengan $R^n$              |
| $k_i$             | : | skalar ke $i$   |
| $dom(g)$          | : | domain dari $g$   |
| $\mathbf{x}^T$    | : | transpos dari vektor $\mathbf{x}$   |
| $I$               | : | matriks identitas   |
| $A^{-1}$          | : | invers dari matriks $A$   |
| $A^T$             | : | transpos dari matriks $A$   |
| $det(A)$          | : | determinan dari matriks $A$   |
| $rank(A)$         | : | rank dari matriks $A$   |
| $\sigma(A)$       | : | spektrum dari matriks $A$   |
| $\sigma(A _S)$    | : | spektrum dari matriks $A$ yang berkenaan dengan ruang bagian invarian $S$ |
| $Im(A)$           | : | ruang kolom dari $A$  |
| $dim(S)$          | : | dimensi dari ruang bagian $S$   |

- $E^s$  : ruang bagian stabil  
 $E^u$  : ruang bagian tidak stabil  
 $\mathbb{C}^-$  : himpunan semua bilangan kompleks dengan bagian real negatif  
 $\mathbb{C}_0^+$  : himpunan semua bilangan kompleks dengan bagian real non-negatif  
 $\mathcal{F}$  : himpunan semua matriks kendali umpan balik  
 $\text{span}(A)$  : himpunan terkecil dari ruang vektor yang mengandung vektor - vektor asli dari matriks  $A$   
 $t_i$  : waktu berhingga ke -  $i$   
 $A_i^T$  : transpos dari matriks  $A_i$   
 $:=$  : proses pemberian nilai yang spesifik  
 $L_{2,loc}$  : himpunan semua fungsi terukur yang terintegral pada interval berhingga  $[0, T]$   
 $\mathbb{R}$  : himpunan semua bilangan real  
 $\mathbb{R}^n$  : himpunan semua vektor dengan  $n$  entri real

- $\mathcal{U}_s$  : himpunan semua fungsi kendali pada sistem lingkaran tertutup stabil  
 $\bigcap_{i=1}^n$  : irisan dari himpunan  $A$  dengan indeks  $i$  dari 1 hingga  $n$   
 $a_{ij}$  : suatu elemen  $a$  dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  dari suatu matriks atau himpunan  
 $\sum_{i=1}^n a_{ij}$  : penjumlahan elemen - elemen dari kolom  $j$  dari baris 1 hingga  $n$  dari suatu matriks atau himpunan  
 $e_i, i = 1, \dots, n$  : vektor - vektor eigen ke  $i$   
 ■ : akhir suatu bukti

## INTISARI

### TITIK SETIMBANG NASH PADA PERMAINAN DINAMIS LINEAR KUADRATIK NON-KOOPERATIF DENGAN ASUMSI SELURUH PEMAIN DAPAT MENSTABILKAN SISTEM

Oleh

Maulidatu Jauharoti Alisyah

20106010001

Titik setimbang Nash merupakan salah satu permasalahan penting dalam permainan dinamis linear kuadratik non-kooperatif. Penelitian ini bertujuan untuk mencari titik setimbang Nash menggunakan persamaan aljabar Riccati serta keterhubungannya dengan ruang bagian invariannya. Sistem kendali yang digunakan bertipe lingkaran terbuka dengan asumsi seluruh pemain dapat menstabilkan sistem. Masalah kendali optimal linear kuadratik menggunakan sistem affine dalam menyelesaikan permainan linear kuadratik non-kooperatif. Penelitian ini juga mengkaji persamaan aljabar Riccati non-simetris yang memiliki dimensi matriks berbeda dengan persamaan aljabar Riccati simetris. Hal ini selanjutnya melatarbelakangi pendefinisian dari kestabilan dan kestabilan kiri - kanan pada persamaan aljabar Riccati non-simetris. Selanjutnya, akan diberikan solusi persamaan aljabar Riccati non-simetris berdasarkan ruang bagian invariannya dan penerapan teori permainan dinamis pada masalah stabilisasi hutang pemerintah.

**Kata kunci** : kendali optimal linear kuadratik, permainan dinamis, persamaan aljabar Riccati, titik setimbang Nash.

## ABSTRACT

### NASH EQUILIBRIA IN THE NON-COOPERATIVE LINEAR QUADRATIC DYNAMIC GAME UNDER THE ASSUMPTION THAT A WHOLE PLAYER CAN STABILIZE THE SYSTEM

By

Maulidatu Jauharoti Alisyah

20106010001

The Nash equilibria is one of the important problems in non-cooperative linear quadratic dynamic games. This research aims to find the Nash equilibria using the algebraic Riccati equation and its connection with the invariant subspace. The control system used is an open loop type with the assumption that all players can stabilize the system. Quadratic linear optimal control problems use affine systems in solving non-cooperative quadratic linear games. This research also examines non-symmetric algebraic Riccati equation which have different matrix dimensions from symmetric algebraic Riccati equation. Then becomes the background for the definition of stability and left-right stability in non-symmetric algebraic Riccati equation. Next, we will provide a solution to the non-symmetric algebraic Riccati equation based on its invariant subspace and the application of dynamic game theory to the problem of government debt stabilization.

**Keyword** : quadratic linear optimal control, dynamic games, algebraic Riccati equation, Nash equilibria. .

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari - hari, manusia tidak luput dari masalah. Persepsi dan juga pemaknaan dari suatu masalah setiap orang akan berbeda - beda. Bagi sebagian orang suatu hal bisa dianggap masalah, sementara bagi yang lain, hal tersebut bukan masalah. Hal ini dibahas dalam Al-Quran mengenai posisi masalah dalam hidup manusia di berbagai aspek. Dalam Al-Quran Surah Al-Balad ayat 4 Allah SWT berfirman :

لَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ فِي كَبَدٍ ؕ

Artinya: "Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia berada dalam susah payah".

Ayat di atas memberikan penjelasan bahwa hakikatnya masalah dimiliki oleh setiap individu ataupun kelompok. Secara garis besar, masalah - masalah yang dihadapi individu bersumber dari dua faktor, yaitu dari dalam diri individu dan faktor lingkungan (Nurdyansyah & Fitriyani, 2018). Tak jarang masalah yang dihadapi melibatkan dua atau lebih individu, instansi, perusahaan, kota, bahkan negara. Permasalahan yang muncul dapat berupa persaingan atau konflik untuk memperoleh kemenangan atau keuntungan terhadap individu atau suatu kelompok. Masalah memiliki konteks yang sama dengan permainan. Sebab terdiri atas sekumpulan peraturan yang membangun situasi bersaing dari dua atau lebih individu dengan strategi

yang dibangun untuk memaksimalkan kemenangan sendiri. Permainan dapat dibawa ke ranah matematika yang dikenal sebagai teori permainan. Teori permainan diperkenalkan pertama kali oleh seorang ahli matematika Prancis yang bernama Emile Borel pada tahun 1921 (Press, 2023). Teori permainan merupakan suatu model matematika yang digunakan dalam situasi konflik atau persaingan yang bertujuan untuk mengidentifikasi strategi yang paling optimal untuk setiap pemain (Simamora, dkk., 2013).

Persoalan pada teori permainan diubah ke model matematika dengan solusi akhir berbentuk vektor kendali. Vektor kendali yang terbentuk jumlahnya tunggal atau banyak tergantung dengan banyaknya titik ekuilibrium (Andiraja, 2015). Berdasarkan jalannya permainan, teori permainan dibagi menjadi dua, yaitu *static game theory* (teori permainan statis) dan *dynamic game theory* (teori permainan dinamis). Dalam penelitian ini, pendekatan teori permainan yang digunakan adalah model permainan dinamis.

Permainan dinamis adalah model matematika yang merepresentasikan suatu konflik diantara berbagai pihak yang mengendalikan suatu sistem dinamik dan masing - masing pihak berusaha meminimalkan fungsi ongkos dengan memberikan sebuah kendali pada sistem dinamik tersebut (Asfa'ani, 2017). Berdasarkan teori kendali, dalam model sistem dinamis terdapat variabel *state* dan kendali (Ananda, 2023). Sedangkan, data - data awal disajikan dalam bentuk matriks, sehingga dapat digunakan teori matriks pada aljabar linear. Seiring perkembangan ilmu pengetahuan, membuat persaingan untuk menjadi yang terbaik semakin meningkat. Hal ini memunculkan pemikiran bagaimana memperoleh hasil yang terbaik apabila tidak terdapat kerjasama antar pemain. Sehingga, dari pernyataan ini teori permainan dibagi menjadi dua, yaitu permainan yang tidak saling bekerjasama

(*non-cooperative games*) dan permainan saling kerjasama (*cooperative games*).

Dari permainan dinamis dan permainan non-kooperatif, muncul teori yang menggabungkan keduanya, yaitu permainan dinamis non-kooperatif. Dimana fungsi objektif yang digunakan berbentuk kuadratik atau lebih dikenal dengan permainan diferensial linear kuadratik (Wahyuni, 2020). Permainan ini memberikan kendali terhadap suatu sistem linear dan setiap pemain berusaha mengoptimalkan fungsi *cost* berbentuk kuadratik. Permainan diferensial linear kuadratik bertipe lingkaran terbuka (*open loop*) dimana strategi untuk mengendalikan permainan tersebut diambil sebelum permainan dimulai berdasarkan pada persamaan *state* dan fungsi *cost* setiap pemain yang bersangkutan (Musthofa, 2016). Sehingga, tidak terdapat informasi yang diperoleh pemain yang dapat membantu dalam pengambilan keputusan dan keputusan pemain dalam satu periode yang telah diambil tidak akan dapat diubah dalam periode tersebut.

Dalam permainan diferensial linear kuadratik ini, strategi yang diambil oleh pemain lain (lawan) akan mempengaruhi hasil permainan, sedemikian sehingga hasil permainan yang diperoleh tidak akan bernilai lebih buruk atau yang dikenal sebagai strategi setimbang Nash (Asfa'ani, 2017). Hal yang menarik untuk dikaji dari permainan diferensial linear kuadratik adalah titik setimbang Nash. Strategi setimbang Nash dapat digunakan untuk mencari keputusan yang akan mengoptimalkan fungsi tujuan. Hal ini diperoleh dengan mencari kendali sebagai solusi yang sesuai dengan strategi yang diinginkan.

Masalah strategi Nash, telah dijelaskan oleh beberapa ahli yaitu, (Bacsar, 1999) dan (Engwerda, dkk., 2000). Penjelasan didominasi eksistensi solusi strategi Nash untuk persoalan permainan dinamis non-kooperatif dengan waktu tak hingga. Penentuan strategi optimal pada permainan dinamis linear kuadratik memerlukan so-

lusi dari persamaan diferensial Riccati. Dalam (Engwerda, 2005) dikaji syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash untuk permainan diferensial linear kuadratik dengan asumsi bahwa setiap pemain dapat menstabilkan sistem.

Penelitian ini akan kembali mengkaji beberapa bagian dari Tesis yang ditulis (Asfa'ani, 2017). Tesis tersebut berangkat dari *paper* (Engwerda, 2008) yang membahas syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash pada permainan linear kuadratik. Penelitian ini berfokus pada mencari titik setimbang Nash menggunakan persamaan aljabar Riccati serta hubungannya dengan ruang bagian invarian, kestabilan kiri - kanan pada persamaan aljabar Riccati non-simetris beserta solusinya, dan syarat ketunggalan solusi LRS (*Left Right Stabilizing*) persamaan aljabar Riccati non-simetris dengan ruang bagian graf. Selanjutnya, teori permainan dinamis akan diterapkan ke dalam masalah yang muncul di tengah masyarakat.

## 1.2. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada tugas akhir ini adalah permainan dinamis linear kuadratik yang digunakan bertipe lingkaran terbuka (*open loop*) untuk dua pemain. Hal ini berarti, strategi untuk mengendalikan permainan diambil sebelum permainan dimulai berdasarkan persamaan *state* dan fungsi *cost* dari setiap pemain. Selanjutnya, persamaan yang digunakan adalah aljabar Riccati simetris dan non-simetris dengan mempertimbangkan terhadap ruang bagian invarian. Kemudian dilanjutkan dengan membahas hubungan antara solusi LRS (*Left Right Stabilizing*) persamaan aljabar Riccati non-simetris dengan ruang bagian invarian serta pemberian syarat ketunggalan dari solusi tersebut.

### 1.3. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan batasan masalah yang telah diuraikan di atas, diperoleh rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mencari titik setimbang Nash menggunakan persamaan aljabar Riccati pada permainan dinamis linear kuadratik serta hubungannya dengan ruang bagian invarian ?
2. Bagaimana definisi menstabilkan serta menstabilkan kiri-kanan dari persamaan aljabar Riccati non-simetris?
3. Bagaimana solusi persamaan aljabar Riccati non-simetris berdasarkan ruang bagian invariannya?
4. Bagaimana hubungan antara solusi LRS persamaan aljabar Riccati non-simetris dengan ruang bagian graf serta pemberian syarat ketunggalan dari solusi tersebut ?
5. Bagaimana penerapan permainan linear kuadratik dalam masalah di dunia nyata ?

### 1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penulis dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari titik setimbang Nash menggunakan persamaan aljabar Riccati pada permainan dinamis linear kuadratik serta hubungannya dengan ruang bagian invarian
2. Mengetahui definisi menstabilkan serta menstabilkan kiri-kanan dari persamaan aljabar Riccati non-simetris

3. Mencari solusi persamaan aljabar Riccati non-simetris berdasarkan ruang bagian invariannya
4. Mengetahui hubungan antara solusi LRS persamaan aljabar Riccati non-simetris dengan ruang bagian graf serta pemberian syarat ketunggalan dari solusi tersebut
5. Mengetahui penerapan permainan linear kuadratik dalam masalah di dunia nyata

#### **1.5. Manfaat Penelitian**

Manfaat yang diharapkan dalam penyusunan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui cara mencari titik setimbang Nash menggunakan persamaan aljabar Riccati pada permainan dinamis linear kuadratik serta hubungannya dengan ruang bagian invarian
2. Memberi pemahaman mengenai definisi menstabilkan serta menstabilkan kiri-kanan dari persamaan aljabar Riccati non-simetris
3. Mengetahui solusi persamaan aljabar Riccati non-simetris berdasarkan ruang bagian invariannya
4. Memberikan pemahaman tentang hubungan antara solusi LRS persamaan aljabar Riccati non-simetris dengan ruang bagian graf serta pemberian syarat ketunggalan dari solusi tersebut
5. Memberi pemahaman tentang penerapan permainan linear kuadratik dalam masalah di dunia nyata

## 1.6. Tinjauan Pustaka

Sebagai acuan yang digunakan penulis untuk landasan teori dalam penulisan skripsi ini bersumber dari buku, jurnal, dan skripsi.

1. Tesis karya Ezhari Asfa'ani tahun 2015 dengan judul "*Titik Setimbang Nash Pada Permainan Linear Kuadratik Non-Kooperatif dengan Asumsi Keseluruhan Pemain Dapat Menstabilkan Sistem*" membahas tentang titik setimbang Nash pada permainan diferensial linear kuadratik non-kooperatif lingkaran terbuka.
2. Buku karya Jacob Engwerda tahun 2005 dengan judul "*LQ Dynamic Optimization and Differential Games*" membahas tentang optimisasi dinamis dan permainan diferensial kuadrat linier.
3. Jurnal karya Jacob Engwerda tahun 2012 dengan judul "*Open Loop Nash Equilibria in The Non-Cooperative Infinite Planning Horizon LQ Game*" membahas kesetimbangan Nash untuk permainan diferensial kuadrat linear dengan mempertimbangkan struktur informasi *loop* terbuka dengan asumsi sistem secara keseluruhan dapat distabilkan.

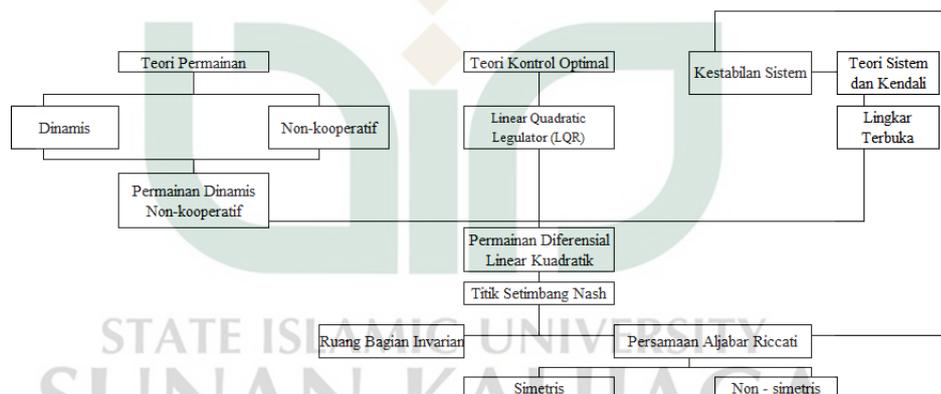
## 1.7. Metode Penelitian

Penulis menggunakan metode studi literatur. Studi literatur diambil dari buku-buku referensi, jurnal-jurnal terkait topik penelitian dan langkah-langkah yang dilakukan sebagai berikut :

1. Membahas hubungan antara titik setimbang Nash dengan ruang bagian invarian dan persamaan aljabar Riccati serta mencari titik setimbang Nash pada permainan diferensial kuadratik.

2. Mendefinisikan solusi menstabilkan dan menstabilkan kiri-kanan dari persamaan aljabar Riccati non-simetris
3. Mencari solusi persamaan aljabar Riccati non-simetris berdasarkan ruang bagian invarian
4. Membahas hubungan antara solusi menstabilkan persamaan aljabar Riccati non-simetris dengan ruang bagian invarian serta memberikan syarat untuk ketunggalan dari solusi tersebut
5. Membahas penerapan permainan dinamis linear kuadratik dalam masalah di dunia nyata

Berikut diberikan skema dari penelitian ini,



**Gambar 1.1 Skema Metode Penelitian**

## 1.8. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini terbagi menjadi lima bab, yaitu sebagai berikut:

- BAB 1** : Bab ini membahas tentang latar belakang masalah, batasan masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, tinjauan pustaka, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB 2** : Bab ini memuat penjelasan tentang optimisasi fungsi konveks, sistem kontinu LTI, keterkendalian, ruang bagian invarian, kendali umpan balik, *stabilizability*, keteramatan, keterdeteksian, persamaan aljabar Riccati, kendali optimal linear kuadratik, dan teori permainan dinamis
- BAB 3** : Bab ini menjelaskan tentang syarat cukup dan perlu untuk mencari titik setimbang Nash untuk permainan dinamis linear kuadratik non-kooperatif dengan asumsi semua pemain secara bersama - sama dapat menstabilkan sistem.
- BAB 4** : Bab ini membahas penerapan dari permainan dinamis linear kuadratik non-kooperatif bertipe lingkaran terbuka.
- BAB 5** : Bab ini berisikan tentang kesimpulan penelitian dan saran dari penulis terhadap pengembangan penelitian.

## BAB V

### PENUTUP

Pada bab ini akan diberikan kesimpulan dan saran-saran yang dapat diambil berdasarkan materi-materi yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya.

#### 5.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil penulis setelah menyelesaikan pembuatan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Pencarian titik setimbang Nash menggunakan persamaan aljabar Riccati memiliki solusi simetris  $K_i(\cdot)$  sedemikian sehingga  $A_i - S_i K_i, i = 1, 2$  stabil. Sebaliknya, jika dua persamaan aljabar Riccati (3.5) memiliki solusi menstabilkan dan  $\mathbf{v}^T(t) := [x^T(t), \psi_1^T(t), \psi_2^T(t)]$  adalah solusi stabil asimtotik dari  $\dot{\mathbf{v}}(t) = M\mathbf{v}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Maka  $\mathbf{u}_i^* = -R_i^{-1} B_i^T T_i^T [I_{n_i} \quad 0]^T \psi_i(t), i = 1, 2$ , merupakan titik setimbang Nash lingkaran terbuka untuk permainan dinamis linear kuadratik. Karena persamaan Riccati (3.5) memiliki solusi menstabilkan sistem, maka hubungan dengan ruang bagian invarian juga akan stabil yang diberikan oleh  $\text{Span}[I \quad K_1]^T$ .
2. Definisi menstabilkan serta menstabilkan kiri kanan solusi  $P^T := [P_1^T, P_2^T]$  dengan  $P_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$  dari persamaan aljabar Riccati non simetris, dikatakan
  - (a) menstabilkan, jika  $\sigma(A - \tilde{S}P) \subset \mathbb{C}^-$ ;
  - (b) menstabilkan kiri-kanan (LRS) jika solusi tersebut merupakan solusi menstabilkan dan  $\sigma(-A_2^{-T} + P\tilde{S}) \in \mathbb{C}_0^+$ .

3. Solusi persamaan aljabar Riccati non simetris berdasarkan ruang bagian invarian  $n$ -dimensional dari  $M$ , dan  $X_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n}$ ,  $i = 1, 2$  (dengan  $n = n_0$ ) adalah tiga matriks real sedemikian sehingga  $V = \text{im}[X_0^T, X_1^T, X_2^T]^T$ . Jika  $X_0$  invertibel maka  $P_i := X_i X_0^{-1}$ ,  $i = 1, 2$  merupakan penyelesaian persamaan Riccati non simetris (3.20).
4. Hubungan antara solusi LRS persamaan Riccati non-simetris dengan ruang bagian graf yaitu, persamaan Riccati non simetris memiliki solusi LRS  $P^T = [P_1^T \ P_2^T]$  jika dan hanya jika matriks  $M$  memiliki ruang bagian graf stabil  $n$ -dimensional dengan  $M$  memiliki  $n_1 + n_2$  nilai eigen pada  $\mathbb{C}_0^+$ . Karena persamaan Riccati non simetris memiliki solusi LRS yang berakibat  $P_i := X_i X_0^{-1}$  merupakan penyelesaiannya dan dengan syarat  $(P_1, P_2)$  bebas dari pemilihan basis  $V$ , maka solusi tersebut tunggal.
5. Pada masalah di dunia nyata, penerapan permainan linear kuadratik dapat diterapkan pada stabilisasi hutang pemerintah. Sebab selama tahun 1980, banyak negara maju dan berkembang yang terlilit hutang dan mengalami masalah dalam menstabilkan hutang. Konflik kebijaksanaan muncul karena kebijakan fiskal dan moneter dikendalikan oleh institusi berbeda yang mempunyai tujuan berlainan dalam hal inflasi, stabilisasi hutang pemerintah, dan pengeluaran publik.

## 5.2. Saran

Saran yang akan penulis sampaikan untuk penelitian selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Penelitian ini hanya dibatasi pada 2 pemain. Diharapkan ada penelitian yang membahas permainan dinamis linear kuadratik non-kooperatif lingkaran terbuka

ka untuk  $n$  pemain.

2. Penelitian lanjut untuk topik ini dapat dicoba untuk sistem deskriptor kontinu.



## DAFTAR PUSTAKA

- Aditya, A., Ratianingsih, R., & Puspita, J. (2017). Kestabilan model matematika penularan penyakit gonorrhoeae. *JURNAL ILMIAH MATEMATIKA DAN TERAPAN*, 14(2):232–241.
- Amanto, A. & Zakaria, L. (2012). Keterkendalian sistem bandul ganda. *Jurnal Sains MIPA Universitas Lampung*, 6(2).
- Ananda, S. (2023). Pemodelan matematis dalam desain sistem kendali otomatis untuk proses manufaktur. *Jurnal Dunia Ilmu*, 3(7).
- Andiraja, N. (2015). Aplikasi geometri pada permainan dinamis non-kooperatif skalar waktu tak berhingga.
- Asfa'ani, E. (2017). Titik setimbang nash pada permainan linear kuadratik non-kooperatif dengan asumsi keseluruhan pemain dapat menstabilkan sistem. *Math Educa Journal*, 1(2):211–224.
- Bacsar, T. (1999). Nash equilibria of risk-sensitive nonlinear stochastic differential games. *Journal of optimization theory and applications*, 100:479–498.
- Bahri, S. (2017). Teori pengoptimuman.
- Bijaksana, A. & Suryani, I. (2015). Menentukan nilai eigen tak dominan suatu matriks semi definit dan indefinit menggunakan metode kuasa invers dengan shift. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, 1(2):73–82.
- Boyd, S. P. & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.

- Engwerda, J. (2005). *LQ dynamic optimization and differential games*. John Wiley & Sons.
- Engwerda, J. (2008). Uniqueness conditions for the affine open-loop linear quadratic differential game. *Automatica*, 44(2):504–511.
- Engwerda, J., Van Aarle, B., Plasmans, J., & Weeren, A. (2013). Debt stabilization games in the presence of risk premia. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 37(12):2525–2546.
- Engwerda, J., Van Den Broek, W., & Schumacher, J. M. (2000). Feedback nash equilibria in uncertain infinite time horizon differential games. In *Proceedings of the 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS 2000*, pages 1–6. Unknown Publisher.
- Lancaster, P. & Rodman, L. (1995). *Algebraic riccati equations*. Clarendon press.
- Musthofa, M. W. (2016). Permainan dinamis linear kuadratik berkendala lunak berjumlah nol lingkaran terbuka sistem deskriptor dengan kendali tetap untuk pemain pertama.
- Nurdyansyah, N. & Fitriyani, T. (2018). Pengaruh strategi pembelajaran aktif terhadap hasil belajar pada madrasah ibtidaiyah. *Universitas Muhammadiyah Sidoarjo*.
- Olsder, G. J. & van der Woude, J. W. (2005). *Mathematical systems theory*, volume 4. VSSD Delft.
- Press, U. (2023). *TEORI PERMAINAN DAN APLIKASINYA*. UGM PRESS.
- Tabellini, G. (1986). Money, debt and deficits in a dynamic game. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 10(4):427–442.

Wahyuni, S. (2020). *APLIKASI KENDALI LQR KONTINU UNTUK SISTEM PER-GUDANGAN BARANG SUSUT DENGAN PENINJAUAN BERKALA PADA RADIOISOTOP FOSFOR-32*. PhD thesis, UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU.

Zhang, H. & Ding, F. (2013). On the kronecker products and their applications. *Journal of Applied Mathematics*, 2013.

